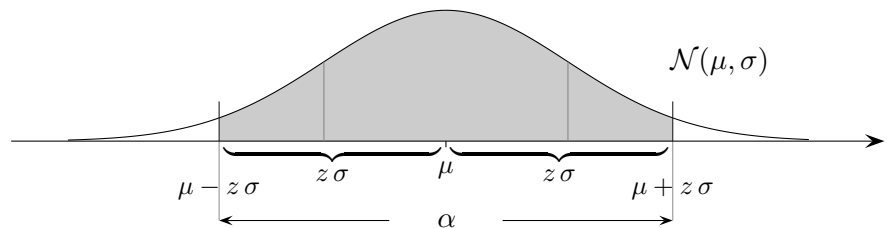
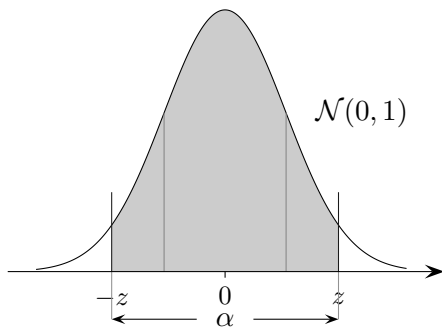


# Normalverteilung und Standardisierung



Die Normalverteilungen  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$  ergeben sich aus der Standardnormalverteilung  $\mathcal{N}(0, 1)$  (Gaussche Glockenkurve) durch strecken und stauchen um  $\sigma$  und verschieben um  $\mu$ . Das Intervall  $[-z, z]$  geht dabei in die  $z\sigma$ -Umgebung  $[\mu - z\sigma, \mu + z\sigma]$  von  $\mu$  über. Einem  $z$ -Wert von  $\mathcal{N}(0, 1)$  entspricht  $k = \mu + z\sigma$  von  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ . Umgekehrt wird dann einem  $k$ -Wert von  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$  der Wert  $z = \frac{k - \mu}{\sigma}$  zugeordnet.

Dies führt zu

$$P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$

bei Approximation der Binomialverteilung wäre  $\approx$  korrekter.

$$\underbrace{P(X \leq k)}_{\beta} = \Phi\left(\frac{k - \mu}{\sigma}\right)$$

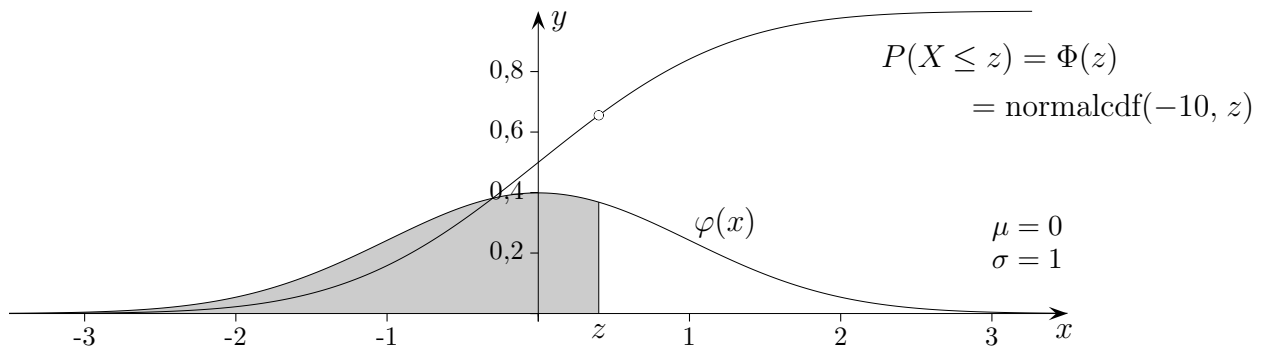
Falls  $\beta$  gegeben ist, folgt

$$\frac{k - \mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(\beta)$$

Dieses kann je nach Fragestellung nach  $k$ ,  $\mu$  oder  $\sigma$  umgestellt werden.

