1. Hotelbetten, Auto
2. Flugbuchungen
3. Telefondauer, Körpergrößen
4. Mini-Van
5. Daten analysieren
6. Betriebszeitung
7. BSE
8. Rinderseuche
9. Bahnverkehr
10. Fernsehsender
11. Überraschungseier
12. Grippe-Impfung
13. Flugbuchungen
14. Zielschießen
15. Urnen
16. Delegation
17. Weißbrot
18. Glühlampen
19. Quizshow
20. Ventil
21. Fan
22. Rückerstattung
23. Olivenöl
24. Reißzwecke
25. Rückerstattung
26. Galton-Brett
27. Tischtennisbälle
28. Fahrzeit
29. Mobiltelefon
30. Aufgaben zur Binomial- und Normalverteilung

↑ Stochastik Hotelbetten-Aufgabe

1. Bettbestellungen anlässlich von Kongressen werden mit der Wahrscheinlichkeit von 15 % storniert. Ein Hotel stellt 55 Betten zur Verfügung und nimmt 60 Reservierungen an. Mit welcher Wahrscheinlichkeit riskiert die Hotelleitung in Verlegenheit zu geraten?
2. Die Hotelleitung nimmt 50 Bettreservierungen an. Die Wahrscheinlichkeit für eine Absage beträgt 15 %. Wie viele Betten müssen bereitgehalten werden, wenn das Risiko, dass die Bettenanzahl nicht ausreicht, unter 5 % bleiben soll?
3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 80 Bettreservierungen und einer vermuteten Stornierungsquote von 10 % die tatsächliche Belegungszahl zwischen 68 und 76 liegt (Grenzen eingeschlossen)?

   Wie lautet das Ergebnis bei Verwendung der Normalverteilung (beachte, dass die Laplace-Bedingung $\sigma > 3$ nicht erfüllt ist)?

↑ Auto-Aufgabe

Um den Anteil p der Fahrer festzustellen, die mit überhöhter Geschwindigkeit an einer Baustelle vorbeifahren, werden von zufällig ausgewählten Fahrzeugen die Geschwindigkeit gemessen.

1. Bestimme in Abhängigkeit von p die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Stichprobe von 40 Autos
   a) genau 10 Autos,
   b) genau die ersten 10 Autos,
   c) die ersten 20 nicht, dann aber doch noch 10 Autos zu schnell fahren?
2. Wie groß muss die Wahrscheinlichkeit p mindestens sein, damit in einer Stichprobe von 30 Autos mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95 % wenigstens eines zu finden ist, das zu schnell fährt?
3. Der Anteil der zu schnell fahrenden Autos beträgt $p = 0{,}20$. Anhand einer Stichprobe der Länge $n = 100$ soll nachgewiesen werden (5 %-Signifikanzniveau), dass Umbaumaßnahmen zu einer Senkung der Geschwindigkeitsübertretungen geführt haben. Wie lautet die Entscheidungsregel?

   Wie groß ist der Fehler 2. Art, falls der Anteil der zu schnell fahrenden Autos auf $p = 0{,}12$ gesenkt werden konnte? Was besagt dieser Fehler?

↑ Hotelbetten-Aufgabe Lösungshinweise

1. Bettbestellungen anlässlich von Kongressen werden mit der Wahrscheinlichkeit von 15 % storniert. Ein Hotel stellt 55 Betten zur Verfügung und nimmt 60 Reservierungen an. Mit welcher Wahrscheinlichkeit riskiert die Hotelleitung in Verlegenheit zu geraten?
   $P_{0,85}^{60}(X \geq 56) = 4{,}2\,\%$

2. Die Hotelleitung nimmt 50 Bettreservierungen an. Die Wahrscheinlichkeit für eine Absage beträgt 15 %. Wie viele Betten müssen bereitgehalten werden, wenn das Risiko, dass die Bettenanzahl nicht ausreicht, unter 5 % bleiben soll?
   $P_{0,85}^{50}(X \geq 47) = 4{,}6\,\%$ mindestens 46 Betten

3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 80 Bettreservierungen und einer vermuteten Stornierungsquote von 10 % die tatsächliche Belegungszahl zwischen 68 und 76 liegt (Grenzen eingeschlossen)?

   Wie lautet das Ergebnis bei Verwendung der Normalverteilung (beachte, dass die Laplace-Bedingung $\sigma > 3$ nicht erfüllt ist)?
   $P_{0,9}^{80}(68 \leq X \leq 76) = 91{,}1\,\%$

   Normalverteilung mit der Stetigkeitskorrektur: $P(67{,}5 \leq X \leq 76{,}5) = 90{,}6\,\%$

↑ Auto-Aufgabe Lösungshinweise

Um den Anteil p der Fahrer festzustellen, die mit überhöhter Geschwindigkeit an einer Baustelle vorbeifahren, werden von zufällig ausgewählten Fahrzeugen die Geschwindigkeit gemessen.

1. Bestimme in Abhängigkeit von p die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Stichprobe von 40 Autos
   a) genau 10 Autos, $P_p^{40}(X = 10) = \binom{40}{10} p^{10} \cdot (1-p)^{30}$
   b) genau die ersten 10 Autos, $p^{10} \cdot (1-p)^{30}$
   c) die ersten 20 nicht, dann aber doch noch 10 Autos zu schnell fahren?
   $(1-p)^{20} \cdot \binom{20}{10} p^{10} \cdot (1-p)^{10} = \binom{20}{10} p^{10} \cdot (1-p)^{30}$

2. Wie groß muss die Wahrscheinlichkeit p mindestens sein, damit in einer Stichprobe von 30 Autos mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95 % wenigstens eines zu finden ist, das zu schnell fährt?
   $1 - (1-p)^{30} \geq 0{,}95 \implies p \geq 9{,}5\,\%$

3. Der Anteil der zu schnell fahrenden Autos beträgt $p = 0{,}20$. Anhand einer Stichprobe der Länge $n = 100$ soll nachgewiesen werden (5 %-Signifikanzniveau), dass Umbaumaßnahmen zu einer Senkung der Geschwindigkeitsübertretungen geführt haben. Wie lautet die Entscheidungsregel?

   Wie groß ist der Fehler 2. Art, falls der Anteil der zu schnell fahrenden Autos auf $p = 0{,}12$ gesenkt werden konnte? Was besagt dieser Fehler?
   $P_{0,2}^{100}(X \leq k) \leq 0{,}05 \implies \overline{A} = \{0, \ldots, 13\}$
   (Ablehnungsbereich für die Nullhypothese $H_0\colon p \geq 20\,\%$)
   $\beta = P_{0,12}^{100}(X \geq 14) = 31{,}1\,\%$

↑ Flugbuchungen-Aufgabe

Auf einer bestimmten Strecke verwendet eine Fluggesellschaft Flugzeuge mit 100 Plätzen. Die Belegungsstatistik weist aus, dass die Flüge auf dieser Strecke vorab stets ausgebucht sind. Allerdings werden dann im Mittel 10 % der gebuchten Plätze kurzfristig storniert.

