

Würfel­flächen Abiturprüfung LK Bayern 2005

Gegeben ist die Ebenenschar

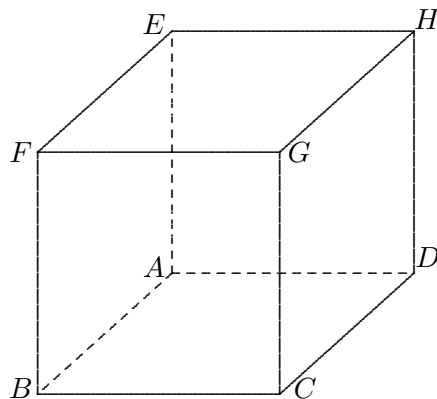
$$Z_a: \vec{x} = \overrightarrow{OD} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} a \\ 2a-4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } D(-2 \mid 0 \mid -2) \text{ und } \lambda, \tau, a \in \mathbb{R}.$$

1. a) Alle Scharebenen haben eine Gerade gemeinsam, die mit g bezeichnet wird. Geben Sie eine Gleichung von g an.
- b) Zeigen Sie, dass $Z_a: (4a - 10) \cdot x_1 - (2a + 4) \cdot x_2 + (5a - 8) \cdot x_3 + 18a - 36 = 0$ eine weitere mögliche Gleichung für die Ebenenschar Z_a ist.
- c) Berechnen Sie, für welchen Wert des Parameters a die zugehörige Scharebene senkrecht auf der Scharebene Z_1 steht.
- d) Zeigen Sie, dass die Scharebene Z_2 eine winkelhalbierende Ebene der beiden zueinander senkrechten Scharebenen Z_1 und Z_4 ist.

2. Der Punkt $M(-1 \mid 1 \mid 3)$ ist Mittelpunkt einer Kugel mit Radius $3\sqrt{3}$.
 - a) Zeigen Sie, dass der Punkt D auf dieser Kugel liegt, und berechnen Sie die Koordinaten des Kugelpunkts F , für den $[FD]$ ein Durchmesser der Kugel ist. [Ergebnis: $F(0 \mid 2 \mid 8)$]
 - b) Bestimmen Sie die Koordinaten der Kugelpunkte, die auf der Geraden g liegen. [Ergebnis: D und $H(-6 \mid 2 \mid 2)$]
 - c) Berechnen Sie die Längen \overline{DH} und \overline{HF} und begründen Sie, dass man die drei Punkte D, F und H zu einem Würfel $ABCDEFGH$ wie in der Abbildung ergänzen kann.

- d) Zeigen Sie, dass das Dreieck DHF in der Ebene Z_2 liegt. Begründen Sie ohne Rechnung nur mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse, warum Z_1 und Z_4 je eine Würfel­fläche enthalten.

- e) Der Eckpunkt G liegt in Z_4 (Nachweis nicht erforderlich). Berechnen Sie die Koordinaten von G .



Würfel­flächen Abiturprüfung LK Bayern 2005 Lösungen

Gegeben ist die Ebenenschar

$$Z_a: \vec{x} = \overrightarrow{OD} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} a \\ 2a-4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } D(-2 | 0 | -2) \text{ und } \lambda, \tau, a \in \mathbb{R}.$$

1. a) Alle Scharebenen haben eine Gerade gemeinsam, die mit g bezeichnet wird. Geben Sie eine Gleichung von g an.

$$g: \vec{x} = \overrightarrow{OD} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- b) Zeigen Sie, dass

$$Z_a: (4a - 10) \cdot x_1 - (2a + 4) \cdot x_2 + (5a - 8) \cdot x_3 + 18a - 36 = 0$$

eine weitere mögliche Gleichung für die Ebenenschar Z_a ist.

Kreuzprodukt

- c) Berechnen Sie, für welchen Wert des Parameters a die zugehörige Scharebene senkrecht auf der Scharebene Z_1 steht.

$$\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \implies a = 4$$

- d) Zeigen Sie, dass die Scharebene Z_2 eine winkelhalbierende Ebene der beiden zueinander senkrechten Scharebenen Z_1 und Z_4 ist.

