Touristik-Aufgabe   Abiturprüfung LK Bayern 2004

1. Im Mittel wollen 55 % der Anrufer des Callcenters eines großen Touristikunternehmens eine Reise buchen, während 27 % Fragen zu bereits gebuchten Reisen haben. Die restlichen Anrufer haben verschiedene andere Anliegen.

   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 25 Anrufern mehr als die Hälfte eine Reise buchen wollen?

   b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an einem Arbeitstag spätestens der zehnte Anrufer eine Frage zu einer gebuchten Reise hat?

   c) Am Ende eines Arbeitstags befinden sich noch 12 Anrufer in der Warteschleife der Telefonzentrale, von denen 6 eine Reise buchen wollen und 4 eine Frage zu einer gebuchten Reise haben, die übrigen Anrufer haben eine Reklamation. Die Anrufe werden in zufälliger Reihenfolge bearbeitet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eine der Reklamationen unter den letzten 3 bearbeiteten Anrufen ist?

   d) Wie groß muss der Anteil der Anrufer mit einer Reklamation mindestens sein, damit unter 50 Anrufern mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % wenigstens einer eine Reklamation hat?

2. Der Vorstand des Touristikunternehmens beabsichtigt, eine Buchungsmöglichkeit über das Internet einzurichten. Die Geschäftsführung vertritt jedoch die Meinung, dass sich diese Investition nicht lohnt. Um zu testen, ob die Vermutung der Geschäftsführung zutrifft, werden 500 zufällig ausgewählte Kunden bei der Buchung einer Reise befragt. Bestimmen Sie mit Hilfe der Normalverteilung die Entscheidungsregel für die Nullhypothese „Mindestens 65 % der Kunden ziehen die herkömmlichen Buchungsmöglichkeiten einer Buchung über das Internet vor“ auf dem Signifikanzniveau von 5 %.

3. In einem Urlaubsland werden erste Fälle einer gefährlichen Infektionskrankheit festgestellt, während sich ein Flugzeug mit 120 Reisenden von dort auf dem Heimflug befindet. Es wird angenommen, dass sich die Passagiere unabhängig voneinander mit der gleichen Wahrscheinlichkeit p mit dem Erreger der Krankheit infiziert haben. (Eine gegenseitige Ansteckung während des Flugs wird ausgeschlossen.)

   a) Berechnen Sie mit Mitteln der Differentialrechnung, welchen Wert die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den 120 Reisenden genau 3 infiziert sind, maximal annehmen kann.

   Seit kurzem steht ein Bluttest zur Verfügung, mit dem der Erreger bereits vor Ausbruch der Krankheit sicher erkannt werden kann. Da dieser Test sehr kostspielig ist, werden die Reisenden nach ihrer Rückkehr in Gruppen von je 6 Personen eingeteilt. Dann wird zunächst jeweils ein Gemisch aus dem Blut der Personen einer Gruppe hergestellt; anschließend werden diese Gemische untersucht. Nur bei denjenigen Gruppen, bei denen der Erreger gefunden wird, wird anschließend das Blut jeder Einzelperson getestet.
   Im Folgenden soll der Erwartungswert für die Anzahl der benötigten Bluttests exemplarisch für den Fall berechnet werden, dass genau 3 der Reisenden in dem Flugzeug infiziert sind.

   b) Die Zufallsgröße X bezeichne die Anzahl der Gruppen, bei denen der Erreger bei der Untersuchung der Blutgemische gefunden wird. Sie hat folgende Verteilung:

k	1	2	3
$P(X = k)$	0,0014	?	0,8768

   Weisen Sie nach, dass die beiden angegebenen (gerundeten) Wahrscheinlichkeiten richtig sind, und berechnen Sie den dritten Wert.

   c) Berechnen Sie den Erwartungswert für die Gesamtzahl der benötigten Bluttests.

Touristik-Aufgabe   Abiturprüfung LK Bayern 2004   Lösungen

1. Im Mittel wollen 55 % der Anrufer des Callcenters eines großen Touristikunternehmens eine Reise buchen, während 27 % Fragen zu bereits gebuchten Reisen haben. Die restlichen Anrufer haben verschiedene andere Anliegen.

