

## Projektionskurve    Abiturprüfung LK Bayern 2003

In einem kartesischen Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$  ist die Ebene  $H: x_1 + x_2 + x_3 - 8 = 0$  sowie die Schar von Geraden

$$g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} a^2 \\ 0 \\ -a^2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3a \\ -3a \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R} \text{ gegeben.}$$

1.
  - a) Zeigen Sie, dass keine der Geraden  $g_a$  parallel und keine senkrecht zur Ebene  $H$  verläuft.
  - b) Welche dieser Geraden schneidet  $H$  unter dem größten Winkel? Berechnen Sie diesen maximalen Winkel auf eine Dezimale genau.
  - c) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts  $S_a$  von  $g_a$  mit  $H$ .  
[ zur Kontrolle:  $S_a(a^2 + 3a \mid -3a \mid 8 - a^2)$  ]
  - d) Zeigen Sie, dass der Punkt  $S(-2 \mid 6 \mid 4)$  derjenige Punkt aus der Schar der Schnittpunkte  $S_a$  ist, der die geringste Entfernung vom Ursprung hat. Geben Sie diese Entfernung an.
  - e) Die Punkte  $S_a$  bilden in  $H$  eine Kurve. Diese wird parallel zur  $x_3$ -Achse in die  $x_1x_2$ -Ebene projiziert; die Projektion heißt  $P$ . Fertigen Sie eine Zeichnung von  $P$  in der  $x_1x_2$ -Ebene an. Um welchen Kurventyp handelt es sich bei  $P$  vermutlich? Überprüfen Sie Ihre Vermutung, indem Sie eine Koordinatengleichung von  $P$  aufstellen.
  
2. Ferner sind die Punkte  $A(1 \mid 6 \mid 1)$  und  $B(-2 \mid 9 \mid 1)$  gegeben.
  - a) Weisen Sie nach, dass sich die Punkte  $A$  und  $B$  zu einem regulären Sechseck  $ABCDEF$  mit dem Mittelpunkt  $S(-2 \mid 6 \mid 4)$  ergänzen lassen.  
Ermitteln Sie die Koordinaten der Ergänzungspunkte  $C$  und  $D$ .
  - b) Das Sechseck  $ABCDEF$  rotiert nun um die Achse  $AD$ . Beschreiben Sie das Aussehen des dabei entstehenden Rotationskörpers. Ermitteln Sie eine Gleichung der kleinsten Kugel, die den Rotationskörper enthält.  
Liegt der Ursprung des Koordinatensystems innerhalb oder außerhalb dieses Rotationskörpers? Begründen Sie Ihre Antwort.

# Projektionskurve    Abiturprüfung LK Bayern 2003    Lösungen

In einem kartesischen Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$  ist die Ebene  $H: x_1 + x_2 + x_3 - 8 = 0$  sowie die Schar von Geraden

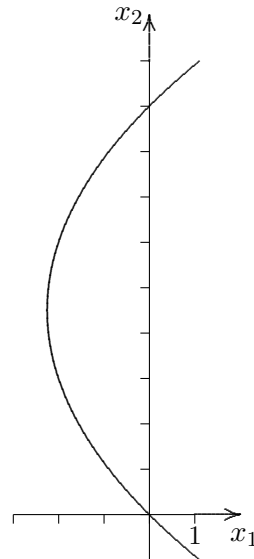
$$g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} a^2 \\ 0 \\ -a^2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3a \\ -3a \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R} \text{ gegeben.}$$

1. a) Zeigen Sie, dass keine der Geraden  $g_a$  parallel und keine senkrecht zur Ebene  $H$  verläuft.  
 $\vec{u}_{g_a} \cdot \vec{n}_H \neq 0, \quad \vec{u}_{g_a} \neq \lambda \vec{n}_H$
- b) Welche dieser Geraden schneidet  $H$  unter dem größten Winkel? Berechnen Sie diesen maximalen Winkel auf eine Dezimale genau.  
 $\sin \alpha = \frac{\vec{u}_{g_a} \cdot \vec{n}_H}{|\vec{u}_{g_a}| \cdot |\vec{n}_H|} = \frac{8}{\sqrt{18a^2 + 64} \cdot \sqrt{3}}, \quad \text{maximal für } a = 0, \quad \alpha_{max} = 35,3^\circ$
- c) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts  $S_a$  von  $g_a$  mit  $H$ .  
[ zur Kontrolle:  $S_a(a^2 + 3a \mid -3a \mid 8 - a^2)$  ]
- d) Zeigen Sie, dass der Punkt  $S(-2 \mid 6 \mid 4)$  derjenige Punkt aus der Schar der Schnittpunkte  $S_a$  ist, der die geringste Entfernung vom Ursprung hat. Geben Sie diese Entfernung an.

