Vorabiturklausur 2018 Hilfsmittelfreier Teil Name

1. Bestimmen Sie a so, dass die Punkte $A(2\,|\,a\,|\,-1)$ und $B(3\,|\,1\,|\,a)$ voneinander den Abstand 5 haben.

2. Gegeben sind die Funktionen $f_a(x) = -a \cdot x \cdot (x-a)$, wobei $x \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ gilt.

   a) Geben Sie die Nullstellen der Funktionen f_a an.

   b) Bestimmen Sie denjenigen Wert von a, für den $\int_0^a f_a(x)\,dx = \frac{8}{3}$ gilt.

3. Gegeben sind die Ebene $E\colon\ 2x + y - z - 4 = 0$ sowie der Punkt $P(-3\,|\,0\,|\,2)$.

   a) Zeigen Sie, dass der Punkt P nicht in der Ebene E liegt.

   b) Spiegelt man den Punkt P an der Ebene E, so erhält man den Punkt P'.
   Ermitteln Sie die Koordinaten von P'.

4. Der Graph einer kubischen Funktion soll die beiden Extrempunkte $E_1(-1\,|\,1)$ und $E_2(1\,|\,-1)$ haben. Ermitteln Sie die Funktionsgleichung.

5. Ein Glücksrad ist in 2 Sektoren mit den Zahlen 0 und 1 eingeteilt.
   Das Glücksrad wird dreimal gedreht. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens einmal die Eins auftritt, beträgt 0,992.
   Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer Drehung die Eins erscheint.
   Wie groß ist der Winkel des Sektors für die Eins?

Vorabiturklausur 2018 Name

1. Gegeben ist die Funktionenschar $f_a(x) = x^2 \cdot e^{-ax},\ a > 0$.
   Die zugehörigen Graphen sind G_a.

   a) Skizzieren Sie $G_{0,2}$ für $0 \leq x \leq 40$.

      Berechnen Sie denjenigen Wert von a, für den der Punkt $P\left(1 \mid \frac{1}{2}\right)$ auf G_a liegt.

      Bestimmen Sie die Koordinaten und die Art der Extrempunkte von G_a in Abhängigkeit von a.

      [zur Kontrolle: Die Extremstellen von f_a sind 0 und $\frac{2}{a}$.]

      Untersuchen Sie, ob die Extrempunkte von G_a für alle Werte von a auf dem Graphen der Funktion $g(x) = \dfrac{x^2}{e^2}$ liegen.

   b) Für jeden Wert von b mit $b > 0$ sind die Punkte $A(0 \mid 0)$ und $B(b \mid 0)$ sowie der Punkt $C(b \mid f_{0,2}(b))$ gegeben.

      Skizzieren Sie ein mögliches Dreieck ABC in Ihre Skizze aus Teilaufgabe a).

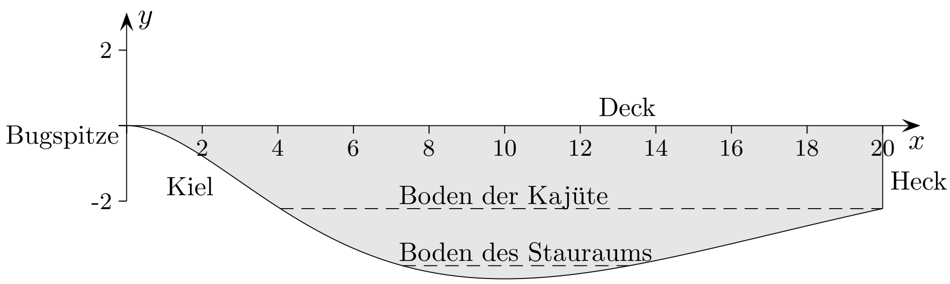
      Bestimmen Sie denjenigen Wert von b, für den der Flächeninhalt des Dreiecks ABC maximal ist.

      Der Graph $G_{0,2}$, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = p$ mit $p > 0$ schließen im ersten Quadranten ein Flächenstück ein. Eine Stammfunktion von $f_{0,2}$ lautet

      $$F(x) = (-5x^2 - 50x - 250) \cdot e^{-0,2x}$$

      Weisen Sie ohne GTR-Einsatz nach, dass der Inhalt dieses Flächenstücks für alle Werte von p kleiner als 250 ist.