   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 25 Anrufern mehr als die Hälfte eine Reise buchen wollen? $P_{0{,}55}^{25}(X \geq 13) = 69{,}4\,\%$

   b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an einem Arbeitstag spätestens der zehnte Anrufer eine Frage zu einer gebuchten Reise hat? $1 - (1 - 0{,}27)^{10} = 95{,}7\,\%$

   c) Am Ende eines Arbeitstags befinden sich noch 12 Anrufer in der Warteschleife der Telefonzentrale, von denen 6 eine Reise buchen wollen und 4 eine Frage zu einer gebuchten Reise haben, die übrigen Anrufer haben eine Reklamation. Die Anrufe werden in zufälliger Reihenfolge bearbeitet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eine der Reklamationen unter den letzten 3 bearbeiteten Anrufen ist? $1 - \frac{9}{12} \cdot \frac{8}{11} = \frac{5}{11}$ *oder* $1 - \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 9!}{12!} = \frac{5}{11}$

   d) Wie groß muss der Anteil der Anrufer mit einer Reklamation mindestens sein, damit unter 50 Anrufern mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % wenigstens einer eine Reklamation hat? $P_p^{50}(Y \geq 1) \geq 90\,\%,\quad 1 - (1-p)^{50} \geq 0{,}90 \implies p \geq 4{,}5\,\%$

2. Der Vorstand des Touristikunternehmens beabsichtigt, eine Buchungsmöglichkeit über das Internet einzurichten. Die Geschäftsführung vertritt jedoch die Meinung, dass sich diese Investition nicht lohnt. Um zu testen, ob die Vermutung der Geschäftsführung zutrifft, werden 500 zufällig ausgewählte Kunden bei der Buchung einer Reise befragt. Bestimmen Sie mit Hilfe der Normalverteilung die Entscheidungsregel für die Nullhypothese „Mindestens 65 % der Kunden ziehen die herkömmlichen Buchungsmöglichkeiten einer Buchung über das Internet vor“ auf dem Signifikanzniveau von 5 %.
   $k \leq 306{,}9$ mit Normalverteilung, $P_{0{,}65}^{500}(Z \leq k) \leq 5\,\% \implies k \leq 307$

3. In einem Urlaubsland werden erste Fälle einer gefährlichen Infektionskrankheit festgestellt, während sich ein Flugzeug mit 120 Reisenden von dort auf dem Heimflug befindet. Es wird angenommen, dass sich die Passagiere unabhängig voneinander mit der gleichen Wahrscheinlichkeit p mit dem Erreger der Krankheit infiziert haben. (Eine gegenseitige Ansteckung während des Flugs wird ausgeschlossen.)

   a) Berechnen Sie mit Mitteln der Differentialrechnung, welchen Wert die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den 120 Reisenden genau 3 infiziert sind, maximal annehmen kann.
   $$f(p) = \binom{120}{3} \cdot p^3 \cdot (1-p)^{117},\quad f'(p) = \binom{120}{3} p^2 (1-p)^{116}(3 - 120p) = 0, \implies p_{max} = 2{,}5\,\%$$
   $$f(p_{max}) = 0{,}227$$

   Seit kurzem steht ein Bluttest zur Verfügung, mit dem der Erreger bereits vor Ausbruch der Krankheit sicher erkannt werden kann. Da dieser Test sehr kostspielig ist, werden die Reisenden nach ihrer Rückkehr in Gruppen von je 6 Personen eingeteilt. Dann wird zunächst jeweils ein Gemisch aus dem Blut der Personen einer Gruppe hergestellt; anschließend werden diese Gemische untersucht. Nur bei denjenigen Gruppen, bei denen der Erreger gefunden wird, wird anschließend das Blut jeder Einzelperson getestet.
   Im Folgenden soll der Erwartungswert für die Anzahl der benötigten Bluttests exemplarisch für den Fall berechnet werden, dass genau 3 der Reisenden in dem Flugzeug infiziert sind.

   b) Die Zufallsgröße X bezeichne die Anzahl der Gruppen, bei denen der Erreger bei der Untersuchung der Blutgemische gefunden wird. Sie hat folgende Verteilung:

k	1	2	3
$P(X = k)$	0,0014	?	0,8768

   Weisen Sie nach, dass die beiden angegebenen (gerundeten) Wahrscheinlichkeiten richtig sind, und berechnen Sie den dritten Wert.

c) Berechnen Sie den Erwartungswert für die Gesamtzahl der benötigten Bluttests.