$$Z_1: \frac{1}{3}(-2x_1 - 2x_2 - x_3 - 6) = 0$$

$$Z_4: \frac{1}{3}(-x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 6) = 0$$

$$\text{Winkelhalbierende: } \frac{1}{3}(-2x_1 - 2x_2 - x_3 - 6) \pm \frac{1}{3}(-x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 6) = 0$$

$$W_1: x_1 + x_3 + 4 = 0$$

$$W_2: x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \quad Z_2 = W_2$$

2. Der Punkt $M(-1 | 1 | 3)$ ist Mittelpunkt einer Kugel mit Radius $3\sqrt{3}$.

- a) Zeigen Sie, dass der Punkt D auf dieser Kugel liegt, und berechnen Sie die Koordinaten des Kugelpunkts F , für den $[FD]$ ein Durchmesser der Kugel ist. [Ergebnis: $F(0 | 2 | 8)$]

$$|\overrightarrow{MD}| = 3\sqrt{3}, \quad \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{DM}$$

- b) Bestimmen Sie die Koordinaten der Kugelpunkte, die auf der Geraden g liegen.

$$\text{Schnitt } \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2 \quad [\text{Ergebnis: } D \text{ und } H(-6 | 2 | 2)]$$

- c) Berechnen Sie die Längen \overline{DH} und \overline{HF} und begründen Sie, dass man die drei Punkte D , F und H zu einem Würfel $ABCDEFGH$ wie in der Abbildung ergänzen kann.

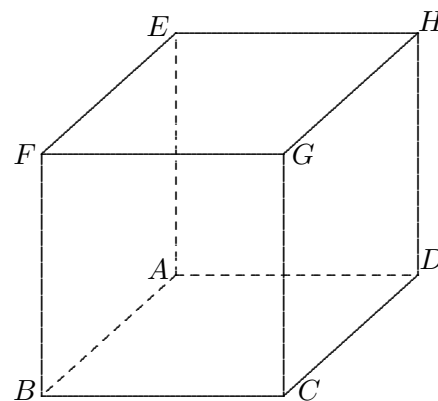
$$\overline{DH} = 6, \quad \overline{HF} = 6\sqrt{2} \quad (\text{Diagonale}), \quad \overrightarrow{DH} \perp \overrightarrow{HF}$$

(Dem Würfel ist die Kugel umschrieben.)

- d) Zeigen Sie, dass das Dreieck DHF in der Ebene Z_2 liegt. Begründen Sie ohne Rechnung nur mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse, warum Z_1 und Z_4 je eine Würfel­fläche enthalten.

Nachweis: $F \in Z_2$, D und H liegen auf g

beachte: Z_2 winkelhalbierende Ebene



- e) Der Eckpunkt G liegt in Z_4 (Nachweis nicht erforderlich). Berechnen Sie die Koordinaten von G .

Lotgerade zu Z_4 durch F schneidet Z_4 in $G(-2 | 6 | 4)$

Rollende Kugel

Abiturprüfung LK Bayern 2005

In einem kartesischen Koordinatensystem ist die Geradenschar

$$g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a+2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } a, \lambda \in \mathbb{R} \text{ gegeben.}$$

Die Punkte $A(10|0|0)$, $B(0|5|0)$ und $C(0|0|5)$ bestimmen eine Ebene, die mit E bezeichnet wird.

1. a) Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform.
[mögliches Ergebnis: $E: x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 10 = 0$]
b) Berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen der Geraden g_{-1} und der Ebene E .
c) Zeigen Sie, dass die Gerade g_{-2} in der Ebene E liegt und echt parallel zur Geraden AB ist.
2. a) Der Punkt C wird an der Geraden AB gespiegelt.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Spiegelpunkts C^* . [Ergebnis: $C^*(4|8|-5)$]
b) Weisen Sie nach, dass das Drachenviereck AC^*BC den Flächeninhalt 75 hat.
c) Die Gerade g_{-2} schneidet die Strecke $[AC]$ im Punkt $A'(8|0|1)$ und zerlegt das Dreieck ABC in zwei Teile (Nachweis nicht erforderlich). Berechnen Sie das Verhältnis der Flächeninhalte dieser beiden Teile.

3. In der Ebene $H: x_3 = 3$ liegen zwei parallele Schienen s_1 und s_2 . Die Schiene s_1 wird durch die Gerade

$$s_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \tau \in \mathbb{R}$$

dargestellt. Auf den Schienen s_1 und s_2 ruht eine Kugel mit dem Mittelpunkt $M(18|28|5)$ und dem Radius $r = 3$.

- a) Berechnen Sie die Koordinaten des Punkts S , in dem die Kugel die Schiene s_1 berührt.
[Ergebnis: $S(20|27|3)$]
- b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Schiene s_2 .
- c) Die Kugel wird nun angestoßen und rollt auf die Ebene E zu. Geben Sie eine Gleichung der Geraden m an, auf der sich dabei der Mittelpunkt der Kugel bewegt.
Begründen Sie, weshalb der Punkt, in dem die Kugel schließlich die Ebene E berührt, nicht mit dem Schnittpunkt von m und E zusammenfällt.