   Die Abbildung zeigt schematisch den Längsschnitt eines Schiffs.
   Die Kiellinie wird modellhaft durch $k(x) = -0,3 \cdot x^2 \cdot e^{-0,2x}$ für $0 \leq x \leq 20$ beschreiben.
   Dabei entspricht eine Längeneinheit einem Meter in der Wirklichkeit.

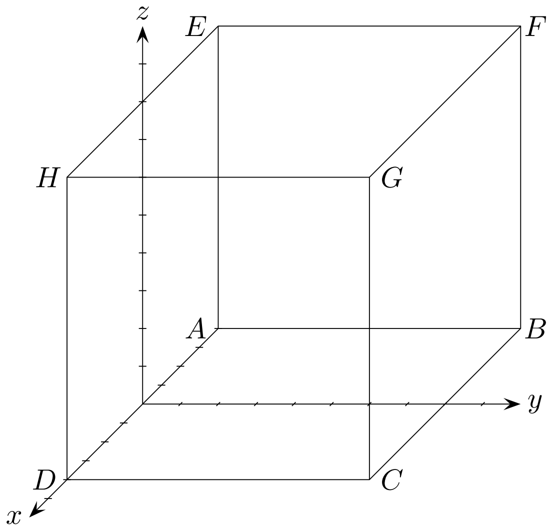


   c) Es gilt $k(x) = -0,3 \cdot f_{0,2}(x)$.
      Beschreiben Sie, wie der Graph von k aus dem Graphen von $f_{0,2}$ hervorgeht.

      Der Kiel hat in einem Punkt seinen größten Neigungswinkel gegen die Horizontale.
      Bestimmen Sie die Größe dieses Neigungswinkels.

   Der horizontal liegende Boden der Kajüte liegt 2,20 m unterhalb des Decks. Der parallel dazu verlaufende Boden des Stauraums unterhalb der Kajüte hat in Längsrichtung des Schiffs eine Länge von 6 m.

   d) Formulieren Sie (ohne Rechnung) einen Lösungsweg, wie ermittelt werden kann, wie weit der Boden des Stauraums unterhalb des Bodens der Kajüte liegt.



2. Von einem Würfel sind folgende Eckpunkte gegeben:
$B(-4\,|\,8\,|\,0)$, $C(4\,|\,8\,|\,0)$, $D(4\,|\,0\,|\,0)$
$E(-4\,|\,0\,|\,8)$, $G(4\,|\,8\,|\,8)$, $H(4\,|\,0\,|\,8)$.

   a) Geben Sie die Koordinaten des Punktes F und die Kantenlänge des Würfels an.
   Der Punkt G wird am Koordinatenursprung gespiegelt.
   Bestimmen Sie die Koordinaten des Spiegelpunktes G_1.
   Der Würfel wird so um 45° um die x-Achse gedreht, dass der Punkt G auf den Punkt G_2 mit positiver z-Koordinate abgebildet wird.
   Bestimmen Sie die Koordinaten von G_2.

   b) Der Punkt N ist ein beliebiger Punkt auf der Kante DC des Würfels.
   Untersuchen Sie, ob die Koordinaten des Punktes N so bestimmt werden können, dass das Dreieck mit den Eckpunkten E, G und N einen rechten Winkel im Punkt N hat.
   Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes P auf der Strecke $\overline{EG}$, der vom Koordinatenursprung denselben Abstand hat wie der Punkt E und von E verschieden ist.

   c) Der Punkt M ist ein beliebiger Punkt auf der Kante DC des Würfels.
   Die Punkte M, E und G bilden die Eckpunkte eines Dreiecks.
   Die Gerade h durch die Punkte H und B schneidet dieses Dreieck jeweils in einem Punkt S.
   Wenn sich M auf der Kante DC des Würfels bewegt, bewegt sich der Punkt S auf einer Strecke k.
   Geben Sie (fast ohne Rechnung) einen Punkt an, der auf k liegt.
   Formulieren Sie (ohne Rechnung) einen Lösungsweg, wie eine Parameterdarstellung für die Strecke ermittelt werden kann.

3. Ein Transportunternehmen bringt jeden Tag Zubehörteile zu einem Unternehmen. Dabei wird immer dieselbe Strecke zurückgelegt. Die dafür benötigte Zeit soll als normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 120$ Minuten und der Standardabweichung $\sigma = 15$ Minuten modelliert werden.