Die Fragestellung von 3b) soll wegen ihrer Bedeutung etwas genauer untersucht werden.
Zunächst eine allgemeine Überlegung:

Eine n-elementige Menge wird in m Teilmengen mit je k Elementen zerlegt, $n = m \cdot k$.
Wie viele Möglichkeiten gibt es hierzu?

Falls die Reihenfolge der Teilmengen berücksichtigt wird, beträgt die Anzahl:

$$A_{Zerlegungen} = \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{k} \cdot \binom{n-2k}{k} \cdot \ \ldots \ \cdot \binom{k}{k},$$

ohne Berücksichtigung der Reihenfolge ist diese Anzahl durch $m!$ zu dividieren.

Nun zu einer lehrreichen, jedoch nicht zu empfehlenden Laplace-Lösung:

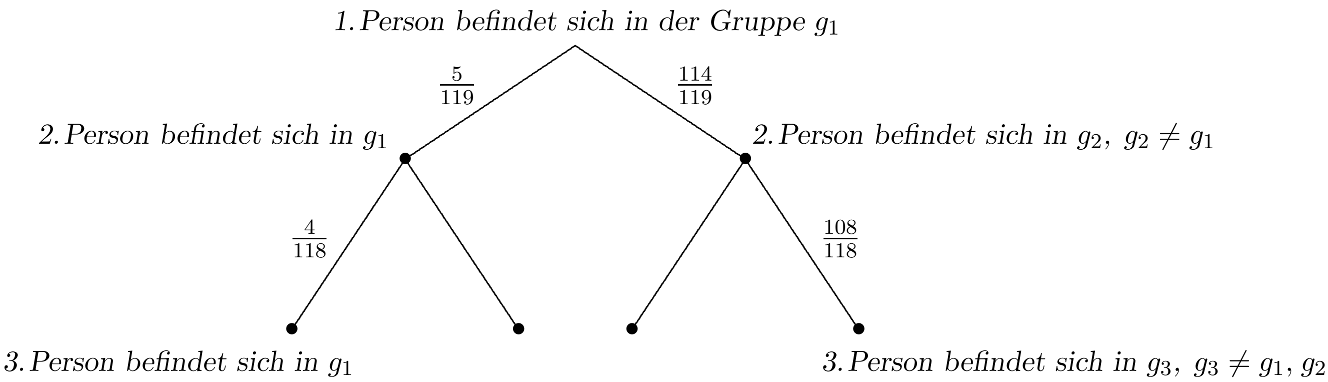
$$P(X=1) = \frac{20 \cdot \binom{117}{3} \cdot \binom{114}{6} \cdot \binom{108}{6} \cdot \ \ldots \ \cdot \binom{6}{6}}{\binom{120}{6} \cdot \binom{114}{6} \cdot \binom{108}{6} \cdot \ \ldots \ \cdot \binom{6}{6}} = \frac{20 \cdot \binom{117}{3}}{\binom{120}{6}} = 0{,}001424$$

Falls die Reihenfolge der Zerlegungen nicht berücksichtigt wird, wird der Zähler anstelle der Multiplikation mit 20 durch 19! und der Nenner durch 20! dividiert, was auf dasselbe hinausläuft.

$$P(X=3) = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot \binom{117}{5} \cdot \binom{112}{5} \cdot \binom{107}{5} \cdot \binom{102}{6} \ \cdot \ \ldots \ \cdot \binom{6}{6}}{\binom{120}{6} \cdot \binom{114}{6} \cdot \binom{108}{6} \cdot \binom{102}{6} \cdot \ \ldots \ \cdot \binom{6}{6}}$$

$$= \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot \binom{117}{5} \cdot \binom{112}{5} \cdot \binom{107}{5}}{\binom{120}{6} \cdot \binom{114}{6} \cdot \binom{108}{6}} = 0{,}876798$$

Ein Baumdiagramm führt schneller zur Lösung:



$P(X=1) = \frac{5}{119} \cdot \frac{4}{118} = 0{,}0014$ $\qquad$ $P(X=3) = \frac{114}{119} \cdot \frac{108}{118} = 0{,}8768$

$P(X=2) = 0{,}1218, \quad E(X) = 0{,}0014 \cdot (20+6) + 0{,}1218 \cdot (20+12) + 0{,}8768 \cdot (20+18) = 37{,}25$

Windpark-Aufgabe Abiturprüfung LK Bayern 2004

Auf dem Gebiet der Gemeinde Windstätt soll ein Windpark zur Stromerzeugung errichtet werden. Die Gegner des Projekts befürchten eine Beeinträchtigung des Fremdenverkehrs und sammeln Unterschriften für ein Bürgerbegehren. Das Windstätter Tagblatt veranstaltet eine Podiumsdiskussion zum Thema Windpark.

1. An der Podiumsdiskussion nehmen neben dem Chefredakteur 5 Gegner und 4 Befürworter des Projekts teil. Die 10 Plätze auf dem Podium sind in einer Reihe nebeneinander angeordnet. Der Chefredakteur setzt sich auf den 5. Platz von links. Die beiden Gruppen haben jeweils einen Sprecher.

   a) Wie viele verschiedene Sitzordnungen gibt es, bei denen die beiden Sprecher höchstens 2 Plätze vom Chefredakteur entfernt sitzen und sich die übrigen Teilnehmer beliebig auf die restlichen Plätze verteilen?

   b) Bei wie vielen Sitzordnungen, die die Bedingung aus Teilaufgabe 1a) erfüllen, nehmen die Gruppen geschlossen links bzw. rechts vom Chefredakteur Platz?

   c) Zu Beginn der Diskussion werden die Teilnehmer vom Chefredakteur um eine kurze Stellungnahme gebeten. Die Reihenfolge der Redner wird ausgelost. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich unter den ersten 6 Rednern genau zwei Gegner des Projekts?

2. Im Verlauf der Podiumsdiskussion, zu der 178 Windstätter Bürger erschienen sind, behauptet der Sprecher der Windparkgegner, dass wenigstens 55 % der mehr als 10000 wahlberechtigten Gemeindemitglieder gegen das geplante Projekt sind.

   a) Die Behauptung des Sprechers (Nullhypothese) soll auf dem Signifikanzniveau von 5 % getestet werden. Bestimmen Sie mit Hilfe der Normalverteilung die zugehörige Entscheidungsregel bei einer Befragung von 178 Bürgern.

   b) Um eine Entscheidung im Sinne des Tests aus Teilaufgabe 2a) zu treffen, sollen die bei der Podiumsdiskussion anwesenden 178 wahlberechtigten Gemeindemitglieder befragt werden. Nehmen Sie zu diesem Vorschlag Stellung.

3. Um den Ausgang des beantragten Bürgerentscheids zu prognostizieren, führte das Windstätter Tagblatt eine Umfrage unter 1200 wahlberechtigten Bürgern durch. Dabei sprachen sich 504 gegen das Projekt aus, während die übrigen 696 für die Errichtung des Windparks waren.

   a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Ungleichung von Tschebyschow ein möglichst kleines Intervall, in dem der Anteil p der Windparkgegner unter allen Gemeindemitgliedern mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 75 % liegt. Verwenden Sie $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$.

   b) Beim schließlich durchgeführten Bürgerentscheid lag die Wahlbeteiligung bei 35%. Es stimmten 51% gegen das Windparkprojekt; ungültige Stimmen gab es nicht. Wenn man davon ausgeht, dass die Umfrage die Mehrheitsverhältnisse in Windstätt exakt wiedergibt, kann dieses Ergebnis durch einen unterschiedlichen Mobilisierungsgrad der Gegner und Befürworter erklärt werden. Welcher Prozentsatz der Gegner und welcher Prozentsatz der Befürworter ist demnach zur Abstimmung gegangen?

4. Ein großes Windparkunternehmen will sich durch Ausgabe von Aktien Kapital an der Börse verschaffen. Die Nachfrage ist erheblich; es werden wesentlich mehr Aktien geordert, als ausgegeben werden sollen. Daher erfolgt die Zuteilung im Losverfahren unter den Anlegern, die mindestens 200 Aktien geordert haben. Es werden nur Aktienpakete zu 50, 100 oder 200 Stück verlost.

