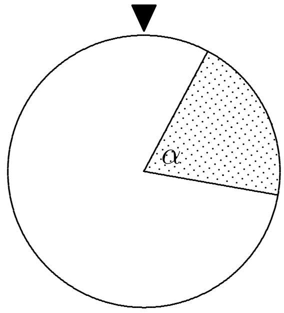
Glücksrad-Aufgabe Bayern LK 1981



Auf einem Glücksrad ist ein Sektor schraffiert. Zeigt der Pfeil nach Stillstand des Rads auf den schraffierten Teil, so spricht man von einem Treffer.
Die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer ist durch $p = \frac{\alpha}{360^0}$ gegeben ($0^0 < \alpha < 360^0$).

Das Glücksrad wird n-mal gedreht.
Die Zufallsgröße X ist die Anzahl der Treffer.

1. Folgende Spielregel wird vereinbart: Der Spieler dreht das Glücksrad zehnmal. Er gewinnt, wenn er dabei genau 2 Treffer erzielt.
   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn (in Abhängigkeit von p)?
   b) Wie groß muss p und damit α gewählt werden, damit die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn möglichst groß wird? Lösen Sie die Aufgabe mit Methoden der Differentialrechnung.

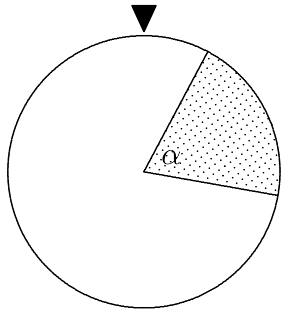
2. In dieser Teilaufgabe ist $\alpha = 90^0$. Es wird folgende Spielregel vereinbart: Der Spieler gewinnt, wenn er genau 2 Treffer erzielt; er muss aber vorher sagen, wie oft er das Glücksrad drehen will.
   a) Auf welche Anzahl wird sich der Spieler festlegen, wenn er sich am Erwartungswert von X orientiert?
   b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn in Abhängigkeit von n an. Für welche Werte von n ist die Wahrscheinlichkeit am größten? Wie groß ist sie?
   (Hinweis: Verwenden Sie Tabellen der Binomialverteilung.)

3. Das Rad mit $\alpha = 90^0$ wird n-mal gedreht. Ab welchem n lohnt es sich, darauf zu wetten, dass mindestens ein Treffer erzielt wird?

4. Nun sei $p = 0{,}04$. Das Glücksrad wird 200 mal gedreht.
   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht die Anzahl der Treffer um höchstens 3 vom Erwartungswert ab? Benützen Sie die Poisson-Näherung.
   b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Tschebyschow-Ungleichung ein möglichst kleines Intervall, in dem die Anzahl der Treffer mit mindestens 99 % Sicherheit liegt.

5. Ein Spielbudenbesitzer behauptet, sein Glücksrad habe eine Gewinnwahrscheinlichkeit von 25 %. Ein Zuschauer zählt bei 500 aufeinanderfolgenden Spielen die Gewinne. Wie groß dürfte die Anzahl der Gewinne höchstens sein, wenn er die Nullhypothese “die Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt mindestens 25 %“ mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 5 % ablehnen kann? Verwenden Sie die Normalverteilung.

Glücksrad-Aufgabe Lösungen



Auf einem Glücksrad ist ein Sektor schraffiert. Zeigt der Pfeil nach Stillstand des Rads auf den schraffierten Teil, so spricht man von einem Treffer.
Die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer ist durch $p = \frac{\alpha}{360^0}$ gegeben ($0^0 < \alpha < 360^0$).

Das Glücksrad wird n-mal gedreht.
Die Zufallsgröße X ist die Anzahl der Treffer.

1. Folgende Spielregel wird vereinbart: Der Spieler dreht das Glücksrad zehnmal. Er gewinnt, wenn er dabei genau 2 Treffer erzielt.

   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn (in Abhängigkeit von p)?
   $$f(p) = P_p^{10}(X = 2) = \binom{10}{2} p^2 \cdot (1-p)^8$$

   b) Wie groß muss p und damit α gewählt werden, damit die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn möglichst groß wird? Lösen Sie die Aufgabe mit Methoden der Differentialrechnung.
   $$f'(p) = \ldots = \binom{10}{2} 2p \cdot (1-p)^7 \cdot (1-5p) \quad \Longrightarrow \quad \text{Maximum für } p = 0{,}2 \quad \text{(Vorzeichenwechsel)}$$
   $$\alpha = 72^0$$

2. In dieser Teilaufgabe ist $\alpha = 90^0$. Es wird folgende Spielregel vereinbart: Der Spieler gewinnt, wenn er genau 2 Treffer erzielt; er muss aber vorher sagen, wie oft er das Glücksrad drehen will.