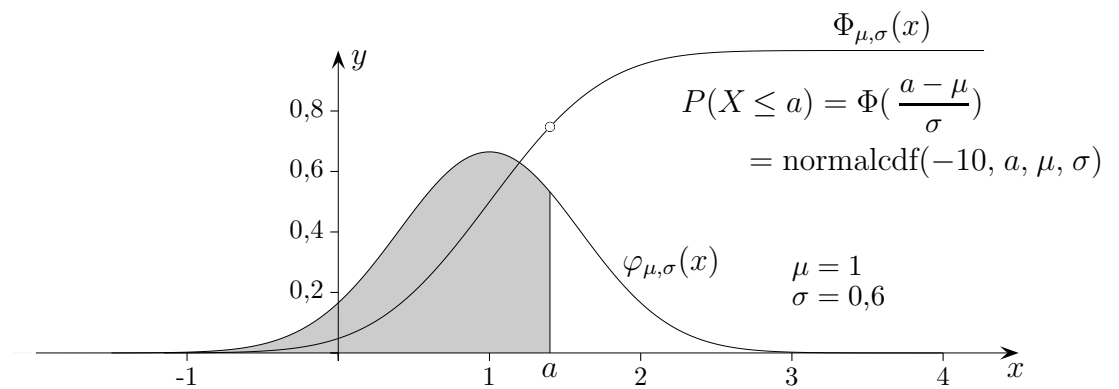
GTR

$$\Phi^{-1}(\beta) = \text{invNorm}(\beta)$$



$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$  ist eine monoton wachsende Integralfunktion.

Somit existiert die Umkehrfunktion  $\Phi^{-1}(y) = \text{invNorm}(y)$  für die Standardnormalverteilung, bzw.  $\text{invNorm}(y, \mu, \sigma)$  für beliebige Normalverteilungen, um zu gegebener Wahrscheinlichkeit  $y$ ,  $0 < y < 1$ , den  $z$ -Wert zu ermitteln.

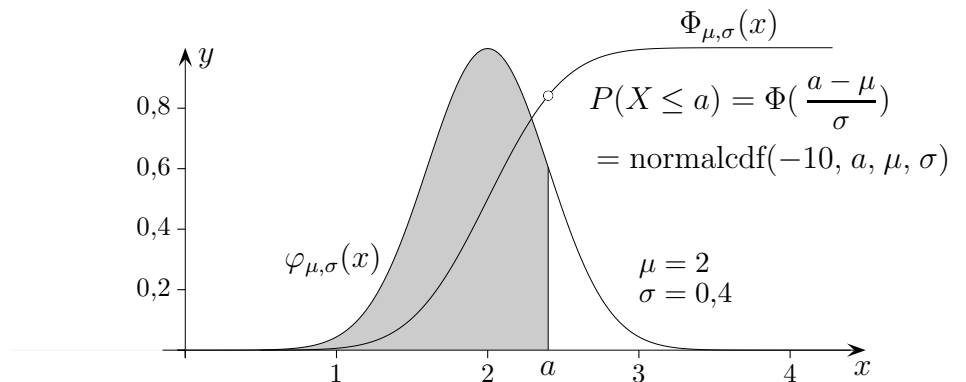


Aus  $a = \mu + z\sigma$  folgt

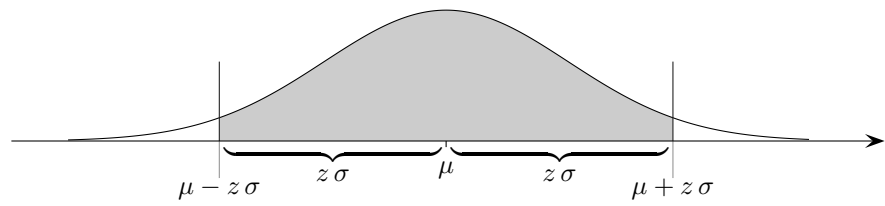
$$z = \frac{a - \mu}{\sigma}.$$

Der Inhalt der Fläche unter  $\varphi_{\mu,\sigma}(x)$  bis zur rechten Grenze  $a$  ist daher

$$\Phi_{\mu,\sigma}(a) = \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right).$$