Für die Fluggesellschaft ist die Anzahl der Passagiere von Interesse, die bei Schließung der Passagierliste den Flug tatsächlich antreten wollen.

a) Unter welchen Annahmen sind die möglichen Anzahlen dieser Passagiere binomialverteilt?
Nennen Sie Fälle, in denen diese Annahmen nicht zutreffen.

Im Folgenden wird angenommen, dass die möglichen Anzahlen dieser Passagiere binomialverteilt sind. Durch eine Person, die tatsächlich fliegt, nimmt die Fluggesellschaft 200 € ein, bei einer Stornierung nur 100 €.

b) Wie groß ist jeweils die Wahrscheinlichkeit, dass beim nächsten Flug
- genau 84 Plätze,
- höchstens 84 Plätze,
- mindestens 90 Plätze

tatsächlich genutzt werden?

Welche Einnahmen kann die Fluggesellschaft pro Flug erwarten?

Um die Flugzeuge besser auszulasten, bietet die Fluggesellschaft stets 8 % mehr Plätze als verfügbar zum Verkauf an. Da auch diese Plätze alle im Voraus gebucht werden, geht die Fluggesellschaft damit das Risiko einer Überbuchung ein.

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es zu Überbuchungen kommt?

d) Für jeden Fluggast, der wegen Überbuchung abgewiesen werden muss, entstehen der Fluggesellschaft negative Einnahmen (Unkosten) in Höhe von 1000 €. Wie groß sind die Einnahmen der Fluggesellschaft, wenn bei Schließung der Passagierliste genau 105 Personen den Flug antreten möchten?

↑ Flugbuchungen-Aufgabe Lösungshinweise

Auf einer bestimmten Strecke verwendet eine Fluggesellschaft Flugzeuge mit 100 Plätzen. Die Belegungsstatistik weist aus, dass die Flüge auf dieser Strecke vorab stets ausgebucht sind. Allerdings werden dann im Mittel 10 % der gebuchten Plätze kurzfristig storniert.

Für die Fluggesellschaft ist die Anzahl der Passagiere von Interesse, die bei Schließung der Passagierliste den Flug tatsächlich antreten wollen.

a) Unter welchen Annahmen sind die möglichen Anzahlen dieser Passagiere binomialverteilt?
Nennen Sie Fälle, in denen diese Annahmen nicht zutreffen.

unterschiedliches Verhalten von Kundengruppen, ...

Im Folgenden wird angenommen, dass die möglichen Anzahlen dieser Passagiere binomialverteilt sind. Durch eine Person, die tatsächlich fliegt, nimmt die Fluggesellschaft 200 € ein, bei einer Stornierung nur 100 €.

b) Wie groß ist jeweils die Wahrscheinlichkeit, dass beim nächsten Flug

- genau 84 Plätze, 1,9 %
- höchstens 84 Plätze, 4,0 %
- mindestens 90 Plätze 58,3 %

tatsächlich genutzt werden?

Welche Einnahmen kann die Fluggesellschaft pro Flug erwarten? 19000 €

Um die Flugzeuge besser auszulasten, bietet die Fluggesellschaft stets 8 % mehr Plätze als verfügbar zum Verkauf an. Da auch diese Plätze alle im Voraus gebucht werden, geht die Fluggesellschaft damit das Risiko einer Überbuchung ein.

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es zu Überbuchungen kommt? $P_{0,9}^{108}(X \geq 101) = 14{,}3\,\%$

d) Für jeden Fluggast, der wegen Überbuchung abgewiesen werden muss, entstehen der Fluggesellschaft negative Einnahmen (Unkosten) in Höhe von 1000 €. Wie groß sind die Einnahmen der Fluggesellschaft, wenn bei Schließung der Passagierliste genau 105 Personen den Flug antreten möchten?

in €: $100 \cdot 200 + 3 \cdot 100 - 5 \cdot 1000 = 15300$

↑ Telefondauer-Aufgabe

Die Längen von Telefongesprächen lassen sich als Funktionswerte einer Zufallsvariablen X auffassen. X soll so festgelegt sein, dass 5 Minuten als eine Zeiteinheit dient. Die Dichtefunktion wird durch die Funktion $d(x) = 4x \cdot e^{-2x}$, $x \geq 0$, approximiert.

a) Zeigen Sie, dass $d(x)$ den Bedingungen einer Dichtefunktion genügt. Bestimmen Sie die zugehörige Verteilungsfunktion $D(x)$.

b) Wie viel Prozent aller Gespräche sind länger bzw. kürzer als μ (Erwartungswert) Zeiteinheiten? Berechnen Sie, wie viel Prozent aller Gespräche in den Intervallen $[\mu - \sigma; \mu]$ und $[\mu; \mu + \sigma]$ liegen, wobei σ die Standardabweichung ist.

c) Berechnen Sie die Stelle x_M, an der $d(x)$ ein Maximum besitzt. Vergleichen Sie x_M und μ und begründen Sie den Unterschied.

Hinweis:

$$\int x^2 \cdot e^{-2x}\, dx = -\left(\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4} \right) \cdot e^{-2x} + C$$

↑ Körpergrößen-Aufgabe

Aufgrund von umfangreichen Stichproben weiß man, dass bei 18- bis 20-jährigen Frauen 9,8 % höchstens 159,6 cm und 9,8 % mindestens 176,4 cm sind. Die Körpergröße kann als normalverteilt angesehen werden.

Wie viel Prozent sind

a) mindestens 180 cm,

b) höchstens 160 cm,

c) mindestens 163 cm, höchstens 173 cm groß?

Ergebnisse:

$\mu = 168$, beachte die Symmetrie der Normalverteilung

$P(X \leq 159{,}6) = \Phi\left(\frac{159{,}6 - \mu}{\sigma} \right) = 9{,}8\,\% \quad \Longrightarrow \quad \ldots$

$\sigma = 6{,}5$

a) $P(X \geq 180) = 3{,}2\,\%$

b) $P(X \leq 160) = 10{,}9\,\%$

c) $P(163 \leq X \leq 173) = 55{,}8\,\%$

Im Gegensatz zur Binomialverteilung ist es bei der Normalverteilung nicht erforderlich, zwischen $<$ und $\leq$ zu unterscheiden.
Werden die Körpergrößen auf cm gerundet angegeben, so ist z. B. mit 170 cm das Intervall $[169{,}5;\, 170{,}5[$ gemeint, wobei die linke Klammer eingeschlossen und die rechte Klammer ausgeschlossen bedeutet.