   Die Zufallsgröße X, die die Anzahl der einem dieser Anleger zugeteilten Aktien beschreibt, hat die folgende Verteilung:

k	0	50	100	200
$P(X=k)$	0,30	0,40	0,20	0,10

   a) Berechnen Sie Erwartungswert und Standardabweichung von X. [Zur Kontrolle: $\mu = 60$, $\sigma \approx 58{,}3$]

   b) Es nehmen auch 100 Windstätter Bürger am Losverfahren teil. Nach dem zentralen Grenzwertsatz ist die voraussichtliche Gesamtzahl der ihnen dabei zugeteilten Aktien näherungsweise normalverteilt. Berechnen Sie unter Annahme der Normalverteilung die Wahrscheinlichkeit, dass diese Gesamtzahl höchstens 10 % vom Erwartungswert abweicht.

Windpark-Aufgabe Abiturprüfung LK Bayern 2004 Lösungen

Auf dem Gebiet der Gemeinde Windstätt soll ein Windpark zur Stromerzeugung errichtet werden. Die Gegner des Projekts befürchten eine Beeinträchtigung des Fremdenverkehrs und sammeln Unterschriften für ein Bürgerbegehren. Das Windstätter Tagblatt veranstaltet eine Podiumsdiskussion zum Thema Windpark.

1. An der Podiumsdiskussion nehmen neben dem Chefredakteur 5 Gegner und 4 Befürworter des Projekts teil. Die 10 Plätze auf dem Podium sind in einer Reihe nebeneinander angeordnet. Der Chefredakteur setzt sich auf den 5. Platz von links. Die beiden Gruppen haben jeweils einen Sprecher.

   a) Wie viele verschiedene Sitzordnungen gibt es, bei denen die beiden Sprecher höchstens 2 Plätze vom Chefredakteur entfernt sitzen und sich die übrigen Teilnehmer beliebig auf die restlichen Plätze verteilen?

   $\smile\ \smile\ \smile\ \smile\ \asymp\ \smile\ \smile\ \smile\ \smile\ \smile \qquad 4 \cdot 3 \cdot 7!$

   b) Bei wie vielen Sitzordnungen, die die Bedingung aus Teilaufgabe 1a) erfüllen, nehmen die Gruppen geschlossen links bzw. rechts vom Chefredakteur Platz? $2 \cdot 3! \cdot 2 \cdot 4!$ *Befürworter müssen links sitzen.*

   c) Zu Beginn der Diskussion werden die Teilnehmer vom Chefredakteur um eine kurze Stellungnahme gebeten. Die Reihenfolge der Redner wird ausgelost. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich unter den ersten 6 Rednern genau zwei Gegner des Projekts?

   $$\frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{4}{4}}{\binom{9}{6}}$$

2. Im Verlauf der Podiumsdiskussion, zu der 178 Windstätter Bürger erschienen sind, behauptet der Sprecher der Windparkgegner, dass wenigstens 55 % der mehr als 10000 wahlberechtigten Gemeindemitglieder gegen das geplante Projekt sind.

   a) Die Behauptung des Sprechers (Nullhypothese) soll auf dem Signifikanzniveau von 5 % getestet werden. Bestimmen Sie mit Hilfe der Normalverteilung die zugehörige Entscheidungsregel bei einer Befragung von 178 Bürgern.

   $$P_{0{,}55}^{178}(X \leq k) \leq 0{,}05 \quad \Longrightarrow \quad k = 86$$

   Für $X \leq 86$ kann die Nullhypothese verworfen werden.

   b) Um eine Entscheidung im Sinne des Tests aus Teilaufgabe 2a) zu treffen, sollen die bei der Podiumsdiskussion anwesenden 178 wahlberechtigten Gemeindemitglieder befragt werden. Nehmen Sie zu diesem Vorschlag Stellung. *Anwesende sind nicht repräsentativ.*

3. Um den Ausgang des beantragten Bürgerentscheids zu prognostizieren, führte das Windstätter Tagblatt eine Umfrage unter 1200 wahlberechtigten Bürgern durch. Dabei sprachen sich 504 gegen das Projekt aus, während die übrigen 696 für die Errichtung des Windparks waren.