$$|\vec{OS}_a| = \sqrt{(a^2 + 3a)^2 + (-3a)^2 + (8 - a^2)^2} = \sqrt{f(a)}$$

$$f'(a) = 0 \implies a_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{1}{4}, \quad a_3 = -2, \quad d_{min} = \sqrt{56}$$

- e) Die Punkte  $S_a$  bilden in  $H$  eine Kurve. Diese wird parallel zur  $x_3$ -Achse in die  $x_1x_2$ -Ebene projiziert; die Projektion heißt  $P$ . Fertigen Sie eine Zeichnung von  $P$  in der  $x_1x_2$ -Ebene an. Um welchen Kurventyp handelt es sich bei  $P$  vermutlich? Überprüfen Sie Ihre Vermutung, indem Sie eine Koordinatengleichung von  $P$  aufstellen.

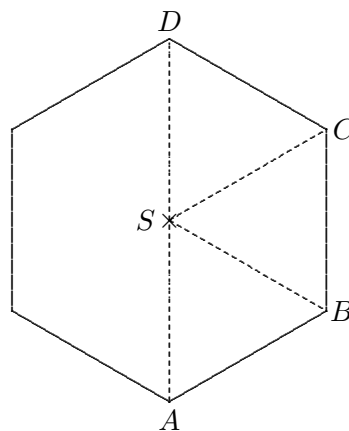


Parabel

$$\begin{aligned} x_1 &= a^2 + 3a \\ x_2 &= -3a \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\implies x_1 = \frac{1}{9}x_2^2 - x_2$$

2. Ferner sind die Punkte  $A(1 \mid 6 \mid 1)$  und  $B(-2 \mid 9 \mid 1)$  gegeben.
- a) Weisen Sie nach, dass sich die Punkte  $A$  und  $B$  zu einem regulären Sechseck  $ABCDEF$  mit dem Mittelpunkt  $S(-2 \mid 6 \mid 4)$  ergänzen lassen.  
Ermitteln Sie die Koordinaten der Ergänzungspunkte  $C$  und  $D$ .

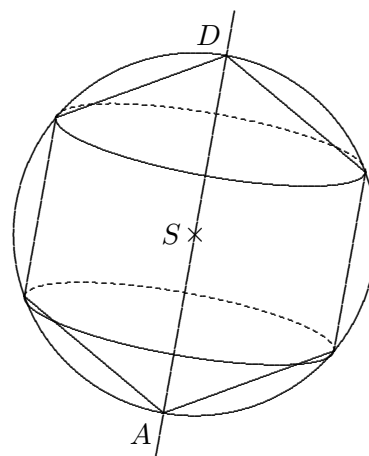


$$|\vec{AB}| = |\vec{AS}| = |\vec{BS}| = \sqrt{18}$$

$$\vec{OC} = \vec{OS} + \vec{AB}, \quad C(-5 \mid 9 \mid 4)$$

$$\vec{OD} = \vec{OS} + \vec{AS}, \quad D(-5 \mid 6 \mid 7)$$

- b) Das Sechseck  $ABCDEF$  rotiert nun um die Achse  $AD$ . Beschreiben Sie das Aussehen des dabei entstehenden Rotationskörpers. Ermitteln Sie eine Gleichung der kleinsten Kugel, die den Rotationskörper enthält.  
Liegt der Ursprung des Koordinatensystems innerhalb oder außerhalb dieses Rotationskörpers? Begründen Sie Ihre Antwort.



Zylinder mit aufgesetzten Kegeln

$$\left[ \vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \right]^2 = 18$$

$$|\vec{OS}| = \sqrt{56} > r = \sqrt{18}$$

Der Koordinatenursprung liegt außerhalb des Rotationskörpers.

## Ebenenschar-Aufgabe    Abiturprüfung LK Bayern 2003

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte  $A(5|0|1)$ ,  $B(0|4|2)$  und  $C(0|0|t)$  mit  $0 < t < 6$  gegeben.

1. a) Berechnen Sie für die Gerade  $AB$  den Schnittpunkt mit der  $x_1x_2$ -Ebene sowie ihren Abstand  $d$  zur  $x_3$ -Achse. [ Teilergebnis:  $\frac{20}{\sqrt{41}}$  ]  
b) Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt des Dreiecks  $ABC$  nicht kleiner als 10 ist.  
c) Untersuchen Sie, für welche der zulässigen Werte von  $t$  das Dreieck  $ABC$  rechtwinklig ist.

