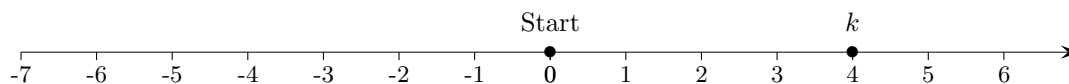
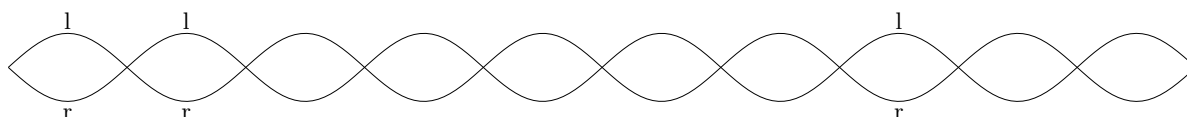


Irrfahrt n Schritte

Ein Teilchen startet in 0 und springt jede Sekunde mit der Wahrscheinlichkeit $1/2$ auf der Geraden einen Schritt nach links oder rechts. Mit welcher Wahrscheinlichkeit endet die Irrfahrt nach genau $n = 10$ Schritten auf dem Platz $k = 4$?



Der Bezug zur Bernoulli-Kette mit der Länge $n = 10$ ist offensichtlich.



Die möglichen Pfade lassen sich zweidimensional besonders gut erfassen. R bezeichnet die Anzahl der Rechts-Schritte und L die Anzahl der Links-Schritte. Nach 10 Schritten endet die Irrfahrt auf der Geraden $R + L = 10$, d.h. $L = -R + 10$ (vertrauter ist die Schreibweise $y = -x + 10$).

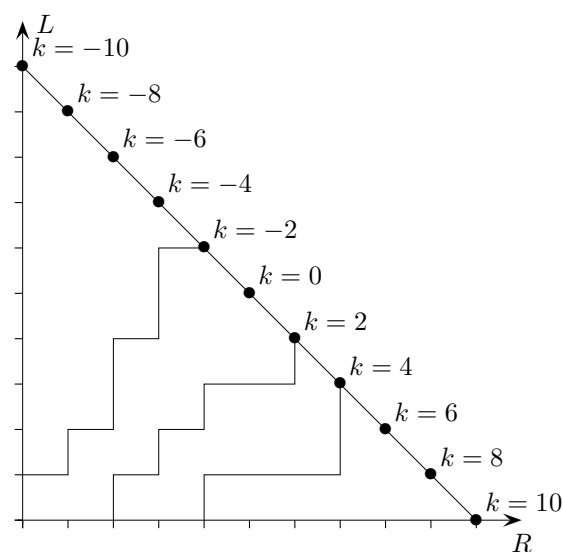
Damit die Irrfahrt in $k = 4$ endet, sind 7 Rechts- und 3 Linksschritte erforderlich, d.h. $R - L = 4$.

Hierfür bestehen $\binom{10}{7}$ ($= \binom{10}{3}$) Möglichkeiten.

Aus $R - L = k$
 $R + L = n$ folgt unmittelbar

$$R = \frac{n+k}{2}$$

$$L = \frac{n-k}{2}$$



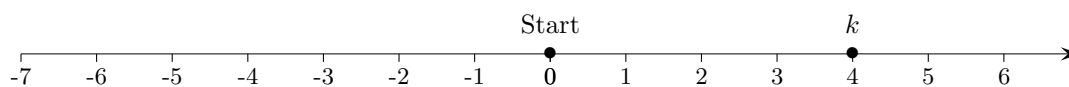
Zusammengefasst:

Die Irrfahrt endet nach genau n Schritten mit der Wahrscheinlichkeit

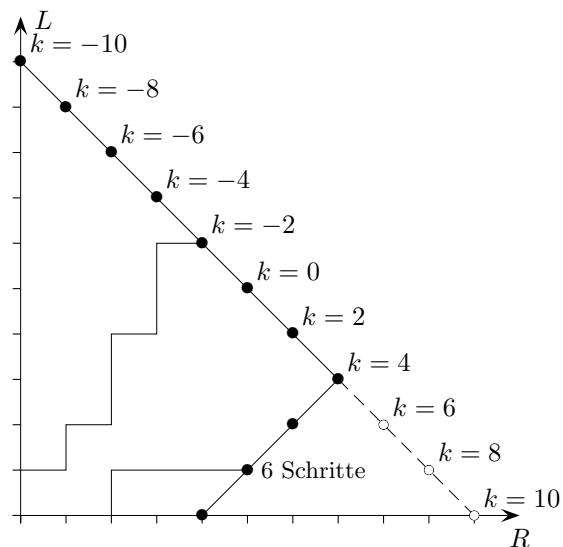
$$P = \binom{n}{\frac{n+k}{2}} \frac{1}{2^n} \quad (= \binom{n}{\frac{n-k}{2}} \frac{1}{2^n})$$

auf Platz k ,
 vorausgesetzt, $n + k$ ist gerade.