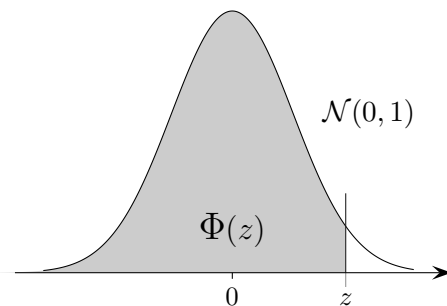
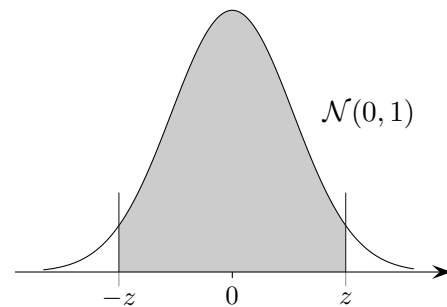
## $z\sigma$ -Umgebung



$$P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P(\mu - z\sigma \leq X \leq \mu + z\sigma) = \Phi(z) - \Phi(-z) = 2\Phi(z) - 1$$

Erläutere die letzte Zeile.



a) Sei  $P(X \leq 15) = 20\%$ ,  $\mu = 25$   
gesucht  $\sigma$

b) Sei  $P(X \leq 20) = 10\%$ ,  $\sigma = 5$   
gesucht  $\mu$

c)  $P(X \leq 30) = 70\%$   
 $P(X \leq 24) = 10\%$   
 $\mu, \sigma = ?$

- a) Sei  $P(X \leq 15) = 20\%$ ,  $\mu = 25$   
gesucht  $\sigma$

Lösung

$$\Phi\left(\frac{15 - \mu}{\sigma}\right) = 0,2$$

$$\frac{15 - \mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(0,2)$$

$$\sigma = \frac{15 - \mu}{\Phi^{-1}(0,2)} = 11,9$$

- b) Sei  $P(X \leq 20) = 10\%$ ,  $\sigma = 5$   
gesucht  $\mu$

Lösung

$$\Phi\left(\frac{20 - \mu}{\sigma}\right) = 0,1$$

$$\frac{20 - \mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(0,1)$$

$$\mu = 20 - \sigma \cdot \Phi^{-1}(0,1) = 26,4$$

- c)  $P(X \leq 30) = 70\%$   
 $P(X \leq 24) = 10\%$   
 $\mu, \sigma = ?$

Lösung

$$P(Y \leq 30) = \Phi\left(\frac{30 - \mu}{\sigma}\right) = 70\%$$

$$P(Y \leq 24) = \Phi\left(\frac{24 - \mu}{\sigma}\right) = 10\%$$

$$\Phi^{-1}(0,70) = 0,524$$

$$\Phi^{-1}(0,10) = -1,282$$

$$\mu = 28,3$$

$$\sigma = 3,3$$

# Normalverteilung, GTR

a)  $P(X \leq b) = 80\%$ ,  $\mu = 50$ ,  $\sigma = 3$  (in  $g$ )  
gesucht  $b$

b) Sei  $P(1 \leq X \leq 2) = 20\%$ ,  $\sigma = 0,5$   
gesucht  $\mu$

c) Sei  $P(X \leq 20) = 15\%$ ,  $\sigma = 5$  (in  $g$ )  
gesucht  $\mu$

d) Sei  $P(X \leq 40) = 80\%$ ,  $\mu = 36$  (in  $g$ )  
gesucht  $\sigma$

e)  $P(X \leq 34) = 12\%$  ( $X$  in  $g$ )  
 $P(X \geq 44) = 5\%$   
 $\mu, \sigma = ?$

