Pflichtaufgaben **Aufgabe 1**
Analysis

Gegeben sind die Funktionen f_a durch

$$y = f_a(x) = -x^3 - ax^2 + a^2x + a^3 \quad \text{mit } x \in R,\ a \in R \text{ und } a > 0.$$

Ihre Graphen seien G_a.

a) Ermitteln Sie die Art und Lage der lokalen Extrempunkte der Graphen G_a und eine Gleichung der Ortskurve ihrer lokalen Hochpunkte.

Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionen f_a für $x \to \pm\infty$.

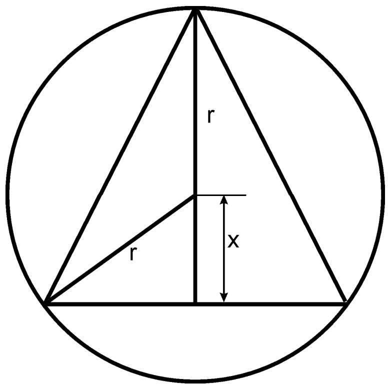
Zeigen Sie, dass $x = a$ Nullstellen der Funktionen f_a sind und untersuchen Sie die Funktionen f_a auf weitere Nullstellen.

Zeichnen Sie den Graphen G_1 im Intervall $-2 \leq x \leq 1{,}5$ in ein kartesisches Koordinatensystem.

b) Die Graphen G_a schließen jeweils mit der x–Achse eine Fläche vollständig ein.
Ermitteln Sie den Wert des Parameters a, für den die Maßzahl des Inhaltes dieser Fläche $\frac{27}{4}$ ist.

c) Einer Kugel mit dem Radius r soll ein gerader Kreiskegel mit größtmöglichem Volumen so einbeschrieben werden, dass der Mittelpunkt der Kugel im Inneren des Kegels liegt.

Die Abbildung zeigt von einem einbeschriebenen Kegel und der Kugel einen ebenen Schnitt durch die Kegelspitze und den Kugelmittelpunkt.



Zeigen Sie, dass

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi \cdot f_r(x) = \frac{1}{3}\pi \cdot (-x^3 - rx^2 + r^2x + r^3)$$

Gleichung einer Zielfunktion zum Lösen dieser Extremwertaufgabe ist.

Begründen Sie, dass die Funktion V die gleichen lokalen Extremstellen wie die Funktion f_r hat und geben Sie die Höhe des Kreiskegels, dessen Volumen maximal ist, an.

Pflichtaufgaben

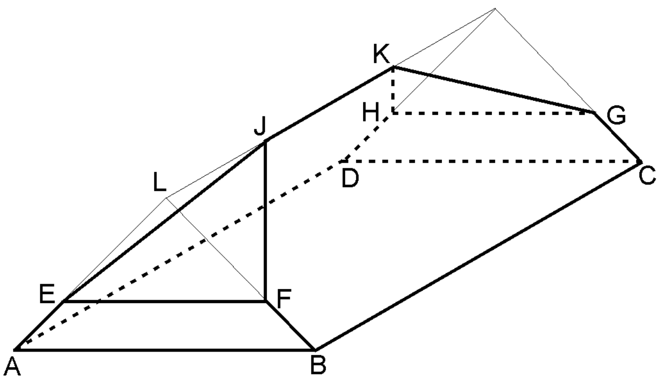
Aufgabe 2
Analytische Geometrie

Das Krüppelwalmdach eines Hauses hat die Form eines geraden dreiseitigen Prismas, von dem zwei zueinander kongruente dreiseitige Pyramiden abgeschnitten sind (siehe nicht maßstäbliche Abbildung).
Durch die folgenden Punkte wird das Krüppelwalmdach in einem kartesischen Koordinatensystem beschrieben:

A(10 | 0 | 0); B(10 | 8 | 0); C(0 | 8 | 0);

E(10 | 1 | 1); F(10 | 7 | 1); J(8 | 4 | 4).

Eine Einheit entspricht einem Meter.



a) Stellen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene auf, in der das Dreieck EFJ liegt und berechnen Sie das Gradmaß des Winkels, den diese Ebene mit der xy-Ebene einschließt.

b) Der Punkt L ist der Schnittpunkt der Geraden AE und BF.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes L und zeigen Sie, dass das Dreieck ABL gleichschenklig ist.

Zur Bewertung von Immobilien wird u. a. der sogenannte umbaute Raum eines Objektes, der seinem Volumen entspricht, herangezogen.
Berechnen Sie den umbauten Raum des Krüppelwalmdaches.

c) Das Dachgeschoss des Hauses soll vermietet werden. Als vollwertige Wohnfläche gilt nur die Fläche des Dachgeschosses, über der die Raumhöhe mindestens 2 m beträgt.
Berechnen Sie den Inhalt der vollwertigen Wohnfläche.