Irrfahrt Absorption



Das Vorige soll dahingehend geändert werden, dass das Teilchen stoppt, wenn der Platz $k = 4$ erreicht wurde ($k = 4$ ist absorbierend). Das Ziel kann in 4, 6, 8 oder 10 Schritten erreicht werden. Die Anzahl der möglichen Pfade wird sukzessive ermittelt.



An den Zwischenstellen stehen (zentriert) die Anzahlen der Teilpfade. Für die Wahrscheinlichkeit, nach maximal 10 Schritten in $k = 4$ absorbiert zu werden, erhalten wir:

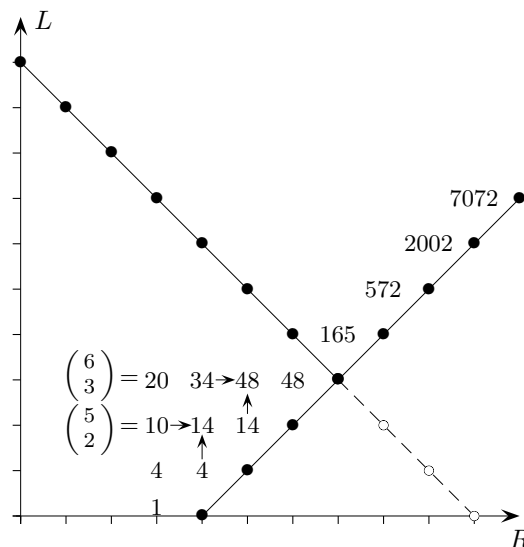
$$P = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 + 14 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 + 48 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 0,23$$

Lassen wir nun die Beschränkung auf 10 Schritte fallen. Die Folge 1, 4, 14, 48 wird fortgesetzt durch:

165, 572, 2002, 7072, 25194, 90440, 326876, 1188640, 4345965, 15967980, 58929450, 218349120, 811985790, ...

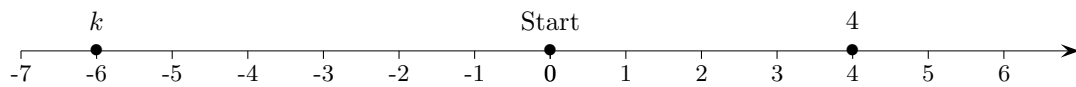
516 Summanden ergeben $P = 0,90$.

Dann überschreitet mein Computer-Programm den zulässigen Zahlbereich.

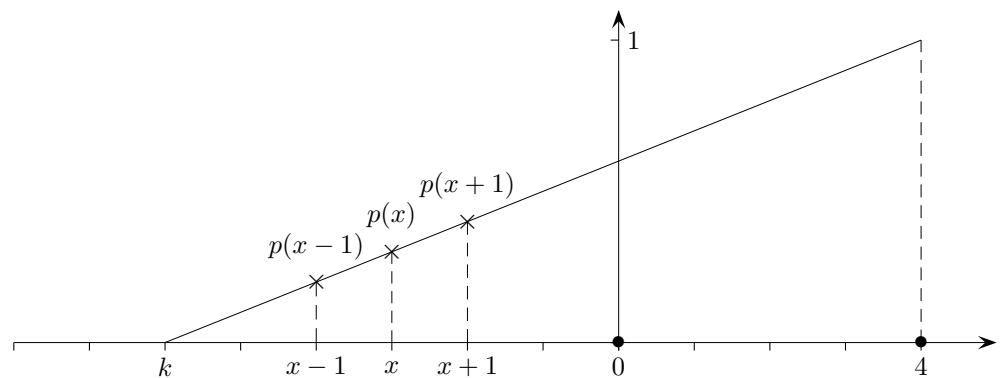


Die Vermutung liegt nahe, dass die Wahrscheinlichkeit, in 4 absorbiert zu werden, 1 beträgt. Der Nachweis folgt.

Irrfahrt Wahrscheinlichkeit der Absorption



Ein Teilchen startet in 0 und springt jede Sekunde mit der Wahrscheinlichkeit $1/2$ auf der Geraden einen Schritt nach links oder rechts. In 4 und $k = -6$ wird es gestoppt, d. h. der absorbierende Rand ist $\{k, 4\}$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit endet die Irrfahrt in 4?



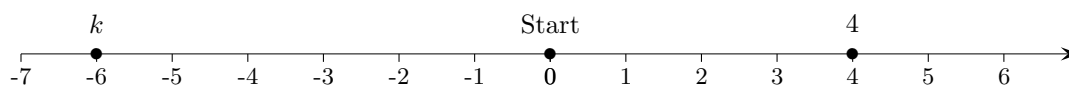
Sei $p(x)$ die Wahrscheinlichkeit, von x aus in 4 absorbiert zu werden. Für $p(x)$ gilt dann:
 (Dieses Vorgehen ist typisch für eine absorbierende Markow-Kette, die sich als Irrfahrt auf einem gerichteten Graphen deuten lässt.)

$$\begin{aligned}
 p(k) &= 0 \\
 p(4) &= 1 \\
 p(x) &= \frac{1}{2}(p(x-1) + p(x+1))
 \end{aligned}$$

Daraus schließen wir, dass die Werte $p(x)$ auf einer Geraden liegen, die durch $(k | 0)$ und $(4 | 1)$ verläuft.

