

Poisson-Verteilung

Simeon Poisson (1781 - 1840)

Für große n ($n \geq 100$) und kleine p ($p \leq 0,1$) fand Poisson eine überraschend gute Näherung für die Binomialverteilung. Betrachten wir für eine Bernoulli-Kette die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Treffers:

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= \binom{n}{1} \cdot p \cdot (1-p)^{n-1} && \mu = n \cdot p \text{ sei der (kleine) Erwartungswert, d. h. } p = \frac{\mu}{n}. \\ &= \binom{n}{1} \cdot \frac{\mu}{n} \cdot \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{n-1} \\ &= \underbrace{\mu \cdot \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n}_{\approx e^{-\mu}} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{-1}}_{\approx 1} = \mu \cdot e^{-\mu} \end{aligned}$$

Für beliebiges k gilt:

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1) \dots (n-(k-1))}{k!} \cdot \frac{\mu^k}{n^k} \cdot \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1) \dots (n-(k-1))}{n^k} \cdot \frac{\mu^k}{k!} \cdot \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{-k} \\ &= \underbrace{1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}_{\approx 1} \cdot \dots \cdot \frac{\mu^k}{k!} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n}_{\approx e^{-\mu}} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{-k}}_{\approx 1} \\ &= \frac{\mu^k}{k!} \cdot e^{-\mu} \end{aligned}$$

Eine Zufallsgröße X heißt *poissonverteilt*, falls die Wahrscheinlichkeiten für $k = 0, 1, 2, \dots$ Treffer mit

$$P(X = k) = \frac{\mu^k}{k!} \cdot e^{-\mu} \text{ berechnet werden.}$$

1. Von 100 Personen ist durchschnittlich eine Person farbenblind.
 - a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich unter 100 zufällig ausgewählten Personen mindestens zwei farbenblinde Personen?
 - b) Wie viele Personen müssen mindestens ausgewählt werden, damit sich darunter mit mindestens 95 %-iger Wahrscheinlichkeit wenigstens eine farbenblinde Person befindet?
2. Eine Auswertung der Jahresberichte über tödliche Unfälle infolge Hufschlags in 10 preußischen Kavallerieregimentern während 20 Jahren ergab:

Anzahl k tödlicher Unfälle	0	1	2	3	4
Anzahl der Berichte mit k Unfällen	109	65	22	3	1

Vergleiche die Werte mit theoretischen Werten.

Poisson-Verteilung Aufgaben

1. Von 100 Personen ist durchschnittlich eine Person farbenblind.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich unter 100 zufällig ausgewählten Personen mindestens zwei farbenblinde Personen?

$$\mu = 1, \quad P(X \geq 2) = 26,4\%$$

b) Wie viele Personen müssen mindestens ausgewählt werden, damit sich darunter mit mindestens 95%-iger Wahrscheinlichkeit wenigstens eine farbenblinde Person befindet?

$$\mu = \frac{n}{100}, \quad 1 - e^{-n \cdot 0,01} \geq 0,95 \implies n \geq 300$$

2. Eine Auswertung der Jahresberichte über tödliche Unfälle infolge Hufschlags in 10 preußischen Kavallerieregimentern während 20 Jahren ergab:

<i>Anzahl k tödlicher Unfälle</i>	0	1	2	3	4
<i>Anzahl der Berichte mit k Unfällen</i>	109	65	22	3	1

Vergleiche die Werte mit theoretischen Werten.

n Stärke eines Regiments,
p Wahrscheinlichkeit für jeden Kavalleristen, durch Hufschlag das Leben zu verlieren,

$$\mu = \frac{122}{200}$$

<i>Anzahl k tödlicher Unfälle</i>	0	1	2	3	4
$200 \cdot P_\mu(X = k)$	108,7	66,3	20,2	4,1	0,6

3. In einer Telefonzentrale kommen in der Minute durchschnittlich 3 Gespräche an.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommen dann in einer Minute mehr als 3 Gespräche an?