↑ Mini-Van-Aufgabe EPA, geändert

Der Automobilkonzern PSW stellt einen neuen Mini-Van her, der sich u. a. durch geringen Verbrauch auszeichnen soll. Bei 100 Testfahrzeugen mit einem 20-Liter-Tank wurde die Anzahl N für den Aktionsradius X (in km) gemessen und in der folgenden Tabelle festgehalten:

X	$(420; 440]$	$(440; 460]$	$(460; 480]$	$(480; 500]$	$(500; 520]$	$(520; 540]$	$(540; 560]$	$(560; 580]$	$(580; 600]$
N	2	10	14	25	21	16	8	3	1

a) Erläutern Sie, dass die Zufallsgröße X näherungsweise als normalverteilt angenommen werden kann und bestimmen Sie Näherungswerte für den Erwartungswert und die Standardabweichung der Zufallsgröße X.

b) Ermitteln Sie damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewähltes Testfahrzeug einen Aktionsradius von höchstens $460\,km$ hat und vergleichen Sie das Ergebnis mit den empirischen Werten.

c) Welchen Abstand dürfen zwei Tankstellen T_1 und T_2 höchstens voneinander haben, wenn man mit der Wahrscheinlichkeit von 0,95 mit einer Tankfüllung von T_1 nach T_2 kommen will?

d) Der Mini-Van soll als neues Spar-Auto mit entsprechend kleinem 20-Liter-Tank in der Presse vorgestellt werden. Die Werbeabteilung schlägt vor, den Durchschnittsverbrauch mit 3,9 Litern pro $100\,km$ anzugeben. Die Techniker dagegen schlagen vor, den Verbrauch besser mit 4,2 Litern pro $100\,km$ anzugeben. Welche Gründe könnten zu diesen unterschiedlichen Empfehlungen geführt haben? Beurteilen Sie beide Vorschläge quantitativ.

↑ Mini-Van-Aufgabe   EPA, geändert

Der Automobilkonzern PSW stellt einen neuen Mini-Van her, der sich u. a. durch geringen Verbrauch auszeichnen soll. Bei 100 Testfahrzeugen mit einem 20-Liter-Tank wurde die Anzahl N für den Aktionsradius X (in km) gemessen und in der folgenden Tabelle festgehalten:

X	(420; 440]	(440; 460]	(460; 480]	(480; 500]	(500; 520]	(520; 540]	(540; 560]	(560; 580]	(580; 600]
N	2	10	14	25	21	16	8	3	1

a) Erläutern Sie, dass die Zufallsgröße X näherungsweise als normalverteilt angenommen werden kann und bestimmen Sie Näherungswerte für den Erwartungswert und die Standardabweichung der Zufallsgröße X.

b) Ermitteln Sie damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewähltes Testfahrzeug einen Aktionsradius von höchstens 460 km hat und vergleichen Sie das Ergebnis mit den empirischen Werten.

c) Welchen Abstand dürfen zwei Tankstellen T_1 und T_2 höchstens voneinander haben, wenn man mit der Wahrscheinlichkeit von 0,95 mit einer Tankfüllung von T_1 nach T_2 kommen will?

d) Der Mini-Van soll als neues Spar-Auto mit entsprechend kleinem 20-Liter-Tank in der Presse vorgestellt werden. Die Werbeabteilung schlägt vor, den Durchschnittsverbrauch mit 3,9 Litern pro 100 km anzugeben. Die Techniker dagegen schlagen vor, den Verbrauch besser mit 4,2 Litern pro 100 km anzugeben. Welche Gründe könnten zu diesen unterschiedlichen Empfehlungen geführt haben? Beurteilen Sie beide Vorschläge quantitativ.

Ergebnisse:

a) $E(X) = 500{,}8$
$\sigma_X = 33{,}0$

b) 10,8 %

c) 446,5 km

d) Mit 3,9 Litern (höchstens) pro 100 km beträgt der durchschnittliche Aktionsradius (mindestens) 512,8 km ($E(X) = 500{,}8$).
$P(X \geq 512{,}8) = 35{,}8\,\%$
35,8 % der Testfahrzeuge können dies also erfüllen.

Mit 4,2 Litern pro 100 km beträgt der durchschnittliche Aktionsradius 476,2 km.
$P(X \geq 476{,}2) = 77{,}2\,\%$
Nun sind es 77,2 % der Testfahrzeuge, die dies erfüllen können.

Oder:
Der durchschnittliche Verbrauch Y beträgt 4,0 Liter pro 100 km, $\sigma_Y = 0{,}26$.
$P(Y \leq 3{,}9) = 35{,}0\,\%$
$P(Y \leq 4{,}2) = 77{,}9\,\%$

↑ Daten analysieren

In einer Stichprobe wurden die Körpergrößen von 100 Personen ermittelt.
Bestimmen Sie den Mittelwert und die Standardabweichung.

Klassenmitte (cm)	162	164,5	167	169,5	172	174,5	177	179,5	182	184,5	187
absolute Häufigkeit	1	2	5	8	16	17	14	19	8	4	6

Gehen Sie von einer Normalverteilung aus und ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person nicht größer als 171 *cm* ist.

Ergebnisse

$\mu = 176{,}1$
$\sigma = 5{,}5$

$P(X \leq 171) = 17{,}7\%$

↑ Betriebszeitung

In einem Betrieb mit 1200 Angestellten wird eine Betriebszeitung herausgegeben. Im Durchschnitt wird diese von 75 % der Belegschaft gekauft.

a) Es stehen von jeder Auflage 920 Exemplare zum Verkauf bereit.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit

   1) kann die Nachfrage gedeckt werden,

   2) reicht diese Anzahl bei allen 3 Ausgaben eines Jahrgangs aus?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der verkauften Exemplare um höchstens 15 vom Erwartungswert abweicht?

c) Bei der Herstellung der Zeitung treten bei 7 % der Zeitungen Fehler auf, sodass sie nicht verkauft werden können. Wie viele Zeitungen müssen mindestens hergestellt werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95 % wenigstens 920 Exemplare zum Verkauf stehen?

a) *1)* $P_{0,75}^{1200}(X \le 920) = \ 91{,}5\,\%$

   2) $0{,}915^3 = 76{,}6\,\%$

b) $P_{0,75}^{1200}(885 \le X \le 915) = 69{,}9\,\%$

c) $P_{0,93}^{n}(Y \ge 920) > 95\,\%$

$$\mu = 0{,}93 \cdot n, \quad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}, \qquad \Phi\Big(\frac{919-\mu}{\sigma}\Big) < \ 0{,}05 \quad \Longrightarrow \quad n \ge 1003$$

GTR: Solver $0 = 1-$ normalcdf$(0, 919.5, 0.93\text{X}, \sqrt{X \cdot 0.93 \cdot 0.07}\ ) \ - \ 0.95$

↑ BSE

a) Seit dem 1.10.2000 darf in Würsten kein Risikomaterial (unter anderem Gehirn, Rückenmark) mehr verarbeitet werden. Tests haben ergeben, dass jedoch in 4 % aller Würste Risikomaterial enthalten ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in 50 zufällig ausgesuchten Würsten

  i) mindestens drei und höchstens sechs Würste mit Risikomaterial enthalten sind?

  ii) die ersten 20 Würste ohne Risikomaterial sind und in den restlichen Würsten sich mehr als 3 mit Risikomaterial befinden?

b) Bei einem Schnelltest werden 95 % der BSE-Kühe (also an BSE erkrankte Kühe) als solche erkannt. Der Test arbeitet jedoch fehlerhaft und stuft irrtümlich 2 % der Nicht-BSE-Kühe als BSE-Kühe ein.

