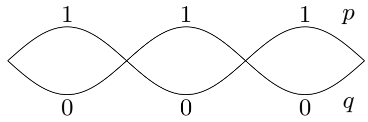
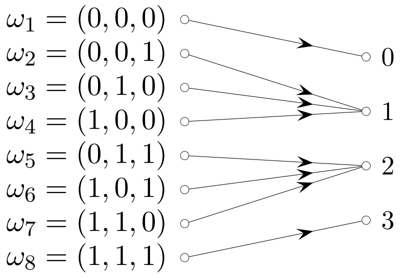
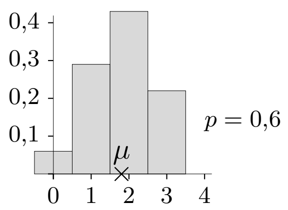
Erwartungswert der Binomialverteilung

Wir betrachten eine Bernoulli-Kette der Länge $n = 3$
und bestimmen den Erwartungswert der Zufallsvariablen $X(\omega)$,
die die Anzahl der Treffer (Einsen) angibt, z.B. $X(1,0,1) = 2$.







k	0	1	2	3
$P(X = k)$	q^3	$3pq^2$	$3p^2q$	p^3

Mit der Verteilung der Zufallsvariablen X kann der Erwartungswert mühelos berechnet werden.

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \cdot q^3 + 1 \cdot 3pq^2 + 2 \cdot 3p^2q + 3 \cdot p^3 \\ &= 3p\,\underbrace{(q^2 + 2pq + p^2)}_{(q+p)^2} \\ &= 3p \qquad\qquad \textit{beachte: } p + q = 1 \end{aligned}$$

Es ist zu vermuten, dass für eine Bernoulli-Kette der Länge n gilt: $E(X) = np$
und dass dieses Ergebnis dadurch zustande kommt, dass der Erwartungswert für eine Bernoulli-Kette der Länge $n = 1$, nämlich p, nur mit n multipliziert wird.

Zerlegen wir daher die Zufallsvariable X in: $X = X_1 + X_2 + X_3$
oder mit Argumenten: $X(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) + X_3(\omega)$,

wobei $X_i(\omega)$ die i-te Stelle von ω angibt. Für X_1 (wie auch für X_2, X_3) gilt:

k	0	1
$P(X_1 = k)$	q	p

Damit ist $E(X_i) = p$
und $E(X) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 3p$,
das Allgemeine in dieser Überlegung ist nun zu erkennen.
Jedoch ist die Begründung noch nicht ganz vollständig, es fehlt der Nachweis der Linearität:

$$E(X_1 + X_2 + X_3) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3)$$

Seien daher X und Y zwei beliebige Zufallsvariable auf Ω, zu zeigen ist: $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.
Aus der obigen Verteilungstabelle von X ist ersichtlich, dass der Erwartungswert auch mit
$E(X) = X(\omega_1) \cdot p_1 + X(\omega_2) \cdot p_2 + ... + X(\omega_n) \cdot p_n$ errechnet werden kann (z.B. ist $3p^2q$ die Summe der Wahrscheinlichkeiten dreier Elementarereignisse). Mit der Tabelle kann $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ nun leicht eingesehen werden.

Elementarereignis	ω_1	ω_2	ω_3	...	ω_n
Wahrscheinlichkeit von ω_i	p_1	p_2	p_3	...	p_n
$X(\omega_i)$	x_1	x_2	x_3	...	x_n
$Y(\omega_i)$	y_1	y_2	y_3	...	y_n

Nämlich:

$$
\begin{aligned}
E(X+Y) &= (x_1+y_1)\cdot p_1 + (x_2+y_2)\cdot p_2 + \ ... \ + (x_n+y_n)\cdot p_n \\
&= \underbrace{x_1\cdot p_1 + x_2\cdot p_2 + ... + x_n\cdot p_n}_{E(X)} \ + \ \underbrace{y_1\cdot p_1 + y_2\cdot p_2 + ... + y_n\cdot p_n}_{E(Y)}
\end{aligned}
$$