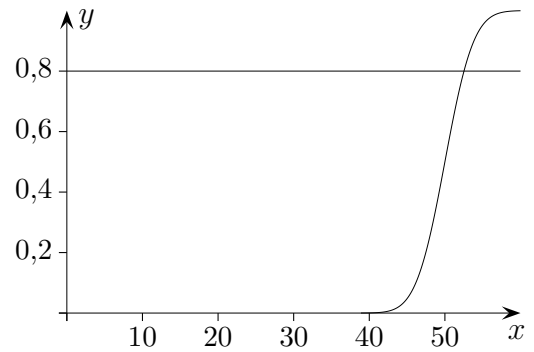
Wenn die Einheit z.B. Gramm ist, wird  $X \geq 0$  vorausgesetzt.  
Die Verwendung der Normalverteilung impliziert dann  $P(0 \leq X \leq \mu) = 0,5$ .  
Die linke Grenze für  $X$  in  $P(X \leq a)$  ist in diesem Fall also 0.

# Normalverteilung, GTR

- a)  $P(X \leq b) = 80\%$ ,  $\mu = 50$ ,  $\sigma = 3$  (in  $g$ )  
gesucht  $b$

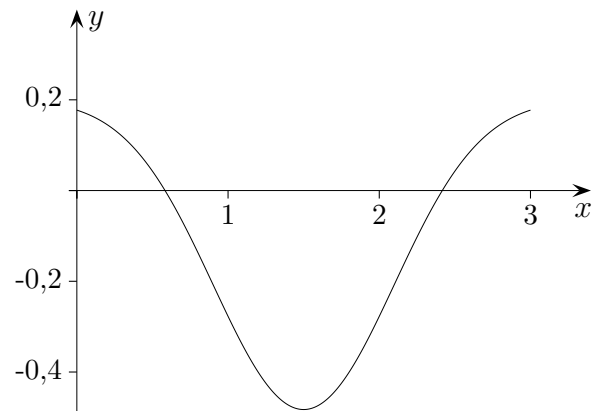
Schnittstelle von  
 $\setminus Y_1 = \text{normalcdf}(0, X, 50, 3)$   
 $\setminus Y_2 = 0,8$   
 $b = 52,52$

Jedoch geht es einfacher mit  $b = \text{invNorm}(0.8, 50, 3)$ .



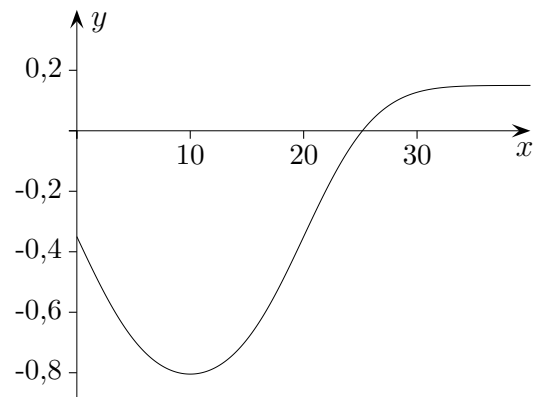
- b) Sei  $P(1 \leq X \leq 2) = 20\%$ ,  $\sigma = 0,5$   
gesucht  $\mu$

Nullstellen von  
 $\setminus Y_1 = 0.2 - \text{normalcdf}(1, 2, X, 0.5)$   
 $\mu_1 = 0,583$   
 $\mu_2 = 2,417$



- c) Sei  $P(X \leq 20) = 15\%$ ,  $\sigma = 5$  (in  $g$ )  
gesucht  $\mu$

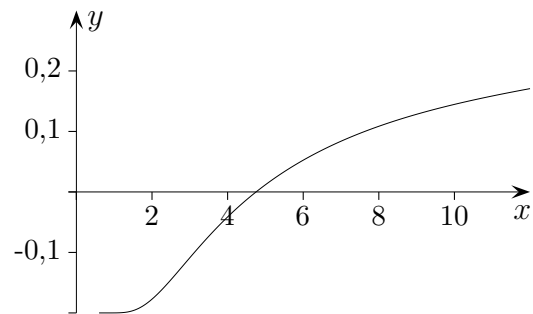
Nullstelle von  
 $\setminus Y_1 = 0.15 - \text{normalcdf}(0, 20, X, 5)$   
 $\mu = 25,182$