  (1) In Deutschland geht man davon aus, dass $p = 0{,}02\,\%$ (!) aller Kühe an BSE erkrankt sind.
  Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Kuh wirklich an BSE erkrankt ist, wenn sie vom Test als BSE-Kuh eingestuft wird?
  Stellen Sie diese Wahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von p grafisch dar und interpretieren Sie den Graphen im Sachzusammenhang.

  (2) Ein Mediziner behauptet, dass die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kuh wirklich an BSE erkrankt ist, wenn der Test sie als BSE-Kuh eingestuft hat, 50 % beträgt. Ermitteln Sie den Anteil an BSE-Kühen in Deutschland, der diesem Ergebnis zugrunde liegen müsste.
  (Probieren ist hier nicht erlaubt.)

  (3) Der Anteil der BSE-Kühe in England soll durch eine Stichprobe vom Umfang 15000 ermittelt werden. In der Stichprobe sind 30 BSE-Kühe. Welche Aussagen hinsichtlich der Wahrscheinlichkeit unter (1) *(Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Kuh wirklich an BSE erkrankt ist, wenn sie vom Test als BSE-Kuh eingestuft wird?)* sind nun mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % möglich?

↑ BSE Ergebnisse

a) Seit dem 1.10.2000 darf in Würsten kein Risikomaterial (unter anderem Gehirn, Rückenmark) mehr verarbeitet werden. Tests haben ergeben, dass jedoch in 4 % aller Würste Risikomaterial enthalten ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in 50 zufällig ausgesuchten Würsten

   i) mindestens drei und höchstens sechs Würste mit Risikomaterial enthalten sind?

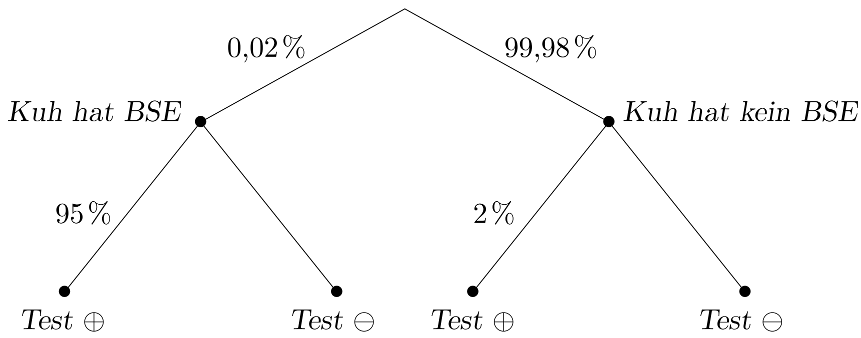
   $$P(3 \le X \le 6) = \text{bincdf}(50,\ 0.04,\ 6) - \text{bincdf}(50,\ 0.04,\ 2) = 32{,}0\,\%$$

   ii) die ersten 20 Würste ohne Risikomaterial sind und in den restlichen Würsten sich mehr als 3 mit Risikomaterial befinden?

   $$P = 0{,}96^{20} \cdot (1 - \text{bincdf}(30,\ 0.04,\ 3)) = 1{,}4\,\%$$

b) Bei einem Schnelltest werden 95 % der BSE-Kühe (also an BSE erkrankte Kühe) als solche erkannt. Der Test arbeitet jedoch fehlerhaft und stuft irrtümlich 2 % der Nicht-BSE-Kühe als BSE-Kühe ein.

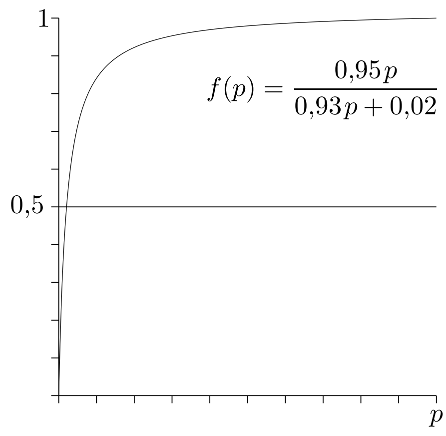
   (1) In Deutschland geht man davon aus, dass $p = 0{,}02\,\%$ (!) aller Kühe an BSE erkrankt sind.
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Kuh wirklich an BSE erkrankt ist, wenn sie vom Test als BSE-Kuh eingestuft wird?



$$P(\textit{Kuh hat BSE} \mid \textit{Test} \oplus) = \frac{95\,\% \cdot 0{,}02\,\%}{95\,\% \cdot 0{,}02\,\% + 2\,\% \cdot 99{,}98\,\%} = 0{,}941\,\%$$

Stellen Sie diese Wahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von p grafisch dar und interpretieren Sie den Graphen im Sachzusammenhang.

$$f(p) = \frac{0{,}95p}{0{,}95p + (1-p) \cdot 0{,}02}$$



   (2) Ein Mediziner behauptet, dass die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kuh wirklich an BSE erkrankt ist, wenn der Test sie als BSE-Kuh eingestuft hat, 50 % beträgt. Ermitteln Sie den Anteil an BSE-Kühen in Deutschland, der diesem Ergebnis zugrunde liegen müsste.
   (Probieren ist hier nicht erlaubt.)

   $$f(p) = 0{,}5 \implies p = 2{,}1\,\%$$

(3) Der Anteil der BSE-Kühe in England soll durch eine Stichprobe vom Umfang 15000 ermittelt werden. In der Stichprobe sind 30 BSE-Kühe. Welche Aussagen hinsichtlich der Wahrscheinlichkeit unter (1) *(Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Kuh wirklich an BSE erkrankt ist, wenn sie vom Test als BSE-Kuh eingestuft wird?)* sind nun mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % möglich? Konfidenzintervall [0,0013; 0,0027], [0,058; 0,114]

↑ Rinderseuche LK Abiturprüfung Bayern 1998, gekürzt

In der Rinderpopulation eines Landes tragen 4 % der Rinder den Erreger der Seuche B in sich, diese werden im Folgenden als B-Rinder bezeichnet. Alle anderen Rinder werden im Folgenden als gesund bezeichnet. Äußerlich sind B-Rinder nicht von gesunden Rindern zu unterscheiden. Man kann von einem gleichmäßigen Durchseuchungsgrad innerhalb des Landes ausgehen. In Instituten kann durch Untersuchung der Zellflüssigkeit der B-Erreger zweifelsfrei nachgewiesen werden.