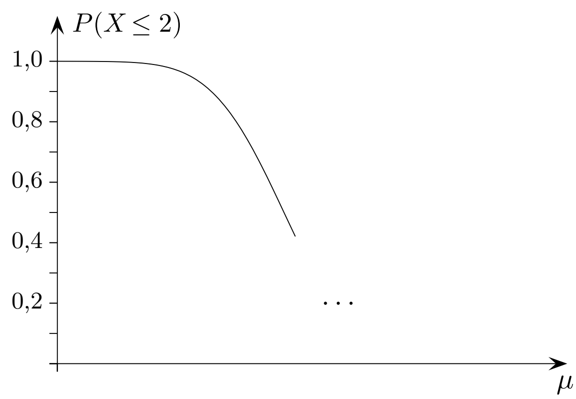
   a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Fahrer höchstens 110 Minuten Fahrzeit benötigt.

   Der Fahrer fährt um 6:00 Uhr los.
   Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit 50 % beträgt, dass der Fahrer spätestens um 8:00 Uhr beim Unternehmen eintrifft.

   Die Zubehörteile müssen spätestens um 9:00 Uhr beim Unternehmen eintreffen.
   Ermitteln Sie die Uhrzeit (auf Minuten gerundet), zu welcher der Fahrer spätestens losfahren muss, damit in mindestens 95 % aller Fälle die Lieferung rechtzeitig ankommt.

   b) Der Fahrweg beinhaltet auch eine Autobahnstrecke mit einer Geschwindigkeitsbegrenzung auf $120\,\frac{km}{h}$.
   Die gefahrene Geschwindigkeit soll als normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 125\,\frac{km}{h}$ modelliert werden. Kontrollen haben ergeben, dass auf dieser Strecke 8 % der Autofahrer schneller als $140\,\frac{km}{h}$ fahren. Bestimmen Sie, wie viel Prozent der Autofahrer nicht schneller als $120\,\frac{km}{h}$ fahren.
   Untersuchen Sie ohne Einsatz des Rechners die Auswirkung einer Verkleinerung der Standardabweichung σ auf den Anteil derjenigen Autofahrer, die nach diesem Modell schneller als $140\,\frac{km}{h}$ fahren.

   c) Unabhängig vom Sachzusammenhang wird im Folgenden eine normalverteilte Zufallsgröße X mit der Standardabweichung $\sigma = 0{,}5$ betrachtet.
   Untenstehend ist ein Teil des Graphen der Funktion zu sehen, die für jeden Wert des Erwartungswertes μ die Wahrscheinlichkeit $P(X \le 2)$ angibt.
   Zeichnen Sie auf der μ-Achse die Stelle ein, an der sich der Wert 2 befindet und begründen Sie Ihr Vorgehen.
   Skizzieren und begründen Sie den weiteren Verlauf des Graphen.



Vorabiturklausur 2018 Hilfsmittelfreier Teil Name

1. Bestimmen Sie a so, dass die Punkte $A(2\,|\,a\,|\,-1)$ und $B(3\,|\,1\,|\,a)$ voneinander den Abstand 5 haben.
   $d = \sqrt{3+2a^2},\ a = \pm\sqrt{11}$

2. Gegeben sind die Funktionen $f_a(x) = -a \cdot x \cdot (x-a)$, wobei $x \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ gilt.
   a) Geben Sie die Nullstellen der Funktionen f_a an.
   $x = 0,\ x = a$
   b) Bestimmen Sie denjenigen Wert von a, für den $\int_0^a f_a(x)\,dx = \frac{8}{3}$ gilt.
   $a^4 = 16,\ a = 2$

3. Gegeben sind die Ebene $E\colon\ 2x + y - z - 4 = 0$ sowie der Punkt $P(-3\,|\,0\,|\,2)$.
   a) Zeigen Sie, dass der Punkt P nicht in der Ebene E liegt.
   $2 \cdot (-3) - 0 - 2 - 4 = -12 \neq 0$
   b) Spiegelt man den Punkt P an der Ebene E, so erhält man den Punkt P'.
   Ermitteln Sie die Koordinaten von P'.
   $\lambda = 2,\ P'(5\,|\,4\,|\,-2)$

4. Der Graph einer kubischen Funktion soll die beiden Extrempunkte $E_1(-1\,|\,1)$ und $E_2(1\,|\,-1)$ haben. Ermitteln Sie die Funktionsgleichung.
   $f(x) = ax^3 + bx,\ f(1) = -1,\ a + b = -1$
   $3a + b = 0,\ a = 1/2,\ b = -3/2$