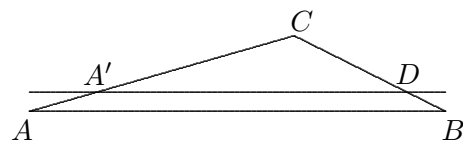
Rollende Kugel Abiturprüfung LK Bayern 2005 Lösungen

In einem kartesischen Koordinatensystem ist die Geradenschar

$$g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a+2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } a, \lambda \in \mathbb{R} \text{ gegeben.}$$

Die Punkte $A(10|0|0)$, $B(0|5|0)$ und $C(0|0|5)$ bestimmen eine Ebene, die mit E bezeichnet wird.

1. a) Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform.
[mögliches Ergebnis: $E: x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 10 = 0$]
- b) Berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen der Geraden g_{-1} und der Ebene E . $\alpha = 35,3^\circ$
- c) Zeigen Sie, dass die Gerade g_{-2} in der Ebene E liegt und echt parallel zur Geraden AB ist.
 $\vec{n}_{g_{-2}} \perp \vec{n}_E \implies g_{-2} \parallel E$
 $P(4|2|1) \in E$
oder 2 Punkte von g_{-2} liegen auf E
2. a) Der Punkt C wird an der Geraden AB gespiegelt.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Spiegelpunkts C^* . [Ergebnis: $C^*(4|8|-5)$]
Fußpunkt F , $\vec{CF} \perp \vec{AB} \implies \tau = 4$
- b) Weisen Sie nach, dass das Drachenviereck AC^*BC den Flächeninhalt 75 hat.
 $\frac{1}{2} |\vec{AB}| \cdot |\vec{CC^*}| = 75$
- c) Die Gerade g_{-2} schneidet die Strecke $[AC]$ im Punkt $A'(8|0|1)$ und zerlegt das Dreieck ABC in zwei Teile (Nachweis nicht erforderlich). Berechnen Sie das Verhältnis der Flächeninhalte dieser beiden Teile.



$$\begin{aligned} \overline{CA'} : \overline{CA} = 4 : 5 &\implies A_{A'DC} : A_{ABC} = 4^2 : 5^2 \\ &\implies A_{A'DC} : A_{ABDA'} = 16 : 9 \end{aligned}$$

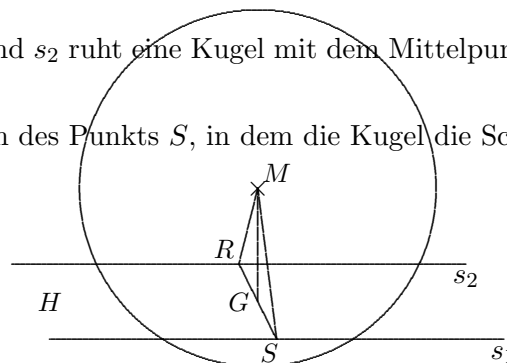
(betrachte geeignete Flächeneinheiten)

3. In der Ebene $H: x_3 = 3$ liegen zwei parallele Schienen s_1 und s_2 . Die Schiene s_1 wird durch die Gerade

$$s_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \tau \in \mathbb{R}$$

dargestellt. Auf den Schienen s_1 und s_2 ruht eine Kugel mit dem Mittelpunkt $M(18|28|5)$ und dem Radius $r = 3$.

- a) Berechnen Sie die Koordinaten des Punkts S , in dem die Kugel die Schiene s_1 berührt.
[Ergebnis: $S(20|27|3)$]
 $\vec{MS} \perp s_1 \implies \tau = 13$



- b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Schiene s_2 . $G(18|28|3)$ (senkrechte Projektion von M auf H)
 $\vec{OR} = \vec{OG} + \vec{SG}$, $s_2: \vec{x} = \vec{OR} + \vec{u}_{s_1}$
- c) Die Kugel wird nun angestoßen und rollt auf die Ebene E zu. Geben Sie eine Gleichung der Geraden m an, auf der sich dabei der Mittelpunkt der Kugel bewegt. $m: \vec{x} = \vec{OM} + \vec{u}_{s_1}$
Begründen Sie, weshalb der Punkt, in dem die Kugel schließlich die Ebene E berührt, nicht mit dem Schnittpunkt von m und E zusammenfällt. $m \not\perp E$