1. a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich unter 100 Rindern mindestens zwei und weniger als sechs B-Rinder?
   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich unter 1000 Rindern mehr als 30 und weniger als 50 B-Rinder?
   c) Wie viele Rinder müssen in einem Institut mindestens untersucht werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90 % wenigstens ein B-Rind entdeckt wird?

2. Ein Institut untersucht 3000 Rinder. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind mindestens 100 dieser Rinder B-Rinder? Rechnen Sie mit der Normalverteilung als Näherung.

3. Die Rinderseuche wurde auch in ein Nachbarland eingeschleppt. Noch ist unbekannt, wie groß der Anteil p' der B-Rinder in dieser Rinderpopulation ist. Für eine groß angelegte Reihenuntersuchung mehrerer tausend Rinder zur Bestimmung von p' muss man sich zwischen zwei Methoden entscheiden. Es werden jeweils Gruppen von 20 Rindern untersucht; dabei wird zunächst jedem Rind Zellflüssigkeit entnommen.
   Methode I: Es wird Zellflüssigkeit aller 20 Rinder vermischt und das Gemisch untersucht. Wird kein Hinweis auf B festgestellt, so sind keine weiteren Untersuchungen notwendig. Stellt man im Gemisch den Erreger der B-Seuche fest, werden die 20 Zellflüssigkeiten noch einzeln untersucht.

   Methode II: Die 20 Proben von Zellflüssigkeit werden von vornherein einzeln untersucht. Für welche Werte von p' sind bei Methode I weniger Zellflüssigkeitsuntersuchungen zu erwarten als bei Methode II?

4. Ein von einem Tierarzt durchzuführender, einfacher Schnelltest erkennt 95 % der B-Rinder als solche. Irrtümlicherweise stuft dieser Schnelltest von den gesunden Rindern 15 % als B-Rinder ein. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem Durchseuchungsgrad von 4 % ein durch den Schnelltest für gesund erklärtes Rind auch wirklich gesund ist.

$\uparrow$ Rinderseuche   LK Abiturprüfung Bayern 1998, gekürzt

In der Rinderpopulation eines Landes tragen 4 % der Rinder den Erreger der Seuche B in sich, diese werden im Folgenden als B-Rinder bezeichnet. Alle anderen Rinder werden im Folgenden als gesund bezeichnet. Äußerlich sind B-Rinder nicht von gesunden Rindern zu unterscheiden. Man kann von einem gleichmäßigen Durchseuchungsgrad innerhalb des Landes ausgehen. In Instituten kann durch Untersuchung der Zellflüssigkeit der B-Erreger zweifelsfrei nachgewiesen werden.

1. a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich unter 100 Rindern mindestens zwei und weniger als sechs B-Rinder? 70,1 %
   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich unter 1000 Rindern mehr als 30 und weniger als 50 B-Rinder? 87,6 %
   c) Wie viele Rinder müssen in einem Institut mindestens untersucht werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90 % wenigstens ein B-Rind entdeckt wird? mindestens 57

2. Ein Institut untersucht 3000 Rinder. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind mindestens 100 dieser Rinder B-Rinder? Rechnen Sie mit der Normalverteilung als Näherung. 97,2 % mit Stetigkeitskorrektur

3. Die Rinderseuche wurde auch in ein Nachbarland eingeschleppt. Noch ist unbekannt, wie groß der Anteil p' der B-Rinder in dieser Rinderpopulation ist. Für eine groß angelegte Reihenuntersuchung mehrerer tausend Rinder zur Bestimmung von p' muss man sich zwischen zwei Methoden entscheiden. Es werden jeweils Gruppen von 20 Rindern untersucht; dabei wird zunächst jedem Rind Zellflüssigkeit entnommen.
   Methode I: Es wird Zellflüssigkeit aller 20 Rinder vermischt und das Gemisch untersucht. Wird kein Hinweis auf B festgestellt, so sind keine weiteren Untersuchungen notwendig. Stellt man im Gemisch den Erreger der B-Seuche fest, werden die 20 Zellflüssigkeiten noch einzeln untersucht.

   Methode II: Die 20 Proben von Zellflüssigkeit werden von vornherein einzeln untersucht. Für welche Werte von p' sind bei Methode I weniger Zellflüssigkeitsuntersuchungen zu erwarten als bei Methode II?
   $$1 \cdot (1-p')^{20} + 21 \cdot \left[1-(1-p')^{20}\right] < 20 \quad \Longrightarrow \quad p' \leq 13{,}9\,\%$$

4. Ein von einem Tierarzt durchzuführender, einfacher Schnelltest erkennt 95 % der B-Rinder als solche. Irrtümlicherweise stuft dieser Schnelltest von den gesunden Rindern 15 % als B-Rinder ein. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem Durchseuchungsgrad von 4 % ein durch den Schnelltest für gesund erklärtes Rind auch wirklich gesund ist.

   B Das Rind leidet unter der Seuche B
   K Der Test stuft das Tier als krank ein

   $$P(B) = 0{,}04, \quad P(K\,|\,B) = 0{,}95, \quad P(K\,|\,\overline{B}) = 0{,}15$$

   $$P(\overline{B}\,|\,\overline{K}) = \frac{0{,}96 \cdot 0{,}85}{0{,}04 \cdot 0{,}05 + 0{,}96 \cdot 0{,}85} = 99{,}8\,\%$$

↑ Bahnverkehr   LK Abiturprüfung Bayern 1998, gekürzt

Um den Bahnverkehr zu beschleunigen, werden von einem Bahnunternehmen neue Züge eingesetzt. Auf einer Strecke verkehren in einer Richtung täglich 9 Züge des alten Typs A und 3 Züge des neuen Typs B, jeder Zug fährt genau einmal am Tag. Die Züge sind nur hinsichtlich des Typs unterscheidbar. Züge vom Typ A haben die Pannenwahrscheinlichkeit 0,5 %, d. h., mit dieser Wahrscheinlichkeit tritt bei einer Fahrt eine Panne auf. Es wird angenommen, dass es bei einer Fahrt höchstens zu einer Panne kommt.

1. Ein Zug vom Typ A benötigt für eine pannenfreie Fahrt 40 Minuten, einer vom Typ B nur 35 Minuten. Eine Panne verlängert ausschließlich die betroffene Fahrt, und zwar um 10 Minuten. Das Bahnunternehmen stellt fest, dass die mittlere Fahrzeit auf der Strecke 39 Minuten beträgt. Berechnen Sie die Pannenwahrscheinlichkeit, die Züge vom Typ B demnach haben.

