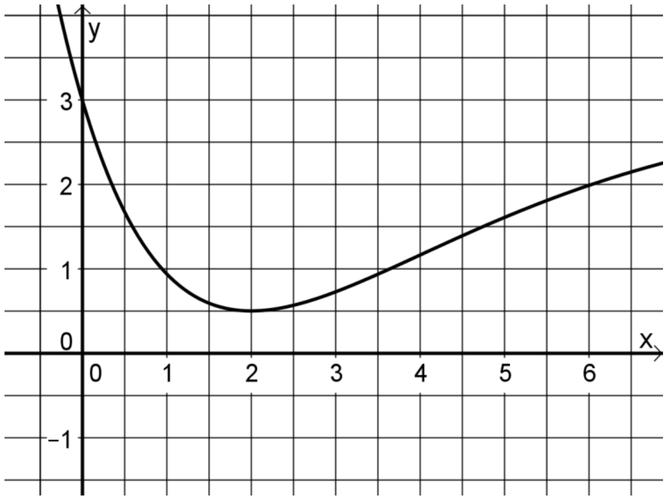
1 Aufgaben aus dem Aufgabenpool 1

1.1 Analysis

A1_1

Die Abbildung zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f.



a) Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung einen Näherungswert für $\int_3^5 f(x)dx$. (2 BE)

Die Funktion F ist die in $\mathbb{R}$ definierte Stammfunktion von f mit $F(3)=0$.

b) Geben Sie mithilfe der Abbildung einen Näherungswert für die Ableitung von F an der Stelle $x=2$ an. (1 BE)

c) Zeigen Sie, dass $F(b)=\int_3^b f(x)dx$ mit $b\in\mathbb{R}$ gilt. (2 BE)

	Erwartete Schülerleistungen	BE
A1_1		
a)	Durch Abschätzen der Anzahl der Quadrate in der Grafik ergibt sich: $\int_3^5 f(x)dx \approx 9\cdot 0{,}25 \approx 2{,}3$.	2
b)	$F'(2)\approx 0{,}5$	1
c)	Aufgrund $F(3)=0$ ergibt sich: $\int_3^b f(x)dx = F(b)-F(3)=F(b)$.	2
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

A1_2

Gegeben sind die Funktionen f_a mit $f_a(x) = -a \cdot x \cdot (x-a)$, wobei $x \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ gilt.

a) Geben Sie die Nullstellen der Funktionen f_a an. (1 BE)

b) Bestimmen Sie denjenigen Wert von a, für den $\int_0^a f_a(x)\,dx = \frac{8}{3}$ gilt. (4 BE)

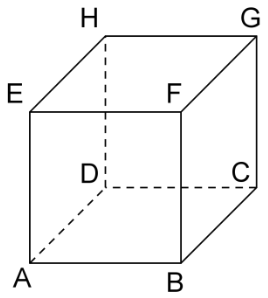
	Erwartete Schülerleistungen	BE
A1_2		
a)	$x = 0$; $x = a$	1
b)	$\int_0^a f_a(x)\,dx = \int_0^a (-a \cdot x^2 + a^2 \cdot x)\,dx = \left[-\frac{1}{3} \cdot a \cdot x^3 + \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot x^2\right]_0^a = \frac{1}{6} \cdot a^4$ $\frac{1}{6} \cdot a^4 = \frac{8}{3}$; $a^4 = 16$; $a = 2$, da $a > 0$	4
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

1.2 Analytische Geometrie/Lineare Algebra

1.2.1 Analytische Geometrie

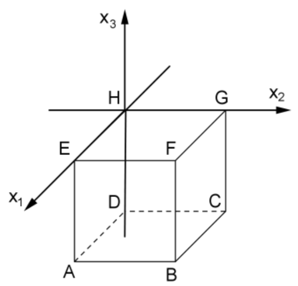
G1_1

Betrachtet wird der abgebildete Würfel ABCDEFGH. Die Eckpunkte D, E, F und H dieses Würfels besitzen in einem kartesischen Koordinatensystem die folgenden Koordinaten: $D(0\,|\,0\,|-2)$, $E(2\,|\,0\,|\,0)$, $F(2\,|\,2\,|\,0)$ und $H(0\,|\,0\,|\,0)$.



