Reflektierter Lichtstrahl   Abiturprüfung LK Bayern 2014

In einem kartesischen Koordinatensystem legen die Punkte $A(4 \mid 0 \mid 0)$, $B(0 \mid 4 \mid 0)$ und $C(0 \mid 0 \mid 4)$ das Dreieck ABC fest, das in der Ebene $E\colon x_1 + x_2 + x_3 = 4$ liegt.

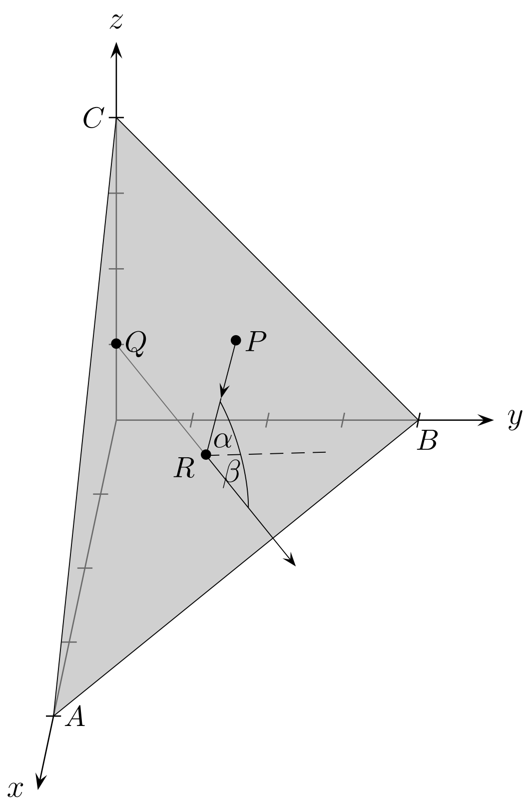
a) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

Das Dreieck ABC stellt modellhaft einen Spiegel dar. Der Punkt $P(2 \mid 2 \mid 3)$ gibt im Modell die Position einer Lichtquelle an, von der ein Lichtstrahl ausgeht.
Die Richtung dieses Lichtstrahls wird im Modell durch den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ beschrieben.

b) Geben Sie eine Gleichung der Geraden g an, entlang derer der Lichtstrahl im Modell verläuft. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts R, in dem g die Ebene E schneidet, und begründen Sie, dass der Lichtstrahl auf dem dreieckigen Spiegel auftrifft.

$\left[\text{ zur Kontrolle: } R(1{,}5 \mid 1{,}5 \mid 1)\ \right]$

Der einfallende Lichtstrahl wird in demjenigen Punkt des Spiegels reflektiert, der im Modell durch den Punkt R dargestellt wird. Der reflektierte Lichtstrahl geht für einen Beobachter scheinbar von einer Lichtquelle aus, deren Position im Modell durch den Punkt $Q(0 \mid 0 \mid 1)$ beschrieben wird (vgl. Abbildung).



c) Zeigen Sie, dass die Punkte P und Q bezüglich der Ebene E symmetrisch sind.

Das Lot zur Ebene E im Punkt R wird als Einfallslot bezeichnet.

d) Die beiden Geraden, entlang derer der einfallende und der reflektierte Lichtstrahl im Modell verlaufen, liegen in einer Ebene F. Ermitteln Sie eine Gleichung von F in Normalenform. Weisen Sie nach, dass das Einfallslot ebenfalls in der Ebene F liegt.

[mögliches Teilergebnis: $F\colon x_1 - x_2 = 0$]

e) Zeigen Sie, dass die Größe des Winkels β zwischen reflektiertem Lichtstrahl und Einfallslot mit der Größe des Winkels α zwischen einfallendem Lichtstrahl und Einfallslot übereinstimmt.