In der Einführungssphase haben Züge vom Typ B eine Pannenwahrscheinlichkeit von 8,5 %.

3. Die 9 Züge vom Typ A und die 3 Züge vom Typ B verkehren täglich in zufälliger Reihenfolge.
   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss ein Fahrgast bei seiner Fahrt mit dem Auftreten einer Panne rechnen?
   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt bei fünf Fahrten mehr als eine Panne auf?
   c) Auf einer Fahrt tritt keine Panne auf.
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit war das eine Fahrt mit Typ B?

Die Ergebnisse der ungekürzten Aufgaben Rinderseuche und Bahnverkehr sind unter Bahnverkehr ... zu finden.

↑ Fernsehsender

Ein Fernsehsender strahlt mehrmals am Tag Nachrichtensendungen aus. Der Anteil derjenigen Personen in der Bevölkerung, die diese Sendungen kennen, sei p.

a) Es sei $p = 0{,}2$. Ein Reporter des Senders befragt Personen auf der Straße, ob ihnen die Sendungen bekannt sind oder nicht (es sind nur diese beiden Antworten möglich). Erklären Sie, warum man diese Befragung als binomialverteiltes Zufallsexperiment auffassen kann.

   Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 50 befragten Personen

   $A:$ mindestens 37 die Sendungen nicht kennen,

   $B:$ höchstens 5 Personen die Sendungen bekannt sind,

   $C:$ die ersten 10 der Befragten die Sendungen nicht kennen.

b) Die Frühausgabe der Nachrichtensendung hat einen Bekanntheitsgrad von $p = 6\,\%$. Berechnen Sie die Zahl der Personen, die der Reporter mindestens nach der Bekanntheit dieser Sendung befragen müsste, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $95\,\%$ mindestens eine positive Antwort erhält.

c) Der Sender produziert außerdem eine Spätnachrichtensendung. Bei einer groß angelegten Umfrage waren $42\,\%$ der Befragten bis zu 30 Jahre alt. Die Auswertung ergab, dass die Spätsendung durchschnittlich jeder fünften befragten Person bekannt ist, aber nur zwei von 15 Personen der bis zu 30-Jährigen die Spätnachrichtensendung kennen. Berechnen Sie den Anteil der über 30-Jährigen, die die Spätnachrichtensendung kennen.

d) Es wird vermutet, dass sich der Bekanntheitsgrad der Nachrichtensendungen des Senders verändert hat. So wird eine Umfrage unter 1000 Testpersonen durchgeführt. 270 Personen gaben an, die Sendungen zu kennen. Bestimmen Sie das $95\,\%$-Konfidenzintervall für den unbekannten Anteil an Personen in der Bevölkerung, die die Sendung kennen.

e) Wie groß muss der Umfang einer Befragung mindestens sein, damit das Ergebnis bis auf zwei Prozentpunkte genau ist? Dabei können Sie davon ausgehen, dass $p \approx 27\,\%$ ist und die Sicherheitswahrscheinlichkeit $90\,\%$ beträgt.

↑ Fernsehsender

Ein Fernsehsender strahlt mehrmals am Tag Nachrichtensendungen aus. Der Anteil derjenigen Personen in der Bevölkerung, die diese Sendungen kennen, sei p.

a) Es sei $p = 0{,}2$. Ein Reporter des Senders befragt Personen auf der Straße, ob ihnen die Sendungen bekannt sind oder nicht (es sind nur diese beiden Antworten möglich). Erklären Sie, warum man diese Befragung als binomialverteiltes Zufallsexperiment auffassen kann.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 50 befragten Personen

$A:$ mindestens 37 die Sendungen nicht kennen, 88,9 %

$B:$ höchstens 5 Personen die Sendungen bekannt sind, 4,8 %

$C:$ die ersten 10 der Befragten die Sendungen nicht kennen. 10,7 %

b) Die Frühausgabe der Nachrichtensendung hat einen Bekanntheitsgrad von $p = 6\,\%$. Berechnen Sie die Zahl der Personen, die der Reporter mindestens nach der Bekanntheit dieser Sendung befragen müsste, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens eine positive Antwort erhält. ab $n = 49$

c) Der Sender produziert außerdem eine Spätnachrichtensendung. Bei einer groß angelegten Umfrage waren 42 % der Befragten bis zu 30 Jahre alt. Die Auswertung ergab, dass die Spätsendung durchschnittlich jeder fünften befragten Person bekannt ist, aber nur zwei von 15 Personen der bis zu 30-Jährigen die Spätnachrichtensendung kennen. Berechnen Sie den Anteil der über 30-Jährigen, die die Spätnachrichtensendung kennen.

Baumdiagramm $\quad 0{,}42 \cdot \frac{2}{15} + (1 - 0{,}42) \cdot p^* = \frac{1}{5}, \quad p^* = 24{,}8\,\%$

d) Es wird vermutet, dass sich der Bekanntheitsgrad der Nachrichtensendungen des Senders verändert hat. So wird eine Umfrage unter 1000 Testpersonen durchgeführt. 270 Personen gaben an, die Sendungen zu kennen. Bestimmen Sie das 95 %-Konfidenzintervall für den unbekannten Anteil an Personen in der Bevölkerung, die die Sendung kennen.

Konfidenzintervall genähert/exakter $\quad [0{,}24; 0{,}30]$

e) Wie groß muss der Umfang einer Befragung mindestens sein, damit das Ergebnis bis auf zwei Prozentpunkte genau ist? Dabei können Sie davon ausgehen, dass $p \approx 27\,\%$ ist und die Sicherheitswahrscheinlichkeit 90 % beträgt.

Konfidenzintervalllänge beträgt 0,04, $\quad n = 1326 \quad (z = 1{,}64)$

↑ Überraschungseier

Eine Schokoladenfirma wirbt damit, dass sich in jedem 5. Überraschungsei eine Figur befindet.

a) Für einen Kindergeburtstag werden 15 Überraschungseier gekauft, wobei man davon ausgehen kann, dass die Verteilung der Figuren zufällig ist. Erklären Sie, welche Bedeutung in diesem Zusammenhang der folgende Term hat:

$$\binom{15}{3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{12}$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A: In keinem Ei ist eine Figur.

B: Es befinden sich in höchstens 2 Eiern Figuren.