Für $k \rightarrow -\infty$ folgt $p(0) \rightarrow 1$.

Irrfahrt mittlere Schrittzahl



Ein Teilchen startet in 0 und springt jede Sekunde mit der Wahrscheinlichkeit $1/2$ auf der Geraden einen Schritt nach links oder rechts. In 4 und $k = -6$ wird es gestoppt, d.h. der absorbierende Rand ist $\{k, 4\}$. Wie groß ist die mittlere Dauer der Irrfahrt bis zur Absorption?

Sei $m(x)$ die mittlere Schrittzahl von x aus bis zur Absorption in 4.

Für $m(x)$ gilt dann:

$$m(k) = 0$$

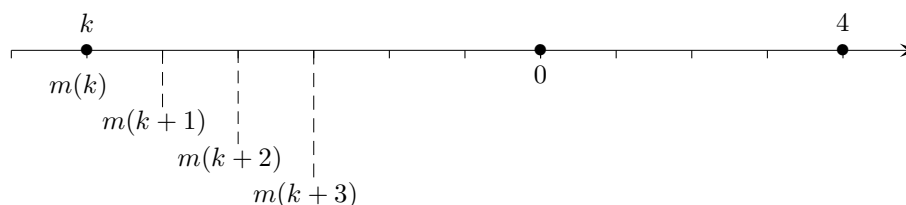
$$m(4) = 0$$

$$m(x) = 1 + \frac{1}{2}(m(x-1) + m(x+1))$$

Dieses Vorgehen ist wieder typisch für eine absorbierende Markow-Kette:

Erwartungswert $m(x)$ eines inneren Zustands =

1 + gewichtetes Mittel der Erwartungswerte seiner Nachbarn.



Mit der rekursiven Beziehung für $m(x)$ (nach $m(x+1)$ umstellen) werden die Erwartungswerte $m(k+2), m(k+3), m(k+4), \dots$ bestimmt. Hierzu ist $m(k+1) = a$ zu setzen. a wird dann aus $m(4) = 0$ ermittelt.

$$m(k) = 0$$

$$m(k+1) = a$$

$$m(k+2) = 2(a-1)$$

$$m(k+3) = 3(a-2)$$

...

$$* m(k+x) = x(a - (x-1))$$

$$m(4) = (-k+4)(a+k-3)$$

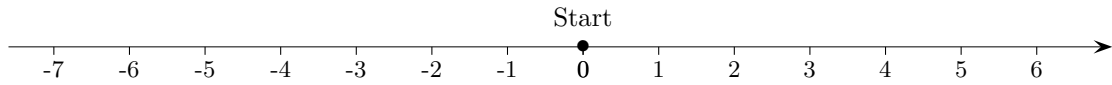
$$\implies a = 3 - k$$

$$x = -k \xrightarrow{*} m(0) = |k| \cdot 4$$

Für $k \rightarrow -\infty$ folgt $m(0) \rightarrow \infty$.

Das Teilchen wird also mit Wahrscheinlichkeit 1 in 4 absorbiert, die mittlere Schrittzahl bis zur Absorption ist unendlich.

Irrfahrt Mittlere Entfernung



Ein Teilchen startet in 0 und springt jede Sekunde mit der Wahrscheinlichkeit $1/2$ auf der Geraden einen Schritt nach links oder rechts. Wie groß ist die mittlere Entfernung vom Ursprung nach n Sekunden?

Sei X_n die Zufallsvariable mit Werten aus \mathbb{Z} , die den Ort nach n Schritten ergibt.

D sei die Zufallsvariable mit Werten aus $\{1, -1\}$, die einen Schritt beschreibt.

Offensichtlich gilt:

$$X_1 = D$$

$$X_n = X_{n-1} + D$$

Um die Entfernung zum Ursprung zu erhalten, betrachten wir zunächst die Quadrate

$$X_1^2 = D^2 = 1$$

$$\begin{aligned} X_n^2 &= (X_{n-1} + D)^2 \\ &= X_{n-1}^2 + 2X_{n-1}D + D^2 \end{aligned}$$

und gehen dann zum Erwartungswert über:

$$E[X_1^2] = 1$$

$$\begin{aligned} E[X_n^2] &= E[X_{n-1}^2] + \underbrace{E[2X_{n-1}D]}_{\text{Terme heben sich wegen } D = \pm 1 \text{ auf.}} + E[D^2] \\ &= E[X_{n-1}^2] + E[D^2] \end{aligned}$$

Mit der Rekursionsgleichung erhalten wir:

$$E[X_1^2] = 1$$

$$E[X_2^2] = 2$$

$$E[X_3^2] = 3$$

...

$$E[X_n^2] = n$$

Die mittlere Entfernung des Teilchens vom Ursprung beträgt somit $E[|X_n|] = \sqrt{n}$. Das Ergebnis kann für eine Irrfahrt in der Ebene verallgemeinert werden (Vektorrechnung, Skalarprodukt).