a) Zeichnen Sie in die Abbildung die Koordinatenachsen ein und bezeichnen Sie diese. Geben Sie die Koordinaten des Punktes A an. (2 BE)

b) Der Punkt P liegt auf der Kante FB des Würfels und hat vom Punkt H den Abstand 3. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P. (3 BE)

	Erwartete Schülerleistungen	BE
G1_1 a)	 Die Skalierung ist durch die eingezeichneten Punkte gegeben und muss nicht gesondert erfolgen. $A(2\,|\,0\,|-2)$	2
b)	Mit $P(2\,|\,2\,|\,x_3)$ folgt $\left\|\overrightarrow{HP}\right\| = \sqrt{2^2+2^2+x_3{}^2} = 3$. Aus $x_3{}^2 = 1$ folgt $x_3 = -1$, da $-2 \le x_3 \le 0$. $P(2\,|\,2\,|-1)$	3
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

G1_2

Gegeben sind die Ebene $E: 2 \cdot x + y + 2 \cdot z = 6$ sowie die Punkte $P(1|0|2)$ und $Q(5|2|6)$.

a) Zeigen Sie, dass die Gerade durch die Punkte P und Q senkrecht zur Ebene E verläuft. (2 BE)

b) Die Punkte P und Q liegen symmetrisch zu einer Ebene F.
Ermitteln Sie eine Gleichung von F. (3 BE)

	Erwartete Schülerleistungen	BE
G1_1 a)	$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{PQ}$ und der Normalenvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ der Ebene E sind kollinear.	2
b)	Ist M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{PQ}$, so gilt: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} \right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Da die Ebene F nach der Angabe in a) parallel zu E ist, gibt es einen Wert von d mit $F: 2x + y + 2z = d$. Da M in der Ebene F liegt, folgt aus $2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = d$ für d der Wert 15. Damit ergibt sich $F: 2x + y + 2z = 15$.	3
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

1.2.2 Lineare Algebra

LA1_1

Ein Fixvektor $\vec{v}$ einer Matrix M ist ein Vektor, für den gilt: $M \cdot \vec{v} = \vec{v}$ mit $\vec{v} \neq \vec{0}$.

a) Untersuchen Sie, ob es Werte für a und b gibt, sodass für die Matrix

$$N = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ a & 0{,}5 & 0{,}5 \\ b & 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix} \text{ und den Vektor } \vec{w} = \begin{pmatrix} 100 \\ 70 \\ 30 \end{pmatrix} \text{ die Bedingungen I und II gelten:}$$

I Der Vektor $\vec{w}$ ist ein Fixvektor der Matrix N.
II Die quadratische Matrix N ist stochastisch, d. h. alle Elemente sind nichtnegative reelle Zahlen und die Spaltensummen sind jeweils gleich eins.
(3 BE)

b) Die Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ mit $\vec{x} + \vec{y} \neq \vec{0}$ sind Fixvektoren einer Matrix L.
Zeigen Sie, dass auch der Vektor $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$ ein Fixvektor von L ist. (2 BE)

	Erwartete Schülerleistungen	BE
LA1_1 a)	Bedingung I: $N \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \cdot a + 50 \\ 100 \cdot b + 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 70 \\ 30 \end{pmatrix}$ Aus $100 \cdot a + 50 = 70$ und $100 \cdot b + 20 = 30$ folgt $a = 0{,}2$ und $b = 0{,}1$. Bedingung II: Die Matrix $\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}$ ist eine stochastische Matrix, da alle Elemente nichtnegative reelle Zahlen sind und alle Spaltensummen 1 ergeben.	3
b)	Einsetzen von $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$ in den Term $L \cdot \vec{z}$ liefert $L \cdot \vec{z} = L \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = L \cdot \vec{x} + L \cdot \vec{y} = \vec{x} + \vec{y} = \vec{z}$.	2
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

LA1_2

Eine Anzahl von Objekten verteilt sich auf zwei Zustände A und B.

In den Verteilungsvektoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ gibt a den Anteil der Objekte im Zustand A an und b den Anteil der Objekte im Zustand B.