5. Ein Glücksrad ist in 2 Sektoren mit den Zahlen 0 und 1 eingeteilt.
   Das Glücksrad wird dreimal gedreht. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens einmal die Eins auftritt, beträgt 0,992.
   Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer Drehung die Eins erscheint.
   Wie groß ist der Winkel des Sektors für die Eins?
   $1 - q^3 = 0{,}992,\ q = 0{,}2,\ p = 0{,}8$
   $288°$

Vorabiturklausur 2018 Name

1. Gegeben ist die Funktionenschar $f_a(x) = x^2 \cdot e^{-ax}$, $a > 0$.
Die zugehörigen Graphen sind G_a.

a) Skizzieren Sie $G_{0,2}$ für $0 \le x \le 40$.

Berechnen Sie denjenigen Wert von a, für den der Punkt $P\left(1 \mid \frac{1}{2}\right)$ auf G_a liegt.

$a = -\ln(0{,}5) = \ln(2)$

Bestimmen Sie die Koordinaten und die Art der Extrempunkte von G_a in Abhängigkeit von a.

$f_a'(x) = (2x - ax^2) \cdot e^{-ax}$ $[f_a''(x) = (a^2x^2 - 4ax + 2) \cdot e^{-ax}]$, $Min(0 \mid 0)$, $Max\left(\frac{2}{a} \mid \frac{4}{e^2a^2}\right)$

Untersuchen Sie, ob die Extrempunkte von G_a für alle Werte von a auf dem Graphen der Funktion $g(x) = \frac{x^2}{e^2}$ liegen.

trifft zu

b) Für jeden Wert von b mit $b > 0$ sind die Punkte $A(0 \mid 0)$ und $B(b \mid 0)$ sowie der Punkt $C(b \mid f_{0,2}(b))$ gegeben.

Skizzieren Sie ein mögliches Dreieck ABC in Ihre Skizze aus Teilaufgabe a).

Bestimmen Sie denjenigen Wert von b, für den der Flächeninhalt des Dreiecks ABC maximal ist.

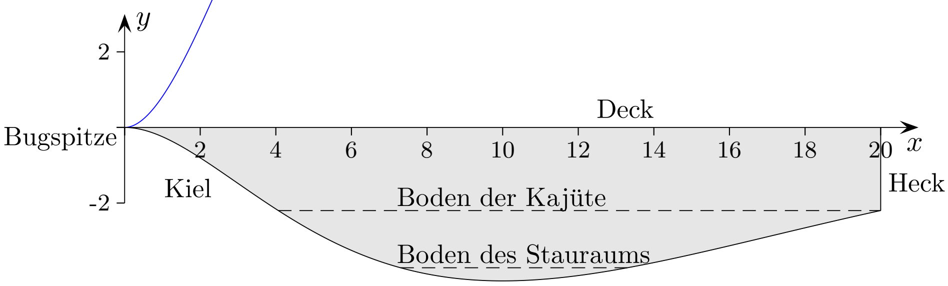
$A_\Delta = \frac{1}{2}b^3 \cdot e^{-0{,}2b}$, $b = 15$

Der Graph $G_{0,2}$, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = p$ mit $p > 0$ schließen im ersten Quadranten ein Flächenstück ein. Eine Stammfunktion von $f_{0,2}$ lautet

$$F(x) = (-5x^2 - 50x - 250) \cdot e^{-0{,}2x}$$

Weisen Sie ohne GTR-Einsatz nach, dass der Inhalt dieses Flächenstücks für alle Werte von p kleiner als 250 ist.

Die Abbildung zeigt schematisch den Längsschnitt eines Schiffs.
Die Kiellinie wird modellhaft durch $k(x) = -0{,}3 \cdot x^2 \cdot e^{-0{,}2x}$ für $0 \le x \le 20$ beschreiben.
Dabei entspricht eine Längeneinheit einem Meter in der Wirklichkeit.