   a) Auf welche Anzahl wird sich der Spieler festlegen, wenn er sich am Erwartungswert von X orientiert?
   $$E(X) = n \cdot 0{,}25 = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad n = 8$$

   b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn in Abhängigkeit von n an. Für welche Werte von n ist die Wahrscheinlichkeit am größten? Wie groß ist sie?
   (Hinweis: Verwenden Sie Tabellen der Binomialverteilung.)
   $$P_{0,25}^{n}(X = 2) = \binom{n}{2} 0{,}25^2 \cdot 0{,}75^{n-2}$$
   maximal für $n = 7$ bzw. $n = 8$ und zwar $31{,}15\,\%$

3. Das Rad mit $\alpha = 90^0$ wird n-mal gedreht. Ab welchem n lohnt es sich, darauf zu wetten, dass mindestens ein Treffer erzielt wird?
   $$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) > 0{,}5 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 - 0{,}75^n > 0{,}5 \quad \Longrightarrow \quad n > 2{,}4 \qquad \text{ab } n = 3$$

4. Nun sei $p = 0{,}04$. Das Glücksrad wird 200 mal gedreht.

   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht die Anzahl der Treffer um höchstens 3 vom Erwartungswert ab? Benützen Sie die Poisson-Näherung.
   $$\mu = n \cdot p = 8, \quad P(5 \leq X \leq 11) = 78{,}8\,\%$$

   b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Tschebyschow-Ungleichung ein möglichst kleines Intervall, in dem die Anzahl der Treffer mit mindestens 99 % Sicherheit liegt.
   $$P(|\,X - \mu\,| < c) \;\geq\; 1 - \frac{V(X)}{c^2} \;\geq\; 0{,}99, \quad \mu = 8,\; V(X) = n \cdot p \cdot q = 7{,}68 \Longrightarrow c \geq 27{,}7 \qquad 0 \leq X \leq 35$$

5. Ein Spielbudenbesitzer behauptet, sein Glücksrad habe eine Gewinnwahrscheinlichkeit von 25 %. Ein Zuschauer zählt bei 500 aufeinanderfolgenden Spielen die Gewinne. Wie groß dürfte die Anzahl der Gewinne höchstens sein, wenn er die Nullhypothese "die Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt mindestens 25 %" mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 5 % ablehnen kann? Verwenden Sie die Normalverteilung.
   $$\mu = 500 \cdot 0{,}25 = 125, \qquad \sigma = \sqrt{500 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75} = 9{,}68$$
   $$P(\,X \leq k) \;\approx\; \Phi\Big(\frac{k + 0{,}5 - \mu}{\sigma}\Big) \;\leq\; 0{,}05 \qquad \Longrightarrow \qquad k \leq 108$$
   $$\overline{A} = \{0, \ldots, 108\} \quad \text{(Ablehnungsbereich für die Nullhypothese)}$$

i-Wörter-Aufgabe   Bayern LK 1981

1. Ein Computer drucke Wörter in einer zufälligen Reihenfolge aus. Jedes Wort, das den Buchstaben "i" enthält, heiße i-Wort. Die Wahrscheinlichkeit für den Ausdruck eines i-Wortes betrage $p = 0{,}4$.

   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den ersten 5 ausgedruckten Wörtern höchstens 3 i-Wörter sind?

   b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den ersten 5 ausgedruckten Wörtern die ersten 3 Wörter i-Wörter sind. sonst aber keine mehr?

   c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den ersten 5 ausgedruckten Wörtern mindestens 3 direkt aufeinanderfolgende Wörter i-Wörter sind?

   d) Wie viele Wörter muss man mindestens ausdrucken lassen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens ein i-Wort zu erhalten?

2. Der Computer breche nun die Programmausführung nach dem dritten ausgedruckten i-Wort ab, spätestens aber nach dem sechsten Wort. X sei die Anzahl der ausgedruckten Wörter.

   a) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X folgende Wertetabelle hat (Werte auf drei Stellen gerundet):

k	3	4	5	6
$P(X = k)$	0,064	0,115	0,138	0,683

   b) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der Zufallsgröße X.

3. Nun werden in einem deutschen Text die ersten 100 Wörter betrachtet. 45 von ihnen sind i-Wörter. Kann man mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 10 % die Nullhypothese "der Anteil der i-Wörter in dem Text ist höchstens 40 %" ablehnen?

4. Der Computer von Teilaufgabe l. (Wahrscheinlichkeit für ein i-Wort 0,4) druckt 100 000 Wörter.

   a) Berechnen Sie mit Hilfe der Tschebyschow-Ungleichung ein möglichst kleines Intervall (symmetrisch zum Erwartungswert), in dem mit mindestens 90 % Wahrscheinlichkeit die Anzahl der ausgedruckten i-Wörter liegt.

   b) Beantworten Sie die Frage aus Teilaufgabe 4. a) mittels der Normalverteilung und nehmen Sie kurz Stellung zu den unterschiedlichen Ergebnissen.

i-Wörter-Aufgabe Lösungen

1. Ein Computer drucke Wörter in einer zufälligen Reihenfolge aus. Jedes Wort, das den Buchstaben "i" enthält, heiße i-Wort. Die Wahrscheinlichkeit für den Ausdruck eines i-Wortes betrage $p = 0{,}4$.