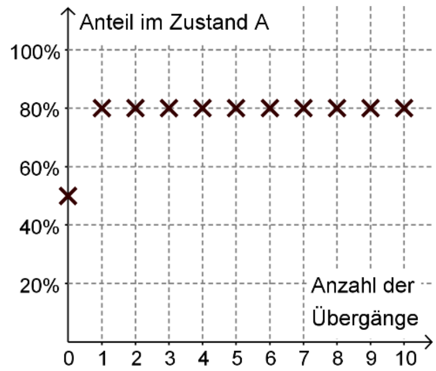
a) In einem ersten System wird der Übergang von einer Verteilung zu der folgenden durch eine Übergangsmatrix $M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$ beschrieben.

Bestimmen Sie die Matrix, die zwei Übergänge zusammenfasst. (2 BE)

b) In einem zweiten System wird der Übergang von einer Verteilung zu der folgenden durch eine Übergangsmatrix N beschrieben.

Die Anfangsverteilung ist $\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$.

Die nebenstehende Abbildung stellt die Entwicklung des Anteils im Zustand A für die ersten zehn Übergänge dar.



Begründen Sie, dass $N = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}$ die zugehörige Übergangsmatrix sein kann. (3 BE)

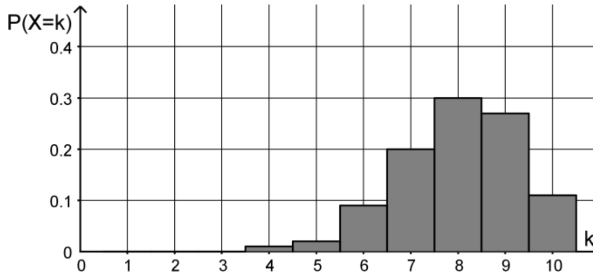
	Erwartete Schülerleistungen	BE
LA1_2 a)	$M \cdot M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}76 & 0{,}72 \\ 0{,}24 & 0{,}28 \end{pmatrix}$	2
b)	N liefert im ersten Übergang $\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$. Der Vektor $\begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$ ist Fixvektor der Matrix N. Begründung z.B.: $\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$. Damit liefert N in jedem weiteren Übergang die dargestellten Anteile im Zustand A.	3
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

1.3 Stochastik

S1_1

Ein Basketballspieler wirft 10 Freiwürfe.
Die Anzahl seiner Treffer wird mit k bezeichnet und durch die Zufallsgröße X beschrieben.
Die Zufallsgröße X wird als binomialverteilt mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}8$ angenommen.

In der Abbildung ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X dargestellt.



a) Ermitteln Sie mithilfe der Abbildung einen Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Basketballspieler mindestens 8-mal trifft. (2 BE)

b) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, keinen Treffer zu erzielen, kleiner als $\frac{1}{1\,000\,000}$ ist. (3 BE)

	Erwartete Schülerleistungen	BE
S1_1		
a)	Für $P(X \geq 8) = P(X=8) + P(X=9) + P(X=10)$ ergibt sich z. B. $0{,}30 + 0{,}27 + 0{,}11 = 0{,}68$.	2
b)	$P(X=0) = 0{,}2^{10}$ $0{,}2^{10} = \left(\frac{2}{10}\right)^{10} = \frac{2^{10}}{10^{10}} = \frac{1024}{10^{10}} = 0{,}0000001024$ und $\frac{1}{1\,000\,000} = 0{,}000001$ Es gilt also: $0{,}2^{10} < \frac{1}{1\,000\,000}$.	3
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

S1_2

Bei einem Zufallsexperiment wird eine ideale Münze so lange geworfen, bis zum zweiten Mal Zahl (Z) oder zum zweiten Mal Wappen (W) oben liegt.
Als Ergebnismenge wird festgelegt: { ZZ; WW; ZWZ; ZWW; WZZ; WZW }.

a) Begründen Sie, dieses Zufallsexperiment kein Laplace-Experiment ist. (2 BE)

b) Die Zufallsgröße X ordnet jedem Ergebnis die Anzahl der entsprechenden Münzwürfe zu.
Berechnen Sie den Erwartungswert von X. (3 BE)