# Normalverteilung, GTR

- d) Sei  $P(X \leq 40) = 80\%$ ,  $\mu = 36$  (in g)  
 gesucht  $\sigma$

Nullstelle von  
 $\backslash Y_1 = 0.80 - \text{normalcdf}(0, 40, 36, X)$   
 $\sigma = 4,753$



- e)  $P(X \leq 34) = 12\%$  ( $X$  in g)  
 $P(X \geq 44) = 5\%$   
 $\mu, \sigma = ?$

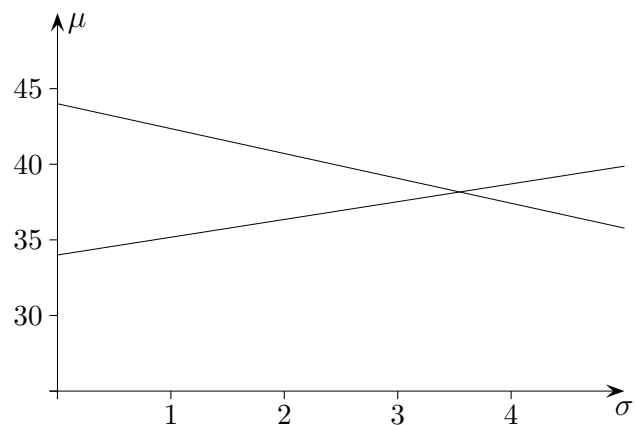
$$P(Y \leq 34) = \Phi\left(\frac{34 - \mu}{\sigma}\right) = 12\% \quad \Rightarrow \quad \mu = 34 - \Phi^{-1}(0,12) \cdot \sigma$$

$$P(Y \geq 44) = 1 - \Phi\left(\frac{44 - \mu}{\sigma}\right) = 5\% \quad \Rightarrow \quad \mu = 44 - \Phi^{-1}(0,95) \cdot \sigma$$

Schnittpunkt

$$\mu = 38,167$$

$$\sigma = 3,546$$



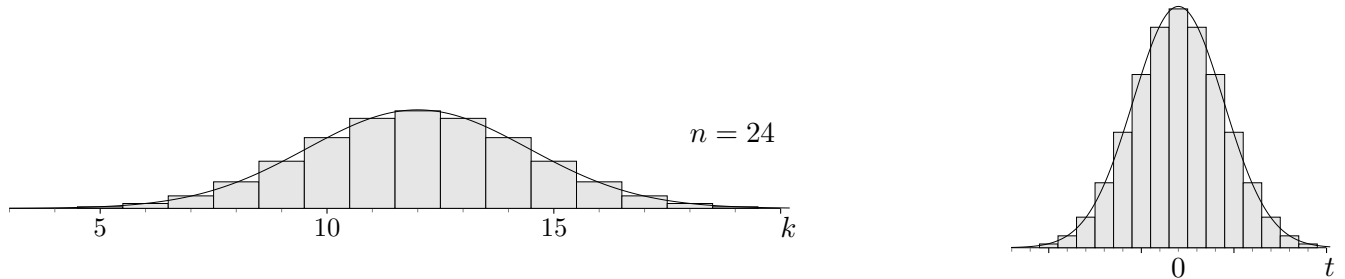
Nur b) muss grafisch-numerisch bearbeitet werden.

Für a), c) und d) führt die Verwendung von  $\Phi^{-1}$  zur Lösung,  
 in e) auch ein LGS.



# Standardisierte Normalverteilung

Um das Verhalten von Binomialverteilungen für  $n \rightarrow \infty$  zu untersuchen (hier für  $p = \frac{1}{2}$  dargestellt), werden die  $k$ -Werte in ihrer relativen Lage zum Erwartungswert  $\mu$  betrachtet.