Denkt man sich eine Minute in n gleiche Zeitabschnitte zerlegt, die so klein sind, dass in jedem Abschnitt höchstens ein Gespräch ankommen kann, so liegt ein Bernoulli-Versuch mit $p = \frac{3}{n}$ vor. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit kann mit der Poisson-Näherung berechnet werden.

Die Poisson-Verteilung mit dem Parameter μ kann angewendet werden, wenn Ereignisse selten auftreten und n unbekannt ist.

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 35,3\%$$

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommen in fünf Minuten mindestens 20 Gespräche an?

$$\mu = 5 \cdot 3 \text{ (plausibel)}, \quad P(Y \geq 20) = 12,5\%$$

4. Eine Telefonauskunft wird durchschnittlich 12mal pro Stunde angewählt.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält die Auskunft

a) in den nächsten 5 Minuten keinen Anruf,

$$\mu = \frac{12}{60} \cdot 5 = 1, \quad P(X = 0) = 36,8\%$$

b) innerhalb von 10 Minuten mindestens 5 Anrufe,

$$\mu = 2, \quad P(X \geq 5) = 5,3\%$$

c) innerhalb von 20 Minuten höchstens 6 Anrufe?

$$\mu = 4, \quad P(X \leq 6) = 88,9\%$$

Poisson-Verteilung Aufgaben

5. Um die Häufigkeitsverteilung von einzeln lebenden Tieren zu untersuchen, wird eine größere quadratische Fläche in 10 mal 10 Felder unterteilt. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Tiere je Feld an. Das Ergebnis der Auszählung ist in der Tabelle festgehalten.

Anzahl k der Tiere in einem Feld	0	1	2	3	4	5	≥ 6
Anzahl der Felder mit k Tieren	30	35	22	10	2	1	0

Liegt der Häufigkeitsverteilung eine Poisson-Verteilung zugrunde?

Der Erwartungswert beträgt $\mu = 1,22$.

(In den GTR die Tabellenwerte in L1 und L2 eingeben und den Mittelwert mit $\text{mean}(L1, L2)$ bestimmen.)

Anzahl k der Tiere in einem Feld	0	1	2	3	4	5	≥ 6
$100 \cdot P_\mu(X = k)$	29,5	36,0	22,0	8,9	2,7	0,7	0,1

6. Eine Zufallsvariable X nimmt die Werte $0, \dots, 5$ an. Die Tabelle erfasst die absoluten Häufigkeiten. Die empirischen Werte lauten:

k	0	1	2	3	4	5
absolute Häufigkeiten	32	28	14	5	1	0

Wie lauten die relativen Häufigkeiten?

Liegt der Häufigkeitsverteilung eine Poisson-Verteilung zugrunde?

Der Erwartungswert beträgt $\mu = 0,94$.

Die theoretischen Werte lauten:

k	0	1	2	3	4	5
$80 \cdot P_\mu(X = k)$	31,3	29,4	13,8	4,3	1,0	0,2

Anhang

Behauptung: $e^{-\mu} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n$

Es gilt: $e = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$

Zu zeigen ist zunächst: $e^{-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k$

Dies folgt aus den Umformungen: $\left(1 - \frac{1}{k}\right)^k = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{k-1}\right)^k} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{k-1}\right)^{k-1} \left(1 + \frac{1}{k-1}\right)}$ ($k \geq 2$)

$e^{-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k \xrightarrow{(\)^\mu} e^{-\mu} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k\mu}$ Mit $n = k\mu$ folgt die Behauptung.

Der Erwartungswert einer Poisson-Verteilung ist offensichtlich $E(X) = \mu$.

Für die Varianz gilt: $V(X) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ p = \frac{\mu}{n}}} n \cdot p \cdot (1 - p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu \cdot \left(1 - \frac{\mu}{n}\right) = \mu$.

Die Varianz ist also genauso groß wie der Erwartungswert.