C: In höchstens 11 Eiern sind keine Figuren.

b) Ein Käufer möchte unbedingt eine Figur bekommen. Berechnen Sie, wie viele Überraschungseier er mindestens kaufen müsste, um mit 95 %iger Sicherheit mindestens ein Überraschungsei mit einer Figur zu erhalten.

c) Bei der Produktion der Überraschungseier treten nur die folgenden beiden Fehler auf:

F_1: beschädigte Schokoladenhülle

F_2: fehlerhafte Verpäckung

F_1 und F_2 treten unabhängig voneinander auf. Ein Ei ist einwandfrei, wenn es keinen der beiden Fehler aufweist, was erfahrungsgemäß bei 85 % der Eier der Fall ist. Erfahrungsgemäß sind 8 % der Schokoladenhüllen beschädigt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt der Fehler F_2 auf?

d) Um die Wirkung einer Werbe-Kampagne auf das Kaufverhalten zu untersuchen, beauftragt die Schokoladenfirma ein Marktforschungsinstitut. Von besonderem Interesse ist, ob die Tatsache, dass eine Person die Werbung gesehen hat, tatsächlich einen Einfluss auf die momentane Vorliebe der Person für Überraschungseier hat.
Umfragen ergeben: 40 % aller Befragten haben im letzten Monat ein Überraschungsei gekauft. 33 % der Befragten gaben an, die Werbung gesehen zu haben. 36 % der Befragten haben weder die Werbung gesehen noch im letzten Monat ein Überraschungsei gegessen.

Legen Sie dar, ob die Tatsache, dass die Werbung gesehen wurde, einen positiven Einfluss auf das Kaufverhalten für Überraschungseier hatte.

↑ Überraschungseier

Eine Schokoladenfirma wirbt damit, dass sich in jedem 5. Überraschungsei eine Figur befindet.

a) Für einen Kindergeburtstag werden 15 Überraschungseier gekauft, wobei man davon ausgehen kann, dass die Verteilung der Figuren zufällig ist. Erklären Sie, welche Bedeutung in diesem Zusammenhang der folgende Term hat:

$$\binom{15}{3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{12}$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A: In keinem Ei ist eine Figur. 3,5 %

B: Es befinden sich in höchstens 2 Eiern Figuren. 39,8 %

C: In höchstens 11 Eiern sind keine Figuren. 35,2 %

b) Ein Käufer möchte unbedingt eine Figur bekommen. Berechnen Sie, wie viele Überraschungseier er mindestens kaufen müsste, um mit 95 %iger Sicherheit mindestens ein Überraschungsei mit einer Figur zu erhalten. $n = 14$

c) Bei der Produktion der Überraschungseier treten nur die folgenden beiden Fehler auf:

F_1: beschädigte Schokoladenhülle

F_2: fehlerhafte Verpäckung

F_1 und F_2 treten unabhängig voneinander auf. Ein Ei ist einwandfrei, wenn es keinen der beiden Fehler aufweist, was erfahrungsgemäß bei 85 % der Eier der Fall ist. Erfahrungsgemäß sind 8 % der Schokoladenhüllen beschädigt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt der Fehler F_2 auf? 7,6 %

d) Um die Wirkung einer Werbe-Kampagne auf das Kaufverhalten zu untersuchen, beauftragt die Schokoladenfirma ein Marktforschungsinstitut. Von besonderem Interesse ist, ob die Tatsache, dass eine Person die Werbung gesehen hat, tatsächlich einen Einfluss auf die momentane Vorliebe der Person für Überraschungseier hat.
Umfragen ergeben: 40 % aller Befragten haben im letzten Monat ein Überraschungsei gekauft. 33 % der Befragten gaben an, die Werbung gesehen zu haben. 36 % der Befragten haben weder die Werbung gesehen noch im letzten Monat ein Überraschungsei gegessen.

Legen Sie dar, ob die Tatsache, dass die Werbung gesehen wurde, einen positiven Einfluss auf das Kaufverhalten für Überraschungseier hatte.

$P(\text{Ei gekauft}|\text{Werbung gesehen}) = 35{,}2\,\%$

$P(\text{Ei gekauft}|\text{Werbung nicht gesehen}) = 46{,}3\,\%$

↑ Grippe-Impfung

Das Robert-Koch-Institut hat in einer Stichprobe 1261 Menschen über 12 Jahre telefonisch befragt. Demnach waren in den alten Bundesländern 15 % und in den neuen (einschließlich Berlin) 32 % der Bevölkerung gegen Grippe geimpft. ln den alten Bundesländern leben 79,3 % der 73 327 000 Bundesbürger über 12 Jahre.

1. Berechnen Sie den Anteil der geimpften Personen in der Gesamtbevölkerung.
   Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig angetroffene geimpfte Person in den neuen Bundesländern wohnt.
2. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 15 zufällig ausgesuchten Personen aus den neuen Bundesländern
   a) keine Person geimpft ist,
   b) mindestens 10 Personen nicht geimpft sind,
   c) mehr als 3 und höchstens 7 Personen geimpft sind.
3. Die Leibniz-Schule befindet sich in Hannover und hat zur Zeit 900 SchülerInnen über 12 Jahre. Bestimmen Sie einen Schätzwert für die Anzahl der geimpften Schüler dieses Gymnasiums. Ermitteln Sie ein zum Erwartungswert symmetrisches Intervall, in dem die Anzahl der geimpften SchülerInnen mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 90 % liegt.
4. Personen über 12 Jahre aus den alten Bundesländern werden für ein Interview zufällig ausgewählt. Bestimmen Sie, wie viele Personen man mindestens auswählen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens eine geimpfte Person zu erfassen.
5. Die oben angegebene Information über den Anteil der geimpften Personen in den alten Bundesländern beruht auf einer Befragung von 1000 Personen über 12 Jahre. Von ihnen waren 150 geimpft.
   a) Untersuchen Sie, ob das Umfrageergebnis auch mit einem Anteil von $p = 0{,}17$ verträglich ist, ohne ein Konfidenzintervall zu ermitteln.
   b) Bestimmen Sie ein Konfidenzintervall (Vertrauensintervall) zur Sicherheitswahrscheinlichkeit $\alpha = 0{,}95$ für den Anteil geimpfter Personen über 12 Jahre in den alten Bundesländern.

↑ Grippe-Impfung

Das Robert-Koch-Institut hat in einer Stichprobe 1261 Menschen über 12 Jahre telefonisch befragt. Demnach waren in den alten Bundesländern 15 % und in den neuen (einschließlich Berlin) 32 % der Bevölkerung gegen Grippe geimpft. In den alten Bundesländern leben 79,3 % der 73 327 000 Bundesbürger über 12 Jahre.