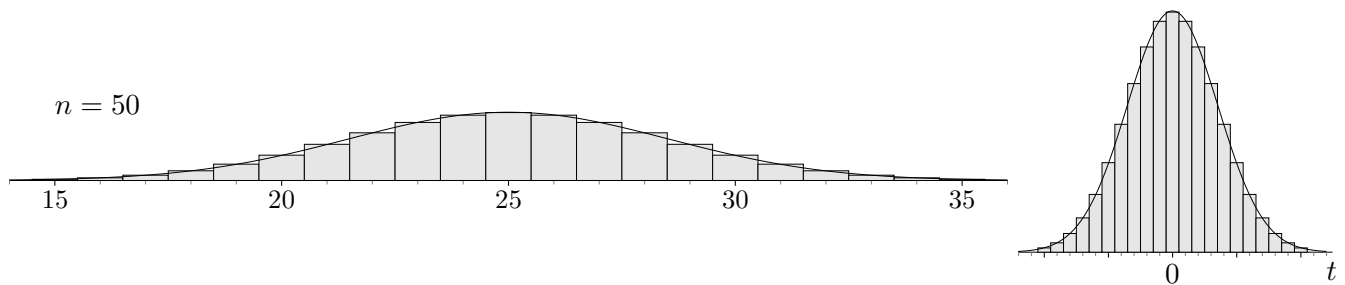


$$k = \mu + t \cdot \sigma$$

$$\iff k - \mu = t \cdot \sigma$$

$$\iff t = \frac{k - \mu}{\sigma}$$

Der  $t$ -Wert gibt an, um welches Vielfache von  $\sigma$   $k$  vom Erwartungswert  $\mu$  abweicht. Für  $n \rightarrow \infty$  braucht man nur kleine  $t$ -Werte zu berücksichtigen. Um über der  $t$ -Achse ein Histogramm aufzutragen, werden die Rechtecksbreiten durch  $\sigma$  dividiert. Damit die Flächeninhalte gleich bleiben, müssen die Höhen mit  $\sigma$  multipliziert werden.

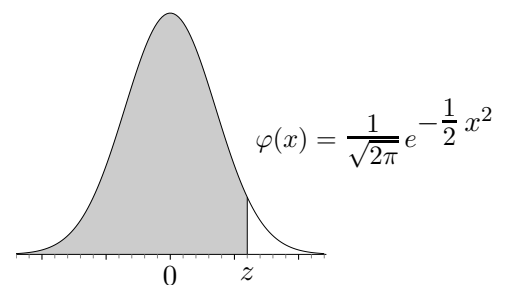


Nun ist absehbar, was sich für  $n \rightarrow \infty$  ergibt. Die standardisierten Verteilungen werden durch die Gaußsche Glockenkurve  $\varphi(x)$  approximiert. Deren Verteilungsfunktion  $\Phi(z)$  gibt den Flächeninhalt unter der Kurve von  $-\infty$  bis  $z$  an.

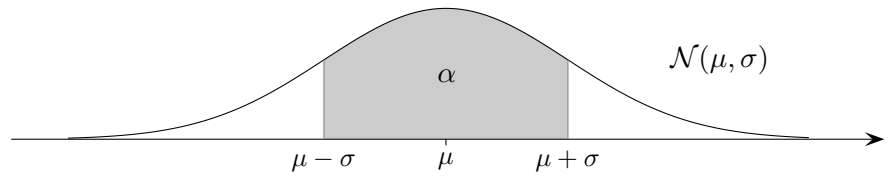
Wir erhalten:

$$P(a \leq X \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

(ohne Stetigkeitskorrektur)



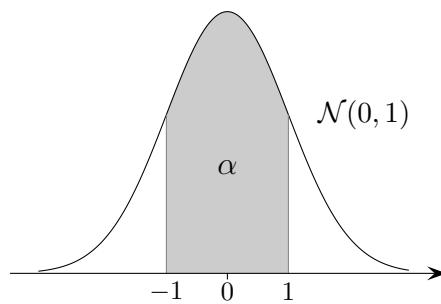
## $\sigma$ -Umgebung



Wie groß ist  $\alpha$ ?

