# Kugelschreiber-Aufgabe Bayern LK 1986

1. Eine Firma stellt Kugelschreiber her. Sie werden in Packungen zu je 20 Stück geliefert. Ein Händler prüft aus jeder Packung nacheinander zwei Kugelschreiber (ohne Zurücklegen). Er nimmt die Packung genau dann an, wenn beide Kugelschreiber in Ordnung sind.

   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird der Händler eine solche Packung jeweils annehmen, wenn sie 2, 4 oder 6 defekte Kugelschreiber enthält? Nehmen Sie kurz Stellung zur Brauchbarkeit dieser Prüfung.

   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden alle 10 Packungen einer Lieferung angenommen, wenn jede von ihnen genau 4 defekte Kugelschreiber enthält.

2. Der Defekt eines Kugelschreibers kann zwei Gründe haben: defekte Mechanik (l. Mangel) bzw. defekte Mine (2. Mangel). Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Kugelschreiber defekt ist, beträgt 0,088. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des l. Mangels ist 0,05 und die für das Auftreten beider Mängel gleichzeitig ist 0,002. Untersuchen Sie, ob die beiden Mängel unabhängig voneinander auftreten.

3. Bei der Endkontrolle wird ein Kugelschreiber mit der Wahrscheinlichkeit 0,1 als Ausschuss ausgesondert. Bei dieser Kontrolle wird erfahrungsgemäß ein einwandfreier Kugelschreiber mit der Wahrscheinlichkeit 0,04 als Ausschuss deklariert. 8,8 % aller produzierten Kugelschreiber seien defekt.

   a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein defekter Kugelschreiber aussortiert wird.

   b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Kugelschreiber wirklich defekt ist, falls er bei der Endkontrolle aussortiert wurde?

4. Mit einer Stichprobe von 200 Stück soll getestet werden, ob die Angabe der Herstellerfirma stimmt, dass höchstens 4 % der Kugelschreiber defekt sind.

   a) Bestimmen Sie für ein Signifikanzniveau von 1 % einen möglichst großen Ablehnungsbereich für die Hypothese "Höchstens 4 % der Kugelschreiber sind defekt".

   b) Wie groß ist bei diesem Test das Risiko 2. Art, wenn tatsächlich 10 % der Kugelschreiber defekt sind?

5. Ein Händler erhält eine Lieferung von 5000 Kugelschreibern. Die Anzahl der defekten Kugelschreiber in der Lieferung ist unbekannt, jedoch liegt der Ausschussanteil der Gesamtproduktion erfahrungsgemäß bei 4 %. Berechnen Sie mit Hilfe der Normalverteilung ein möglichst kleines Intervall $[0; k]$, so dass die Anzahl der defekten Kugelschreiber mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % in diesem Intervall liegt.

# Kugelschreiber-Aufgabe   Bayern LK 1986   Lösungen

1. Eine Firma stellt Kugelschreiber her. Sie werden in Packungen zu je 20 Stück geliefert. Ein Händler prüft aus jeder Packung nacheinander zwei Kugelschreiber (ohne Zurücklegen). Er nimmt die Packung genau dann an, wenn beide Kugelschreiber in Ordnung sind.

   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird der Händler eine solche Packung jeweils annehmen, wenn sie 2, 4 oder 6 defekte Kugelschreiber enthält? Nehmen Sie kurz Stellung zur Brauchbarkeit dieser Prüfung.

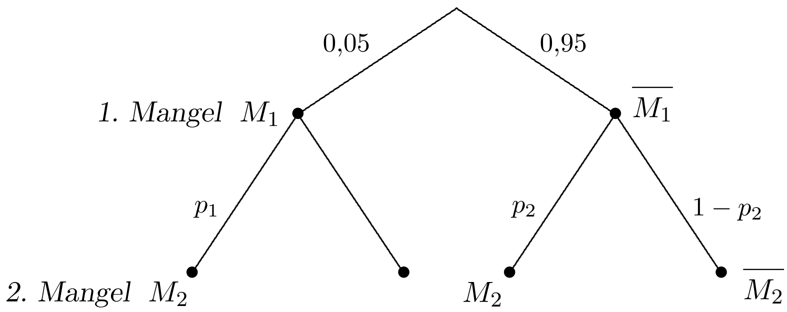
   $$k = 2 \text{ defekte Kugelschreiber}, \; P(\text{Annahme}) = \frac{\binom{18}{2}}{\binom{20}{2}} = 80{,}5\,\% \quad \left(= \frac{18}{20} \cdot \frac{17}{19}\right)$$

   entsprechend: $k = 4$: $P(\text{Annahme}) = 63{,}2\,\%$, $k = 6$: $P(\text{Annahme}) = 47{,}9\,\%$, Test ungeeignet, $P$ zu groß