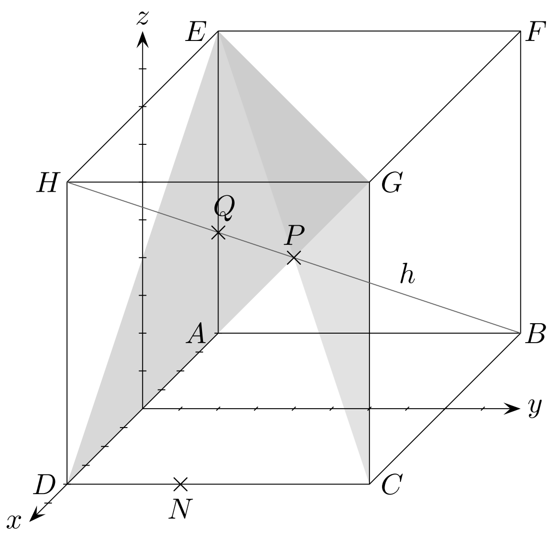
c) Es gilt $k(x) = -0{,}3 \cdot f_{0,2}(x)$.
Beschreiben Sie, wie der Graph von k aus dem Graphen von $f_{0,2}$ hervorgeht.

Um den Graphen von k zu erzeugen, wird der Graph von $f_{0,2}(x)$ an der x-Achse gespiegelt und um den Faktor 0,3 gestaucht.

Der Kiel hat in einem Punkt seinen größten Neigungswinkel gegen die Horizontale.
Bestimmen Sie die Größe dieses Neigungswinkels. $x_w = 2{,}93$, $\alpha = 34{,}6°$

Der horizontal liegende Boden der Kajüte liegt 2,20 m unterhalb des Decks. Der parallel dazu verlaufende Boden des Stauraums unterhalb der Kajüte hat in Längsrichtung des Schiffs eine Länge von 6 m.

d) Formulieren Sie (ohne Rechnung) einen Lösungsweg, wie wie ermittelt werden kann, wie weit der Boden des Stauraums unterhalb des Bodens der Kajüte liegt.



2. Von einem Würfel sind folgende Eckpunkte gegeben:
$B(-4\,|\,8\,|\,0),\ C(4\,|\,8\,|\,0),\ D(4\,|\,0\,|\,0)$
$E(-4\,|\,0\,|\,8),\ G(4\,|\,8\,|\,8),\ H(4\,|\,0\,|\,8)$.

a) Geben Sie die Koordinaten des Punktes F und die Kantenlänge des Würfels an. $F(-4\,|\,8\,|\,8)$
Die Kantenlänge beträgt 8.
Der Punkt G wird am Koordinatenursprung gespiegelt.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Spiegelpunktes G_1. $G_1(-4\,|\,-8\,|\,-8)$
Der Würfel wird so um 45° um die x-Achse gedreht, dass der Punkt G auf den Punkt G_2 mit positiver z-Koordinate abgebildet wird.
Bestimmen Sie die Koordinaten von G_2. $G_2\big(4\,|\,0\,|\,8\sqrt{2}\big)$

b) Der Punkt N ist ein beliebiger Punkt auf der Kante DC des Würfels.
Untersuchen Sie, ob die Koordinaten des Punktes N so bestimmt werden können, dass das Dreieck mit den Eckpunkten E, G und N einen rechten Winkel im Punkt N hat.
$s^2 - s + 1 = 0$ hat keine Lösung.
Die Hypotenuse $\overline{EG}$ als längste Seite eines rechtwinkligen Dreiecks ist nicht möglich, $\overline{EG} \leq \overline{EN}$.

Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes P auf der Strecke $\overline{EG}$, der vom Koordinatenursprung denselben Abstand hat wie der Punkt E und von E verschieden ist.
$|\,\overrightarrow{OE}\,| = \sqrt{80},\ (8t-4)^2 + (8t)^2 + 8^2 = 80,\ t = 0{,}5\ (t = 0),\ P(0\,|\,4\,|\,8)$
Der Punkt kann auch ohne Rechnung gefunden werden.

c) Der Punkt M ist ein beliebiger Punkt auf der Kante DC des Würfels.
Die Punkte M, E und G bilden die Eckpunkte eines Dreiecks.
Die Gerade h durch die Punkte H und B schneidet dieses Dreieck jeweils in einem Punkt S.
Wenn sich M auf der Kante DC des Würfels bewegt, bewegt sich der Punkt S auf einer Strecke k.
Geben Sie (fast ohne Rechnung) einen Punkt an, der auf k liegt. $P(0\,|\,4\,|\,4)$
Formulieren Sie (ohne Rechnung) einen Lösungsweg, wie eine Parameterdarstellung für die Strecke ermittelt werden kann.
Die Endpunkte der Strecke sind P und Q (Schnittpunkt von h und dem Dreieck DGE).
$\vec{x} = \overrightarrow{OP} + \lambda\,\overrightarrow{PQ}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1$

3. Ein Transportunternehmen bringt jeden Tag Zubehörteile zu einem Unternehmen. Dabei wird immer dieselbe Strecke zurückgelegt. Die dafür benötigte Zeit soll als normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 120$ Minuten und der Standardabweichung $\sigma = 15$ Minuten modelliert werden.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Fahrer höchstens 110 Minuten Fahrzeit benötigt.