Ferner ist der Punkt  $S(0|0|6)$  gegeben.  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  sind die Spurpunkte der Geraden  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$  in der Koordinatenebene  $x_3 = 0$ .

2. a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte  $A'$ ,  $B'$  und  $C'$ . [ Teilergebnis:  $A'(6|0|0)$ ,  $B'(0|6|0)$  ]  
b) Legen Sie ein Koordinatensystem an (ganze Seite; Querformat; Koordinatenursprung in der Blattmitte). Tragen Sie darin die Pyramide  $A'B'C'S$  und das Dreieck  $ABC$  für  $t = 3$  ein.  
c) Berechnen Sie den Winkel, den die Ebene  $ABC$  für  $t = 3$  mit der  $x_1x_2$ -Ebene bildet.  
d) Ermitteln Sie den Wert von  $t$ , für den das Dreieck  $ABC$  die Pyramide  $A'B'C'S$  in zwei volumengleiche Teile zerlegt.
3. Der Schnittpunkt von  $AB$  mit  $A'B'$  heißt  $P$ , der von  $AC$  mit  $A'C'$  bzw.  $BC$  mit  $B'C'$  heißt  $Q_t$  bzw.  $R_t$  ( $t \neq 1$  und  $t \neq 2$ ).
  - a) Bringen Sie für  $t = 3$  die genannten Geraden in Ihrer Zeichnung zum Schnitt.
  - b) In Ihrer Zeichnung sollten  $P$ ,  $Q_3$ ,  $R_3$  auf einer Geraden liegen. Warum liegen die Punkte  $P$ ,  $Q_t$ ,  $R_t$  stets auf einer Geraden  $s_t$ ? (Begründung ohne Rechnung genügt.)  
Beschreiben Sie, welcher besonderen Lage sich die Geraden  $s_t$  für  $t \rightarrow 1$  bzw. für  $t \rightarrow 2$  nähern und geben Sie jeweils eine Gleichung der zugehörigen Grenzgeraden an.

# Ebenenschar-Aufgabe    Abiturprüfung LK Bayern 2003    Lösungen

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte  $A(5 | 0 | 1)$ ,  $B(0 | 4 | 2)$  und  $C(0 | 0 | t)$  mit  $0 < t < 6$  gegeben.

1. a) Berechnen Sie für die Gerade  $AB$  den Schnittpunkt mit der  $x_1x_2$ -Ebene sowie ihren Abstand  $d$  zur  $x_3$ -Achse.

$$D(10 | -4 | 0) \quad \left[ \text{Teilergebnis: } \frac{20}{\sqrt{41}} \right] \quad \text{Abstand windschiefer Geraden}$$

- b) Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt des Dreiecks  $ABC$  nicht kleiner als 10 ist.

$$F_{ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB}| \cdot h = \frac{1}{2} \sqrt{42} \cdot h$$

$$h_{\min} = \frac{20}{\sqrt{41}} \implies F_{ABC} > 10$$

- c) Untersuchen Sie, für welche der zulässigen Werte von  $t$  das Dreieck  $ABC$  rechtwinklig ist.

3 Möglichkeiten sind zu untersuchen.

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0 \implies t_1 = -24, \quad t_1 \notin ]0, 6[$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0 \implies t_2 = 18, \quad t_2 \notin ]0, 6[$$

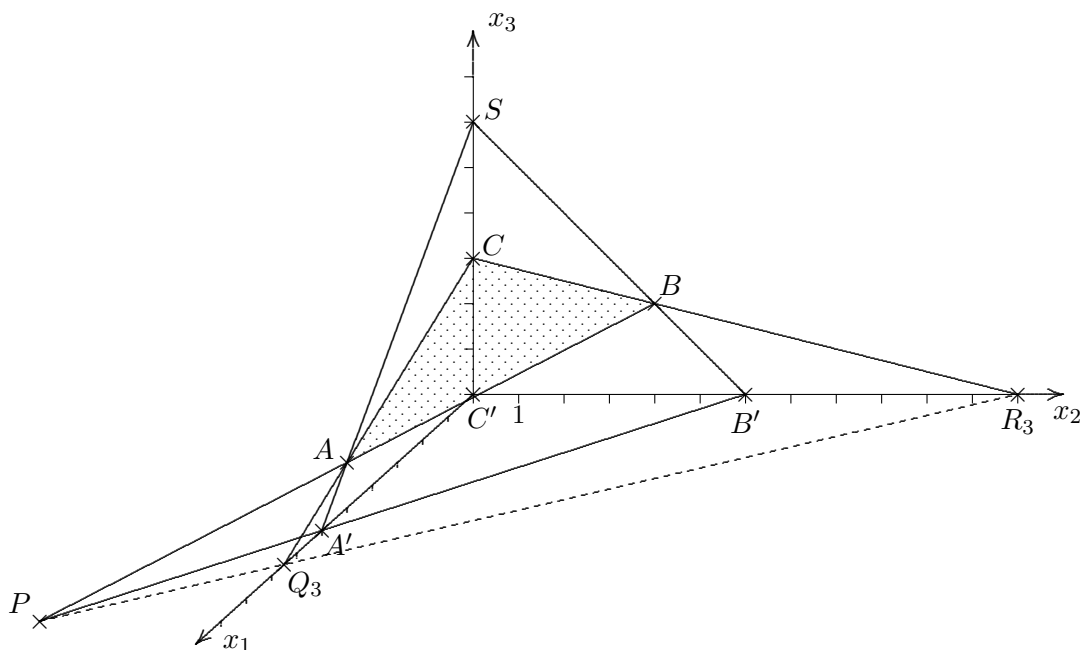
$$\vec{AC} \cdot \vec{BC} = 0 \implies (t-1)(t-2) = 0, \quad t_3 = 1, \quad t_4 = 2, \quad t_3, t_4 \in ]0, 6[$$