   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden alle 10 Packungen einer Lieferung angenommen, wenn jede von ihnen genau 4 defekte Kugelschreiber enthält.

   $$0{,}632^{10} = 1{,}0\,\%$$

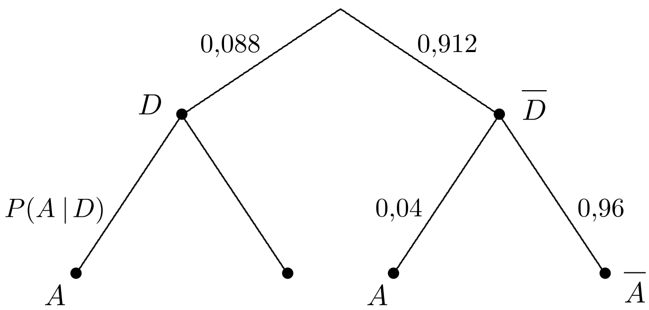
2. Der Defekt eines Kugelschreibers kann zwei Gründe haben: defekte Mechanik (l. Mangel) bzw. defekte Mine (2. Mangel). Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Kugelschreiber defekt ist, beträgt 0,088. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des l. Mangels ist 0,05 und die für das Auftreten beider Mängel gleichzeitig ist 0,002. Untersuchen Sie, ob die beiden Mängel unabhängig voneinander auftreten.




$$0{,}95 \cdot (1 - p_2) = 1 - 0{,}088 \implies p_2 = 0{,}04$$
$$0{,}05 \cdot p_1 = 0{,}002 \implies p_1 = 0{,}04$$
$$p_1 = p_2 \implies \text{Ereignisse sind unabhängig.}$$

3. Bei der Endkontrolle wird ein Kugelschreiber mit der Wahrscheinlichkeit 0,1 als Ausschuss ausgesondert. Bei dieser Kontrolle wird erfahrungsgemäß ein einwandfreier Kugelschreiber mit der Wahrscheinlichkeit 0,04 als Ausschuss deklariert. 8,8 % aller produzierten Kugelschreiber seien defekt.

   a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein defekter Kugelschreiber aussortiert wird.




$$0{,}088 \cdot P(A \mid D) + 0{,}912 \cdot 0{,}04 = 0{,}1 \implies P(A \mid D) = 72{,}2\,\%$$

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Kugelschreiber wirklich defekt ist, falls er bei der Endkontrolle aussortiert wurde?

$$P(D \mid A) = \frac{0{,}088 \cdot 0{,}722}{0{,}1} = 63{,}5\,\%$$

4. Mit einer Stichprobe von 200 Stück soll getestet werden, ob die Angabe der Herstellerfirma stimmt, dass höchstens 4 % der Kugelschreiber defekt sind.

   a) Bestimmen Sie für ein Signifikanzniveau von 1 % einen möglichst großen Ablehnungsbereich für die Hypothese "Höchstens 4 % der Kugelschreiber sind defekt".

   $$P_{0{,}04}^{200}(X \geq k) \leq 1\,\% \quad \Longrightarrow \quad k \geq 16, \quad \overline{A} = \{16, \ldots, 200\} \quad \text{(Ablehnungsbereich)}$$

   b) Wie groß ist bei diesem Test das Risiko 2. Art, wenn tatsächlich 10 % der Kugelschreiber defekt sind?

   $$P_{0{,}10}^{200}(Y \leq 15) = 14{,}3\,\%$$

5. Ein Händler erhält eine Lieferung von 5000 Kugelschreibern. Die Anzahl der defekten Kugelschreiber in der Lieferung ist unbekannt, jedoch liegt der Ausschussanteil der Gesamtproduktion erfahrungsgemäß bei 4 %. Berechnen Sie mit Hilfe der Normalverteilung ein möglichst kleines Intervall $[0;\, k]$, so dass die Anzahl der defekten Kugelschreiber mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % in diesem Intervall liegt.

$$\mu = 5000 \cdot 0{,}04 = 200$$

$$\sigma = \sqrt{5000 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}96} = 13{,}86$$

$$P(X \leq k) \approx \Phi\left(\frac{k + 0{,}5 - \mu}{\sigma}\right) \geq 0{,}90 \quad \Longrightarrow \quad k \geq 218$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 %
liegt die Anzahl defekter Kugelschreiber im Intervall [0; 218].

