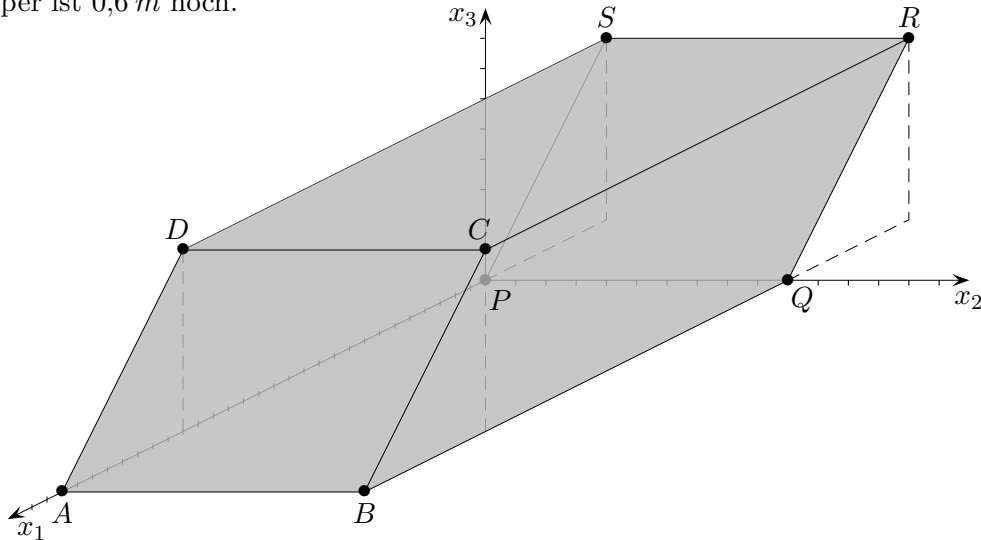


## Spat-Aufgabe    Bayern 2013

Ein auf einer horizontalen Fläche stehendes Kunstwerk besitzt einen Grundkörper aus massiven Beton, der die Form eines Spats hat. Alle Seitenflächen eines Spats sind Parallelogramme. In einem Modell lässt sich der Grundkörper durch einen Spat  $ABCDPQRS$  mit  $A(28 | 0 | 0)$ ,  $B(28 | 10 | 0)$ ,  $D(20 | 0 | 6)$  und  $P(0 | 0 | 0)$  beschreiben (vgl. Abbildung). Die rechteckige Grundfläche  $ABQP$  liegt in der  $x_1x_2$ -Ebene. Im Koordinatensystem entspricht eine Längeneinheit  $0,1 \text{ m}$ , d. h. der Grundkörper ist  $0,6 \text{ m}$  hoch.



- a) Geben Sie die Koordinaten des Punkts  $C$  an und zeigen Sie, dass die Seitenfläche  $ABCD$  ein Quadrat ist.
- b) Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene  $E$ , in der die Seitenfläche  $ABCD$  liegt, in Normalenform.  
[ mögliches Ergebnis:  $E: 3x_1 + 4x_3 - 84 = 0$  ]
- c) Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem die Seitenfläche  $ABCD$  gegen die  $x_1x_2$ -Ebene geneigt ist.
- d) Die Seitenfläche  $PQRS$  liegt in einer Ebene  $F$ . Bestimmen Sie, ohne zu rechnen, eine Gleichung von  $F$  in Normalenform; erläutern Sie Ihr Vorgehen.
- e) Machen Sie plausibel, dass das Volumen des Spats mithilfe der Formel  $V = G \cdot h$  berechnet werden kann, wobei  $G$  der Flächeninhalt des Rechtecks  $ABQP$  und  $h$  die zugehörige Höhe des Spats ist.
- f) Ein Kubikmeter des verwendeten Betons besitzt eine Masse von  $2,1 \text{ t}$ . Berechnen Sie die Masse des Grundkörpers.

Der Grundkörper ist mit einer dünnen geradlinigen Bohrung versehen, die im Modell vom Punkt  $H(11 | 3 | 6)$ , der Deckfläche  $DCRS$  aus in Richtung des Schnittpunkts der Diagonalen der Grundfläche verläuft. In der Bohrung ist eine gerade Stahlstange mit einer Länge von  $1,4 \text{ m}$  so befestigt, dass die Stange zu drei Vierteln ihrer Länge aus der Deckfläche herausragt.

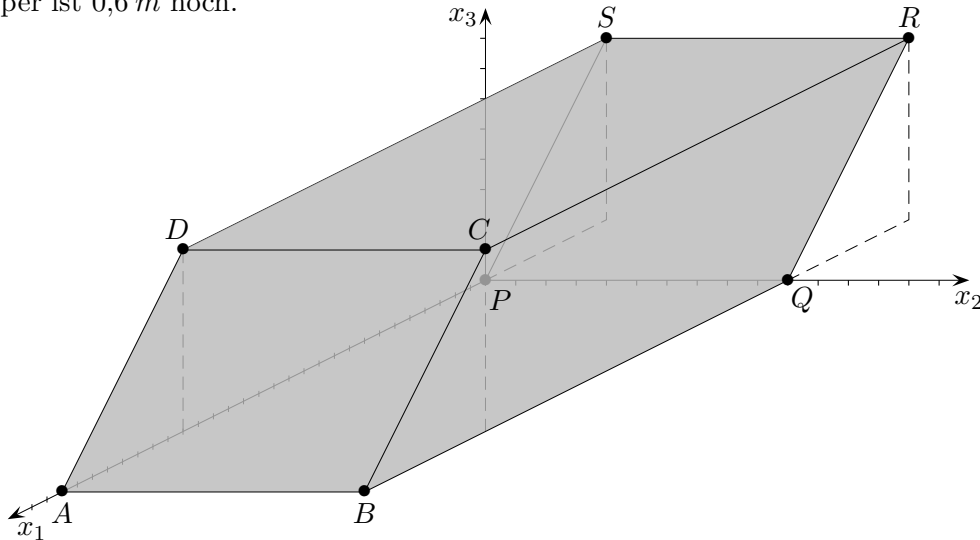
- g) Bestimmen Sie im Modell eine Gleichung der Geraden  $h$ , entlang derer die Bohrung verläuft, sowie die Koordinaten des Punkts, in dem die Stange in der Bohrung endet.