   a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Ungleichung von Tschebyschew ein möglichst kleines Intervall, in dem der Anteil p der Windparkgegner unter allen Gemeindemitgliedern mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 75 % liegt. Verwenden Sie $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$.

   $$p_{gegen} = \frac{504}{1200} = 0{,}42$$

   $$\begin{aligned} P(\,|\,0{,}42 - p\,| < \varepsilon) &\geq 0{,}75 \\ 1 - \frac{1}{4\varepsilon^2 \cdot 1200} &\geq 0{,}75 \\ \varepsilon &\geq 0{,}029 \end{aligned}$$

   $$\Longrightarrow \quad 0{,}391 < p < 0{,}449$$

b) Beim schließlich durchgeführten Bürgerentscheid lag die Wahlbeteiligung bei 35%. Es stimmten 51% gegen das Windparkprojekt; ungültige Stimmen gab es nicht. Wenn man davon ausgeht, dass die Umfrage die Mehrheitsverhältnisse in Windstätt exakt wiedergibt, kann dieses Ergebnis durch einen unterschiedlichen Mobilisierungsgrad der Gegner und Befürworter erklärt werden. Welcher Prozentsatz der Gegner und welcher Prozentsatz der Befürworter ist demnach zur Abstimmung gegangen?

	dafür	*dagegen*	*Summe*
gehen zur Wahl	17,2 %	17,9 %	35,0 %
gehen nicht zur Wahl	...	...	...
Summe	58,0 %	42,0 %	100 %

beachte: 51 % von 35 % *sind* 17,85 %

$$P(\textit{gehen zur Wahl} \mid \textit{dafür}) = \frac{17{,}2}{58{,}0} = 29{,}6\,\%$$

$$P(\textit{gehen zur Wahl} \mid \textit{dagegen}) = \frac{17{,}9}{42{,}0} = 42{,}5\,\%$$

4. Ein großes Windparkunternehmen will sich durch Ausgabe von Aktien Kapital an der Börse verschaffen. Die Nachfrage ist erheblich; es werden wesentlich mehr Aktien geordert, als ausgegeben werden sollen. Daher erfolgt die Zuteilung im Losverfahren unter den Anlegern, die mindestens 200 Aktien geordert haben. Es werden nur Aktienpakete zu 50, 100 oder 200 Stück verlost.

Die Zufallsgröße X, die die Anzahl der einem dieser Anleger zugeteilten Aktien beschreibt, hat die folgende Verteilung:

k	0	50	100	200
$P(X = k)$	0,30	0,40	0,20	0,10

a) Berechnen Sie Erwartungswert und Standardabweichung von X.

[Zur Kontrolle: $\mu = 60$, $\sigma \approx 58{,}3$]

$$\mu = 0 \cdot 0{,}3 + 50 \cdot 0{,}4 + 100 \cdot 0{,}2 + 200 \cdot 0{,}1 = 60$$

$$\sigma = 0^2 \cdot 0{,}3 + 50^2 \cdot 0{,}4 + 100^2 \cdot 0{,}2 + 200^2 \cdot 0{,}1 - 60^2 = 3400$$

$$\sigma \; = \sqrt{3400}$$

b) Es nehmen auch 100 Windstätter Bürger am Losverfahren teil. Nach dem zentralen Grenzwertsatz ist die voraussichtliche Gesamtzahl der ihnen dabei zugeteilten Aktien näherungsweise normalverteilt. Berechnen Sie unter Annahme der Normalverteilung die Wahrscheinlichkeit, dass diese Gesamtzahl höchstens 10 % vom Erwartungswert abweicht.

$$\mu = 100 \cdot 60 = 6000$$

$$\sigma \; = \sqrt{100} \cdot \sqrt{3400} = 10 \cdot \sqrt{3400}$$

$$c = 600$$

$$P(5400 \le X \le 6600) = P(\mid X - \mu \mid \le c) \approx 2\Phi(\frac{c + 0{,}5}{\sigma}) - 1 = 69{,}7\,\%$$

Der Summand 0,5 kann entfallen.