Reflektierter Lichtstrahl Abiturprüfung LK Bayern 2014

In einem kartesischen Koordinatensystem legen die Punkte $A(4\,|\,0\,|\,0)$, $B(0\,|\,4\,|\,0)$ und $C(0\,|\,0\,|\,4)$ das Dreieck ABC fest, das in der Ebene E: $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ liegt.

a) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC. $A = 8\sqrt{3}$

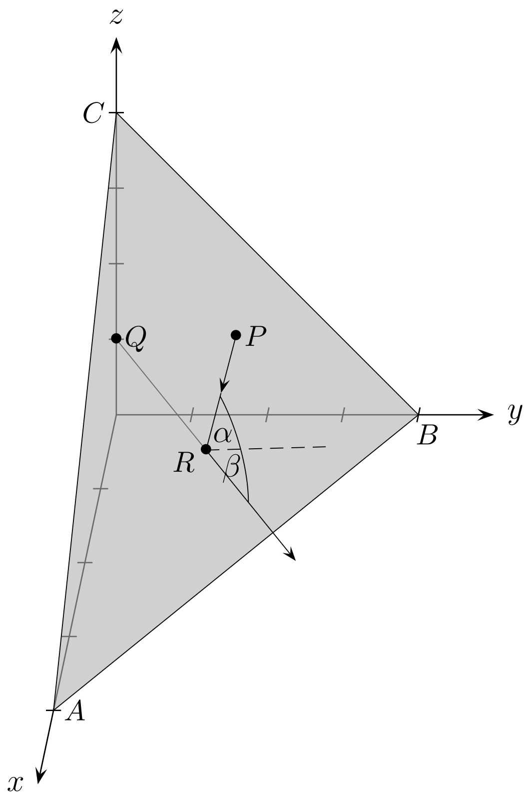
Das Dreieck ABC stellt modellhaft einen Spiegel dar. Der Punkt $P(2\,|\,2\,|\,3)$ gibt im Modell die Position einer Lichtquelle an, von der ein Lichtstrahl ausgeht.
Die Richtung dieses Lichtstrahls wird im Modell durch den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ beschrieben.

b) Geben Sie eine Gleichung der Geraden g an, entlang derer der Lichtstrahl im Modell verläuft. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts R, in dem g die Ebene E schneidet, und begründen Sie, dass der Lichtstrahl auf dem dreieckigen Spiegel auftrifft.

[zur Kontrolle: $R(1{,}5\,|\,1{,}5\,|\,1)$]

An den x- und y-Koordinaten von R ist zu erkennen, dass der Lichtstrahl auf den Spiegel trifft.

Der einfallende Lichtstrahl wird in demjenigen Punkt des Spiegels reflektiert, der im Modell durch den Punkt R dargestellt wird. Der reflektierte Lichtstrahl geht für einen Beobachter scheinbar von einer Lichtquelle aus, deren Position im Modell durch den Punkt $Q(0\,|\,0\,|\,1)$ beschrieben wird (vgl. Abbildung).



c) Zeigen Sie, dass die Punkte P und Q bezüglich der Ebene E symmetrisch sind.

$\overrightarrow{PQ} \perp E$

Für den Mittelpunkt $M(1 \mid 1 \mid 2)$ der Strecke $\overline{PQ}$ gilt: $M \in E$.

Das Lot zur Ebene E im Punkt R wird als Einfallslot bezeichnet.

d) Die beiden Geraden, entlang derer der einfallende und der reflektierte Lichtstrahl im Modell verlaufen, liegen in einer Ebene F. Ermitteln Sie eine Gleichung von F in Normalenform. Weisen Sie nach, dass das Einfallslot ebenfalls in der Ebene F liegt.

[mögliches Teilergebnis: $F\colon x_1 - x_2 = 0$]

Richtungsvektor des reflektierten Strahls: $\overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$

e) Zeigen Sie, dass die Größe des Winkels β zwischen reflektiertem Lichtstrahl und Einfallslot mit der Größe des Winkels α zwischen einfallendem Lichtstrahl und Einfallslot übereinstimmt.

Richtungsvektor des Einfallslots (siehe E): $\overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\alpha = \beta = 35{,}3°$