# Zuckerfabrik-Aufgabe Bayern LK 1986 *(abgeändert)*

1. In einer Zuckerfabrik wird der Zucker in Packungen zu $10\,g$, $250\,g$, $500\,g$, $1\,kg$ und $2{,}5\,kg$ abgefüllt. Nun soll das ganze Sortiment in einem Schaukasten in einer Reihe ausgestellt werden, und zwar ein 2,5-$kg$-Paket und je zwei Pakete der übrigen Größen.

   a) Auf wie viele verschiedene Arten ist das möglich?

   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit steht das 2,5-$kg$-Paket unmittelbar zwischen den beiden 1-$kg$-Paketen, wenn die Anordnung zufällig erfolgt?

2. Im Mittel wird in jedes zehnte l-$kg$-Paket ein Gutschein gelegt.

   a) Ein Kunde kauft 20 Pakete. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er mindestens einen Gutschein?

   b) Wie viele Pakete müsste er im mindestens kaufen, damit er mit einer Mindestwahrscheinlichkeit von $95\,\%$ wenigstens einen Gutschein erhält?

3. 100 Gutscheine werden nun durch einen Zufallsmechanismus auf die 1000 Pakete eines Containers so verteilt, dass jeder Gutschein unabhängig von den anderen in jedes Paket gelangen kann. (Ein Paket kann also auch mehr als einen Gutschein enthalten!)

   a) Beschreiben Sie ein Urnenexperiment, mit dem man einen solchen Zufallsmechanismus realisieren könnte.

   b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in ein bestimmtes Paket mehr als ein Gutschein gelangt?

   [ Ergebnis: $0{,}46\,\%$ ]

   c) Berechnen Sie mit Hilfe der Poisson-Verteilung die Wahrscheinlichkeit dafür, dass entweder 4 oder 5 Pakete in einem Container mehr als einen Gutschein enthalten.

4. Die Zuckerfabrik behauptet, ihre Abfüllanlage für die l-$kg$-Pakete arbeite so, dass weniger als $4\,\%$ der Pakete weniger als $1000\,g$ enthalten.

   a) Eine Verbraucherschutz-Organisation misstraut dieser Behauptung und möchte sie auf einem Signifikanzniveau von $1\,\%$ mit einem Stichprobenumfang von 400 Paketen wiederlegen. Geben Sie hierzu einen Test an.

   b) Die Zuckerfabrik möchte mit einem Test ihre Behauptung auf einem Signifikanzniveau von $1\,\%$ und dem Stichprobenumfang von 400 Paketen belegen. Entwickeln Sie für die Zuckerfabrik einen Test.

Original-Text der 4. Teilaufgabe:
Die Zuckerfabrik behauptet, ihre Abfüllanlage für die l-$kg$-Pakete arbeite so, dass höchstens $4\,\%$ der Pakete weniger als $1000\,g$ enthalten. Die prüfende Behörde will diese Behauptung nur dann akzeptieren, wenn in einer Stichprobe von 400 Paketen höchstens $k$ Pakete mit einer Masse unter $1000\,g$ zu finden sind. Bestimmen Sie zu einem Signifikanzniveau von $1\,\%$ einen möglichst großen Wert für $k$ (Normalverteilung!).

# Zuckerfabrik-Aufgabe *(abgeändert)* Lösungen

1. In einer Zuckerfabrik wird der Zucker in Packungen zu $10\,g$, $250\,g$, $500\,g$, $1\,kg$ und $2{,}5\,kg$ abgefüllt. Nun soll das ganze Sortiment in einem Schaukasten in einer Reihe ausgestellt werden, und zwar ein 2,5-$kg$-Paket und je zwei Pakete der übrigen Größen.

   a) Auf wie viele verschiedene Arten ist das möglich? $\frac{9!}{(2!)^4} = 22680$

   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit steht das 2,5-$kg$-Paket unmittelbar zwischen den beiden 1-$kg$-Paketen, wenn die Anordnung zufällig erfolgt? □ ■ □ _ _ _ _ _ _

   $$\frac{7\cdot\frac{6!}{(2!)^3}}{22680} = 2{,}8\,\%$$

2. Im Mittel wird in jedes zehnte l-$kg$-Paket ein Gutschein gelegt.

   a) Ein Kunde kauft 20 Pakete. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er mindestens einen Gutschein?