Antwort:

$\mathcal{N}(\mu, \sigma)$  geht aus  $\mathcal{N}(0, 1)$  durch Verschieben, Strecken und Stauchen hervor.  
0 geht in  $\mu$  über,  $-1$  in  $\mu - \sigma$ ,  $1$  in  $\mu + \sigma$ .



$$\alpha = \text{normalcdf}(-1, 1) = 68,3\%$$

Weiter erhalten wir:

$$P(2\sigma\text{-Umgebung}) = \text{normalcdf}(-2, 2) = 95,4\%$$

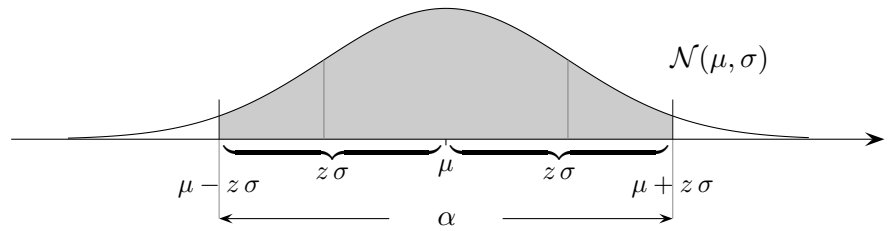
$$P(3\sigma\text{-Umgebung}) = \text{normalcdf}(-3, 3) = 99,7\%$$

Sei für eine Binomialverteilung  $n = 5000$ ,  $p = 0,5$  gegeben.  
Welche Trefferzahlen sind mit 95,4%iger Wahrscheinlichkeit zu erwarten?  
(Der Bereich heißt auch Schwankungsintervall.)

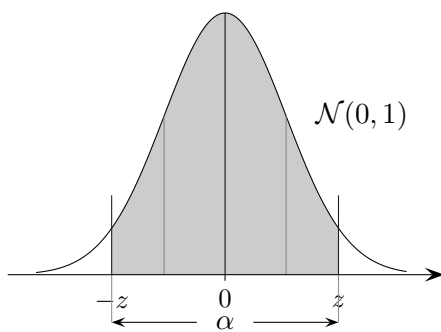
Sei für eine Binomialverteilung  $n = 5000$ ,  $p = 0,5$  gegeben.  
Welche Trefferzahlen sind mit 95,4%iger Wahrscheinlichkeit zu erwarten?  
(Der Bereich heißt auch Schwankungsintervall.)

[2430; 2570]

# $z\sigma$ -Umgebung



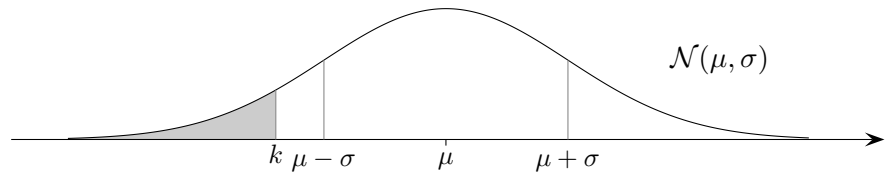
$\alpha = 90\%$  (z. B.) gegeben,  
 $z$  gesucht



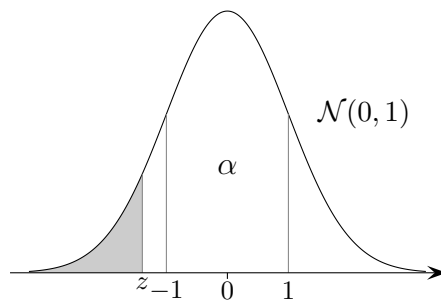
Begründe:

$$z = \underbrace{\text{invNorm}}_{\Phi^{-1}}\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = \text{invNorm}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)$$

## $\mu, \sigma$ ermitteln



$P(X \leq 235) = 9\%$ ,  $\mu = 250$   
gesucht  $\sigma$



Welcher Zusammenhang besteht zwischen  $k$  und  $z$ ?

Antwort:

$$\frac{k - \mu}{\sigma} = z \quad (\text{Setze für } k \text{ } \mu - \sigma, \text{ bzw. } \mu + \sigma \text{ ein.})$$

$$\underbrace{\text{normalcdf}}_{\Phi} \left( \frac{k - \mu}{\sigma} \right) = P(X \leq k) \quad | \quad \Phi^{-1}$$

...

$$\sigma = 11,2$$