$P(X \leq 110) = 0{,}252$

Der Fahrer fährt um 6:00 Uhr los.
Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit 50 % beträgt, dass der Fahrer spätestens um 8:00 Uhr beim Unternehmen eintrifft. $\mu = 120$, daher gilt $P(X \leq 120) = 0{,}5$

Die Zubehörteile müssen spätestens um 9:00 Uhr beim Unternehmen eintreffen.
Ermitteln Sie die Uhrzeit (auf Minuten gerundet), zu welcher der Fahrer spätestens losfahren muss, damit in mindestens 95 % aller Fälle die Lieferung rechtzeitig ankommt.

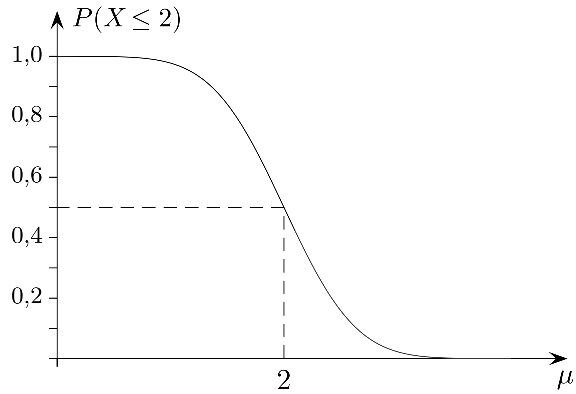
Zeitdauer mindestens 145 Minuten, späteste Abfahrtszeit 6:35 Uhr

b) Der Fahrweg beinhaltet auch eine Autobahnstrecke mit einer Geschwindigkeitsbegrenzung auf $120\,\frac{km}{h}$.
Die gefahrene Geschwindigkeit soll als normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 125\,\frac{km}{h}$ modelliert werden. Kontrollen haben ergeben, dass auf dieser Strecke 8 % der Autofahrer schneller als $140\,\frac{km}{h}$ fahren. Bestimmen Sie, wie viel Prozent der Autofahrer nicht schneller als $120\,\frac{km}{h}$ fahren. $\sigma = 10{,}68$, $P(Y \leq 120) = 0{,}320$
Untersuchen Sie ohne Einsatz des Rechners die Auswirkung einer Verkleinerung der Standardabweichung σ auf den Anteil derjenigen Autofahrer, die nach diesem Modell schneller als $140\,\frac{km}{h}$ fahren. beachte: $\mu = 125\,\frac{km}{h}$

c) Unabhängig vom Sachzusammenhang wird im Folgenden eine normalverteilte Zufallsgröße X mit der Standardabweichung $\sigma = 0{,}5$ betrachtet.
Untenstehend ist ein Teil des Graphen der Funktion zu sehen, die für jeden Wert des Erwartungswertes μ die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 2)$ angibt. Zeichnen Sie auf der μ-Achse die Stelle ein, an der sich der Wert 2 befindet und begründen Sie Ihr Vorgehen.

Für $\mu = 2$ gilt $P(X \leq 2) = 0{,}5$, da der Graph einer Normalverteilung symmetrisch zu $x = \mu$ ist. Deshalb gehört zum Funktionswert 0,5 die Stelle 2.

Skizzieren und begründen Sie den weiteren Verlauf des Graphen.



Schon für $\mu > 3{,}5$ liegt der Wert 2 nicht mehr in der 3σ-Umgebung von μ. Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten außerhalb dieser Umgebung sind sehr klein, da es mit zunehmendem Erwartungswert μ immer unwahrscheinlicher wird, dass die Zufallsvariable Werte annimmt, die kleiner oder gleich 2 sind. Deshalb werden die Werte von $P(X \leq 2)$ mit zunehmendem μ immer kleiner und nähern sich dem Wert null an.