[ möglicher Richtungsvektor von  $h$ :  $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$  ]

- h) Auf der Deckfläche des Grundkörpers liegt eine Stahlkugel mit einem Radius von  $0,8 \text{ m}$ . Im Modell berührt die Kugel die Deckfläche des Spats im Punkt  $K$ . Beschreiben Sie, wie man im Modell rechnerisch überprüfen könnte, ob die Stahlkugel die Stange berührt, wenn die Koordinaten von  $K$  bekannt wären.

## Spat-Aufgabe Bayern 2013

Ein auf einer horizontalen Fläche stehendes Kunstwerk besitzt einen Grundkörper aus massiven Beton, der die Form eines Spats hat. Alle Seitenflächen eines Spats sind Parallelogramme. In einem Modell lässt sich der Grundkörper durch einen Spat  $ABCDPQRS$  mit  $A(28 | 0 | 0)$ ,  $B(28 | 10 | 0)$ ,  $D(20 | 0 | 6)$  und  $P(0 | 0 | 0)$  beschreiben (vgl. Abbildung). Die rechteckige Grundfläche  $ABQP$  liegt in der  $x_1x_2$ -Ebene. Im Koordinatensystem entspricht eine Längeneinheit  $0,1 \text{ m}$ , d. h. der Grundkörper ist  $0,6 \text{ m}$  hoch.



- Geben Sie die Koordinaten des Punkts  $C$  an und zeigen Sie, dass die Seitenfläche  $ABCD$  ein Quadrat ist.  $C(20 | 10 | 6)$
- Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene  $E$ , in der die Seitenfläche  $ABCD$  liegt, in Normalenform.   
 [ mögliches Ergebnis:  $E: 3x_1 + 4x_3 - 84 = 0$  ]
- Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem die Seitenfläche  $ABCD$  gegen die  $x_1x_2$ -Ebene geneigt ist.  $\alpha = 36,9^\circ$
- Die Seitenfläche  $PQRS$  liegt in eine Ebene  $F$ . Bestimmen Sie, ohne zu rechnen, eine Gleichung von  $F$  in Normalenform; erläutern Sie Ihr Vorgehen.  $3x_1 + 4x_3 = 0$
- Machen Sie plausibel, dass das Volumen des Spats mithilfe der Formel  $V = G \cdot h$  berechnet werden kann, wobei  $G$  der Flächeninhalt des Rechtecks  $ABQP$  und  $h$  die zugehörige Höhe des Spats ist.   
 Der Spat ist ein gescherter Quader.
- Ein Kubikmeter des verwendeten Betons besitzt eine Masse von  $2,1 \text{ t}$ . Berechnen Sie die Masse des Grundkörpers.   
  $V = 1 \cdot 2,8 \cdot 0,6 \text{ m}^3 = 1,68 \text{ m}^3$ ,  $m = 3,528 \text{ t}$

Der Grundkörper ist mit einer dünnen geradlinigen Bohrung versehen, die im Modell vom Punkt  $H(11 | 3 | 6)$ , der Deckfläche  $DCRS$  aus in Richtung des Schnittpunkts der Diagonalen der Grundfläche verläuft. In der Bohrung ist eine gerade Stahlstange mit einer Länge von  $1,4 \text{ m}$  so befestigt, dass die Stange zu drei Vierteln ihrer Länge aus der Deckfläche herausragt.

- Bestimmen Sie im Modell eine Gleichung der Geraden  $h$ , entlang derer die Bohrung verläuft, sowie die Koordinaten des Punkts, in dem die Stange in der Bohrung endet.

[ möglicher Richtungsvektor von  $h$ :  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$  ],  $\frac{1}{4} \cdot 1,4 \cdot 10 = 3,5$

$$\vec{OT} = \vec{OH} + 3,5 \cdot \vec{n}$$

$T(12,5 | 4 | 3)$

- h) Auf der Deckfläche des Grundkörpers liegt eine Stahlkugel mit einem Radius von  $0,8\text{ m}$ . Im Modell berührt die Kugel die Deckfläche des Spats im Punkt  $K$ . Beschreiben Sie, wie man im Modell rechnerisch überprüfen könnte, ob die Stahlkugel die Stange berührt, wenn die Koordinaten von  $K$  bekannt wären.

Kugelmittelpunkt  $M$  mit  $K$  und dem Radius ermitteln

Berührbedingung:  $d(M, h) = 8$

Die Stangenspitze befindet sich  $9\text{ LE}$  über der Deckfläche,  
daher verläuft die Stange tangential.