Pflichtaufgaben **Aufgabe 3**
Stochastik

Für den Verkauf in Heimwerkermärkten werden Schrauben abgepackt. Die Anzahl der Schrauben in einer Packung schwankt bei der maschinellen Abpackung zufällig von 39 bis 43 Schrauben.

a) Die Zufallsgröße Y beschreibe die Anzahl der Schrauben in einer Packung. Aus langjähriger Erfahrung ergibt sich für die Zufallsgröße Y folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung, die in der Tabelle unvollständig dargestellt ist.

$Y = i$	39	40	41	42	43
$P(Y = i)$		0,251	0,364	0,227	0,058

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(Y = 39)$ sowie den Erwartungswert $E(Y)$ und interpretieren Sie diesen.

b) In einer Stichprobe von 100 Packungen wird jeweils die Anzahl der Schrauben ermittelt. Eine Packung gilt als normgerecht, wenn sie mindestens 40 Schrauben enthält.
Die Zufallsgröße X sei die Anzahl normgerechter Packungen in der Stichprobe.

Begründen Sie, dass die Zufallsgröße X als binomialverteilt mit $n = 100$ und 0,9 als Wahrscheinlichkeit angesehen werden kann und berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße X.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse.
A: Genau 90 Packungen sind normgerecht.
B: Mindestens 90 Packungen sind normgerecht.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, dass genau 90 Packungen normgerecht sind, unter der Bedingung, dass mindestens 90 Packungen normgerecht sind.

Ein Großhändler liefert die Schrauben in Kartons zu je 100 Packungen. Er will mit einer Sicherheit von mindestens 90 % eine Mindestzahl k an normgerechten Packungen je Karton garantieren.
Ermitteln Sie den größtmöglichen Wert für k.

c) Einem Heimwerkermarkt wird ein Mix von zwei Schraubensorten S_1 und S_2 angeboten. Der Heimwerkermarkt würde einen solchen Mix bestellen, wenn der Anteil der Sorte S_2 mehr als ein Viertel in diesem Mix beträgt.
Die Zufallsgröße Z beschreibe die Anzahl der Schrauben der Sorte S_2 in einer Stichprobe von 500 Schrauben des Mixes. Eine zufällig ausgewählte Schraube der Stichprobe sei mit der Wahrscheinlichkeit p eine Schraube der Sorte S_2.
Die Entscheidung über eine Bestellung soll anhand eines rechtsseitigen Signifikanztests mit der Hypothese H_0: $p \leq 0{,}25$ als Nullhypothese und dem Ablehnungsbereich
$\overline{A} = \{140; 141; ...; 499; 500\}$ getroffen werden.

Beurteilen Sie die Eignung der Hypothese H_0 als Nullhypothese.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der irrtümlich eine Bestellung ausgelöst wird.

Wahlpflichtaufgaben **Aufgabe 4.1**
Analysis

Gegeben sei eine Funktion f mit $y = f(x) = \dfrac{2}{1+e^{-x}}$ und $x \in R$.

Der Punkt W(0 | f(0)) ist der einzige Wendepunkt des Graphen der Funktion f.

a) Berechnen Sie den Funktionswert f(–ln3) und untersuchen Sie die Funktion f auf Nullstellen.

Ermitteln Sie das Verhalten der Funktion f für $x \to \pm\infty$ und weisen Sie nach, dass die Funktion f für alle $x \in R$ streng monoton wachsend ist.

Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f nicht symmetrisch zur y-Achse ist.

b) Schlussfolgern Sie aus Eigenschaften der Funktion f (oder aus Eigenschaften des Graphen von f) auf drei Eigenschaften der Ableitungsfunktion f' bzw. des Graphen von f'.

Wahlpflichtaufgaben **Aufgabe 4.2**
Analytische Geometrie

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ und $\vec{e}$ des dreidimensionalen Raumes mit

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},\ \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{d} = \vec{a} - 2\cdot\vec{c} \text{ und } \vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie das Gradmaß des Winkels, den die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ einschließen.

Weisen Sie nach, dass die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig sind.

Berechnen Sie die Koordinaten des Vektors $\vec{d}$ und begründen Sie, dass die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ komplanar sind.

b) Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, $\vec{a}$ und $\vec{c}$ sowie $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind jeweils linear unabhängig.

Begründen Sie, dass die paarweise lineare Unabhängigkeit dreier beliebiger Vektoren des dreidimensionalen Raumes keine hinreichende Bedingung dafür ist, dass diese drei Vektoren linear unabhängig sind.

c) Zeigen Sie, dass gilt: $|\vec{a} \times \vec{e}| \neq 0$.

Schlussfolgern Sie daraus und unter Verwendung der Beziehung $|\vec{a} \times \vec{e}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{e}| \cdot \sin\angle(\vec{a}, \vec{e})$ auf die lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{e}$.