   $$P_{0,1}^{20}(X \geq 1) = 87{,}8\,\%$$

   b) Wie viele Pakete müsste er im mindestens kaufen, damit er mit einer Mindestwahrscheinlichkeit von 95 % wenigstens einen Gutschein erhält?

   $$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) > 0{,}9 \iff 1 - 0{,}9^n > 0{,}95$$
   $$\implies n > 28{,}4 \qquad \text{mindestens } 29$$

3. 100 Gutscheine werden nun durch einen Zufallsmechanismus auf die 1000 Pakete eines Containers so verteilt, dass jeder Gutschein unabhängig von den anderen in jedes Paket gelangen kann. (Ein Paket kann also auch mehr als einen Gutschein enthalten!)

   a) Beschreiben Sie ein Urnenexperiment, mit dem man einen solchen Zufallsmechanismus realisieren könnte.

   Aus einer Urne mit 1000 nummerierten Kugeln werden 100 Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Den gezogenen Nummern entsprechen den Zuckerpaketen, in die ein Gutschein gelegt wird.

   b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in ein bestimmtes Paket mehr als ein Gutschein gelangt?

   [ Ergebnis: 0,46 % ] $P_{0,001}^{100}(Z \geq 1) = 0{,}46\,\%$

   c) Berechnen Sie mit Hilfe der Poisson-Verteilung die Wahrscheinlichkeit dafür, dass entweder 4 oder 5 Pakete in einem Container mehr als einen Gutschein enthalten. $\mu = 4{,}6 \quad P = 36{,}0\,\%$

4. Die Zuckerfabrik behauptet, ihre Abfüllanlage für die l-$kg$-Pakete arbeite so, dass weniger als 4 % der Pakete weniger als $1000\,g$ enthalten.

   a) Eine Verbraucherschutz-Organisation misstraut dieser Behauptung und möchte sie auf einem Signifikanzniveau von 1 % mit einem Stichprobenumfang von 400 Paketen wiederlegen. Geben Sie hierzu einen Test an.

   Binomialverteilung: $P_{0,04}^{400}(X \geq k) \leq 0{,}01 \implies \overline{A} = \{26, \ldots, 400\}$

   Ablehnungsbereich für die Nullhypothese $H_0$: $p < 4\,\%$

   Normalverteilung: $\mu = 400 \cdot 0{,}04 = 16, \quad \sigma = \sqrt{400 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}96} = 3{,}92$

   $$P(X \geq k) \approx 1 - \Phi\Big(\frac{k - 0{,}5 - \mu}{\sigma}\Big) \leq 0{,}01 \implies k \geq 26$$

b) Die Zuckerfabrik möchte mit einem Test ihre Behauptung auf einem Signifikanzniveau von 1 % und dem Stichprobenumfang von 400 Paketen belegen. Entwickeln Sie für die Zuckerfabrik einen Test.

Binomialverteilung: $P^{400}_{0{,}04}(X \le k) \le 0{,}01 \implies \overline{A} = \{0, \ldots, 6\}$

Ablehnungsbereich für die Nullhypothese $H_0$: $p \ge 4\,\%$

Normalverteilung: $P(X \le k) \approx \Phi\left(\frac{k+0{,}5-\mu}{\sigma}\right) \le 0{,}01 \implies k \le 6$

Original-Text der 4. Teilaufgabe:
Die Zuckerfabrik behauptet, ihre Abfüllanlage für die l-$kg$-Pakete arbeite so, dass höchstens 4 % der Pakete weniger als 1000 $g$ enthalten. Die prüfende Behörde will diese Behauptung nur dann akzeptieren, wenn in einer Stichprobe von 400 Paketen höchstens $k$ Pakete mit einer Masse unter 1000 $g$ zu finden sind. Bestimmen Sie zu einem Signifikanzniveau von 1 % einen möglichst großen Wert für $k$ (Normalverteilung!).

Die Formulierung "Bestimmen Sie … einen möglichst großen Wert für $k$".
weist auf einen linksseitigen Test wie unter 4. b) hin, Nullhypothese $H_0$: $p > 4\,\%$.
Problematisch an dieser Aufgabenstellung ist der Fehler 2. Art: $\beta = P^{400}_{0{,}04}(X \ge 7) = 99{,}7\,\%$ (Binomialverteilung), Normalverteilung: $\beta = 99{,}2\,\%$.
Mit dieser Wahrscheinlichkeit akzeptiert die Behörde die Behauptung nicht, obwohl sie richtig ist.
Die Behörde müsste um ihren Ruf besorgt sein.