	Erwartete Schülerleistungen	**BE**
S1_2 a)	$P(ZZ) = \frac{1}{4}$; $P(ZWZ) = \frac{1}{8}$ Die Ergebnisse des Zufallsexperiments weisen also nicht alle die gleiche Wahrscheinlichkeit auf, daher handelt es sich nicht um ein Laplace-Experiment.	2
b)	$P(X = 2) = P(ZZ) + P(WW) = \frac{1}{2}$ Damit gilt $P(X = 3) = 1 - P(X = 2) = \frac{1}{2}$ und es folgt $E(X) = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 3 = 2{,}5$.	3
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

2 Aufgaben aus dem Aufgabenpool 2

2.1 Analysis

A2_1

Für jeden Wert von a $(a \in \mathbb{R},\ a > 0)$ ist die Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = a \cdot e^{a+x}$ $(x \in \mathbb{R})$.

Die Tangente an den Graphen von f_a im Punkt $\left(-1 \mid f_a(-1)\right)$ wird mit t_a bezeichnet.

a) Weisen Sie nach, dass für jeden Wert von a die Tangente t_a durch die Gleichung $y = a \cdot e^{a-1} \cdot x + 2 \cdot a \cdot e^{a-1}$ beschrieben werden kann. (3 BE)

b) Für jeden Wert von a schließen die Tangente t_a und die beiden Koordinatenachsen ein Dreieck ein.
Ermitteln Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks in Abhängigkeit von a. (2 BE)

	Erwartete Schülerleistungen	**BE**
A2_1 a)	Die Gleichung der Tangente t_a lautet $y = t_a(x) = m \cdot x + b$. $m = f_a{}'(-1) = a \cdot e^{a-1}$ Für $x = -1$ gilt: $t_a(-1) = f_a(-1) = a \cdot e^{a-1} \cdot (-1) + b = a \cdot e^{a-1}$. Damit ist $b = 2 \cdot a \cdot e^{a-1}$ und $t_a(x) = a \cdot e^{a-1} \cdot x + 2 \cdot a \cdot e^{a-1}$.	3
b)	Mit $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$ und $g = 2$ sowie $h = 2 \cdot a \cdot e^{a-1}$ folgt $A = 2 \cdot a \cdot e^{a-1}$.	2
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

2.2 Analytische Geometrie

G2_1

Gegeben sind die Punkte $A(-2|1|4)$ und $B(-4|0|6)$.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes C so, dass gilt: $\overrightarrow{CA} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$. (2 BE)

b) Durch die Punkte A und B verläuft die Gerade g.
Betrachtet werden Geraden, für welche die Bedingungen I und II gelten:
I Jede dieser Geraden schneidet die Gerade g orthogonal.
II Der Abstand jeder dieser Geraden vom Punkt A beträgt 3.
Ermitteln Sie eine Gleichung für eine dieser Geraden. (3 BE)

	Erwartete Schülerleistungen	BE
G2_1 a)	Mit $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ folgt $C(2\|3\|0)$.	2
b)	Da $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 3$ gilt, hat jede zu g senkrechte Gerade durch B von A den Abstand 3. Aus $\vec{v} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$ erhält man z. B. $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ als einen möglichen Richtungsvektor. Gleichung einer möglichen Geraden: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$	3
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

2.3 Stochastik

S2_1

Eine Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p und dem Stichprobenumfang $n=2$.

a) Berechnen Sie für $p=0,4$ die Wahrscheinlichkeit $P(X\leq 1)$. (2 BE)

b) Zeigen Sie, dass für jeden Wert von p gilt: $P(X\neq 0)+P(X\neq 1)+P(X\neq 2)=2$. (3 BE)

	Erwartete Schülerleistungen	BE
S2_1 a)	$P(X\leq 1)=1-P(X=2)=1-0,4^2=1-0,16=0,84$	2
b)	$P(X\neq 0)+P(X\neq 1)+P(X\neq 2)$ $=P(X=1)+P(X=2)+P(X=0)+P(X=2)+P(X=0)+P(X=1)$ $=2\cdot(P(X=0)+P(X=1)+P(X=2))=2\cdot 1=2$	3
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		