   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den ersten 5 ausgedruckten Wörtern höchstens 3 i-Wörter sind?
   $$P_{0,4}^{5}(X \le 3) = 91{,}3\,\%$$

   b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den ersten 5 ausgedruckten Wörtern die ersten 3 Wörter i-Wörter sind. sonst aber keine mehr?
   $$0,4^3 \cdot 0{,}6^2 = 2{,}3\,\%$$

   c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den ersten 5 ausgedruckten Wörtern mindestens 3 direkt aufeinanderfolgende Wörter i-Wörter sind?
   $$E = \{(i\,i\,i\,\_\,\_),\ (\_\,i\,i\,i\,\_),\ (\_\,\_\,i\,i\,i),\ (i\,i\,i\,\_\,i),\ (i\,\_\,i\,i\,i),\ (i\,i\,i\,i\,\_),\ (\_\,i\,i\,i\,i),\ (i\,i\,i\,i\,i)\}$$
   $$3 \cdot 0,4^3 \cdot 0{,}6^2 + 4 \cdot 0,4^4 \cdot 0{,}6^1 + 0,4^5 \cdot 0{,}6^0 = 14{,}1\,\%$$

   d) Wie viele Wörter muss man mindestens ausdrucken lassen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens ein i-Wort zu erhalten?
   $$P(X \ge 1) = 1 - P(X = 0) > 0{,}95 \iff 1 - 0{,}6^n > 0{,}95 \implies n \ge 6 \quad \text{mindestens 6}$$

2. Der Computer breche nun die Programmausführung nach dem dritten ausgedruckten i-Wort ab, spätestens aber nach dem sechsten Wort. X sei die Anzahl der ausgedruckten Wörter.

   a) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X folgende Wertetabelle hat (Werte auf drei Stellen gerundet):

k	3	4	5	6
$P(X=k)$	0,064	0,115	0,138	0,683

   $k = 3:\ (i\,i\,i)$ $\qquad P(X = 3) = 0,4^3$

   $k = 4:\ (\_\,i\,i\,i),\ (i\,\_\,i\,i),\ (i\,i\,\_\,i)$ $\qquad P(X = 4) = 3 \cdot 0,4^3 \cdot 0{,}6$

   $k = 5:\ (\_\,\_\,i\,i\,i),\ (\_\,i\,\_\,i\,i),\ (i\,\_\,\_\,i\,i),\ (\_\,i\,i\,\_\,i),\ (i\,\_\,i\,\_\,i),\ (i\,i\,\_\,\_\,i)$ $\qquad P(X = 5) = 6 \cdot 0,4^3 \cdot 0{,}6^2$

   $k = 6:$ $\qquad P(X = 6) = 1 - \big(P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)\big)$

   b) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der Zufallsgröße X.
   $$E(X) = 5{,}44$$
   $$V(X) = E(X^2) - \mu^2 = 0{,}860$$

3. Nun werden in einem deutschen Text die ersten 100 Wörter betrachtet. 45 von ihnen sind i-Wörter. Kann man mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 10 % die Nullhypothese "der Anteil der i-Wörter in dem Text ist höchstens 40 %" ablehnen?
   $$P_{0,4}^{100}(X \ge 45) > 0{,}1\,\%$$
   Die Nullhypothese kann nicht abgelehnt werden.

4. Der Computer von Teilaufgabe l. (Wahrscheinlichkeit für ein i-Wort 0,4) druckt 100 000 Wörter.

   a) Berechnen Sie mit Hilfe der Tschebyschow-Ungleichung ein möglichst kleines Intervall (symmetrisch zum Erwartungswert), in dem mit mindestens 90 % Wahrscheinlichkeit die Anzahl der ausgedruckten i-Wörter liegt.
   $$\mu = 100000 \cdot 0{,}4 = 40000 \qquad \sigma = \sqrt{100000 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6}$$
   $$P(\,|\,Y - \mu)\,| < c) \ \ge\ 1 - \frac{V(Y)}{c^2} \ \ge\ 0{,}9 \implies c \ge 489{,}9$$
   $$40000 - 489{,}9 < Y < 40000 + 489{,}9$$
   $$39511 \le Y \le 40489$$

   b) Beantworten Sie die Frage aus Teilaufgabe 4. a) mittels der Normalverteilung und nehmen Sie kurz Stellung zu den unterschiedlichen Ergebnissen.
   $$P(\,|\,X - \mu\,| \le c) \approx 2\Phi(\frac{c + 0{,}5}{\sigma}) - 1 \ \ge\ 0{,}9 \implies c \ge 255$$
   $$39745 \le Y \le 40255$$