Ferner ist der Punkt  $S(0 | 0 | 6)$  gegeben.  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  sind die Spurpunkte der Geraden  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$  in der Koordinatenebene  $x_3 = 0$ .

2. a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte  $A'$ ,  $B'$  und  $C'$ .

$$\left[ \text{Teilergebnis: } A'(6 | 0 | 0), B'(0 | 6 | 0) \right] \quad C'(0 | 0 | 0)$$

- b) Legen Sie ein Koordinatensystem an (ganze Seite; Querformat; Koordinatenursprung in der Blattmitte). Tragen Sie darin die Pyramide  $A'B'C'S$  und das Dreieck  $ABC$  für  $t = 3$  ein.



c) Berechnen Sie den Winkel, den die Ebene  $ABC$  für  $t = 3$  mit der  $x_1x_2$ -Ebene bildet.

$$\vec{n}_{ABC} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 20 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 25,3^\circ$$

d) Ermitteln Sie den Wert von  $t$ , für den das Dreieck  $ABC$  die Pyramide  $A'B'C'S$  in zwei volumengleiche Teile zerlegt.

$$V_{A'B'C'S} = 36 \text{ VE} \quad (\text{elementar})$$

$$V_{ABCS} = \frac{1}{6} |\det(\vec{b} - \vec{a}, \vec{s} - \vec{a}, \vec{c} - \vec{a})| = 20 - \frac{10}{3}t \implies t = \frac{3}{5}$$

3. Der Schnittpunkt von  $AB$  mit  $A'B'$  heißt  $P$ , der von  $AC$  mit  $A'C'$  bzw.  $BC$  mit  $B'C'$  heißt  $Q_t$  bzw.  $R_t$  ( $t \neq 1$  und  $t \neq 2$ ).

a) Bringen Sie für  $t = 3$  die genannten Geraden in Ihrer Zeichnung zum Schnitt.

b) In Ihrer Zeichnung sollten  $P, Q_3, R_3$  auf einer Geraden liegen. Warum liegen die Punkte  $P, Q_t, R_t$  stets auf einer Geraden  $s_t$ ? (Begründung ohne Rechnung genügt.)

Beschreiben Sie, welcher besonderen Lage sich die Geraden  $s_t$  für  $t \rightarrow 1$  bzw. für  $t \rightarrow 2$  nähern und geben Sie jeweils eine Gleichung der zugehörigen Grenzgeraden an.

$P, Q_t, R_t$  liegen auf der Schnittgeraden von  $E_{ABS}$  und  $x_1x_2$ -Ebene.

$$E_{ABC}: \begin{pmatrix} 4(t-1) \\ 5(t-2) \\ 20 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 20t = 0$$

$$t = 1, \quad \text{Schnitt von } E_{ABC}: \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 4 = 0 \text{ mit der } x_1x_2\text{-Ebene } x_3 = 0 \text{ ergibt}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$t = 2, \quad \text{Schnitt von } E_{ABC}: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 10 = 0 \text{ mit der } x_1x_2\text{-Ebene } x_3 = 0 \text{ ergibt}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diese beiden Fälle ergeben sich, wenn  $C$  die Höhe (den  $z$ -Wert) von  $A$  bzw  $B$  erreicht.

In dieser Aufgabe gibt es eine ansprechende enge Beziehung von Anschauung und Rechnung.

Leider steigt bei einem allgemeinen Ansatz in 3b) der Rechenaufwand ins Uferlose.

Statt  $C$  sollte es besser  $C_t$  heißen.