1. Berechnen Sie den Anteil der geimpften Personen in der Gesamtbevölkerung. 18,5 %
   Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig angetroffene geimpfte Person in den neuen Bundesländern wohnt. 35,8 %

2. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 15 zufällig ausgesuchten Personen aus den neuen Bundesländern

   a) keine Person geimpft ist, 0,3 %

   b) mindestens 10 Personen nicht geimpft sind, 66,1 %

   c) mehr als 3 und höchstens 7 Personen geimpft sind. 68,7 %

3. Die Leibniz-Schule befindet sich in Hannover und hat zur Zeit 900 SchülerInnen über 12 Jahre. Bestimmen Sie einen Schätzwert für die Anzahl der geimpften Schüler dieses Gymnasiums. 135
   Ermitteln Sie ein zum Erwartungswert symmetrisches Intervall, in dem die Anzahl der geimpften SchülerInnen mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 90 % liegt. $[118, 152]$

4. Personen über 12 Jahre aus den alten Bundesländern werden für ein Interview zufällig ausgewählt. Bestimmen Sie, wie viele Personen man mindestens auswählen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens eine geimpfte Person zu erfassen. $n = 18$

5. Die oben angegebene Information über den Anteil der geimpften Personen in den alten Bundesländern beruht auf einer Befragung von 1000 Personen über 12 Jahre. Von ihnen waren 150 geimpft.

   a) Untersuchen Sie, ob das Umfrageergebnis auch mit einem Anteil von $p = 0{,}17$ verträglich ist, ohne ein Konfidenzintervall zu ermitteln. 150 liegt in der 2σ-Umgebung.

   b) Bestimmen Sie ein Konfidenzintervall (Vertrauensintervall) zur Sicherheitswahrscheinlichkeit $\alpha = 0{,}95$ für den Anteil geimpfter Personen über 12 Jahre in den alten Bundesländern. [0,128 | 0,172]

↑ Flugbuchungen

Auf einer bestimmten Flugstrecke treten die Kunden, die einen Flug gebucht haben, diesen mit 90 %iger Wahrscheinlichkeit an.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von einer zufällig ausgewählten Maschine mit 200 Sitzplätzen

1. genau 180 Plätze,
2. höchstens 175 Plätze,
3. mindestens 185 Plätze genutzt werden.

Um die Flugzeuge besser auszulasten, ist die Fluggesellschaft dazu übergegangen, die Flüge überbuchen zu lassen.

b)
1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 210 verkauften Flugtickets für eine Maschine mit 200 Sitzplätzen nicht alle erscheinenden Fluggäste befördert werden können?
2. Wie viele Buchungen dürfen angenommen werden, damit das Platzangebot in einer Maschine mit 300 Sitzplätzen mit 99 %iger Wahrscheinlichkeit ausreicht?

↑ Flugbuchungen

Auf einer bestimmten Flugstrecke treten die Kunden, die einen Flug gebucht haben, diesen mit 90 %iger Wahrscheinlichkeit an.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von einer zufällig ausgewählten Maschine mit 200 Sitzplätzen

1. genau 180 Plätze, 9,4 %
2. höchstens 175 Plätze, 14,5 %
3. mindestens 185 Plätze genutzt werden. 14,3 %

Um die Flugzeuge besser auszulasten, ist die Fluggesellschaft dazu übergegangen, die Flüge überbuchen zu lassen.

b) 1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 210 verkauften Flugtickets für eine Maschine mit 200 Sitzplätzen nicht alle erscheinenden Fluggäste befördert werden können?

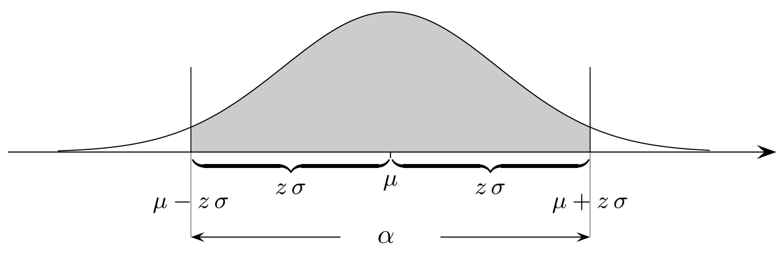
$P_{0,9}^{210}(X \geq 201) = 0{,}2\,\%$

2. Wie viele Buchungen dürfen angenommen werden, damit das Platzangebot in einer Maschine mit 300 Sitzplätzen mit 99 %iger Wahrscheinlichkeit ausreicht?

n gesucht

Rückwärtsrechnung mit der
$z\sigma$-Umgebung zur Sicherheitswahrscheinlichkeit von (!) 98 %
$z = 2{,}326$
$np + z\sqrt{np(1-p)} = 300$
$n = 319$

oder (GTR)
Ergebnis aus der Tabelle (TABLE) ablesen
$\diagdown Y_1 = \text{binomcdf}(\text{X}, 0.9, 300) = 0.99$
TblStart $= 310$
$n = 320$



↑ Zielschießen

Otto trifft beim Zielschießen auf eine Torwand mit 60 %iger Wahrscheinlichkeit.

a) Otto schießt 20-mal. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er

1. genau 12-mal,
2. höchstens 10-mal,
3. mindestens 16-mal   trifft.

Welche vereinfachenden Voraussetzungen müssen gemacht werden, um bei diesen Berechnungen von einer Binomialverteilung auszugehen?

b) Wie groß müsste die Schusszahl mindestens sein, damit bei Wahrscheinlichkeitsberechnungen die Normalverteilung verwendet werden kann?

c) Otto schießt 40-mal.
Ermitteln Sie die 95 %-Prognoseintervalle für die Trefferzahlen und für die relativen Häufigkeiten.

Otto trifft 15-mal.
Überprüfen Sie, ob 60 % im 95 %-Konfidenzintervall zu diesem Stichprobenergebnis liegt, ohne das Konfidenzintervall zu ermitteln (nehmen Sie hierbei Bezug auf die Definition eines Konfidenzintervalls).
Welche Reaktion von Otto wäre denkbar?

d) Wie oft müsste Otto mindestens schießen, damit er mit mindestens 99 %iger Wahrscheinlichkeit mindestens 2-mal trifft?

e) Otto und Willi schießen abwechselnd auf die Torwand, wobei Otto beginnt. Die Trefferwahrscheinlichkeit von Willi beträgt 50 %. Das Spiel ist beendet, wenn jeder zwei Schüsse abgegeben hat. Gewonnen hat derjenige, der am häufigsten getroffen hat. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Otto? (Kein umfangreiches Baumdiagramm erforderlich.)

f) Bestimmen Sie für das Spiel aus e), wie viele Schüsse im Schnitt bis zum erstmaligen Auftreten eines Treffers erforderlich sind.

g) Wie oft müsste Otto mindestens schießen, damit er mit 95 %iger Wahrscheinlichkeit mindestens 30 Treffer erzielt?

↑ Zielschießen

Otto trifft beim Zielschießen auf eine Torwand mit 60 %iger Wahrscheinlichkeit.

a) Otto schießt 20-mal. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er

1. genau 12-mal, — 18,0 %
2. höchstens 10-mal, — 24,5 %
3. mindestens 16-mal trifft. — 5,1 %

Welche vereinfachenden Voraussetzungen müssen gemacht werden, um bei diesen Berechnungen von einer Binomialverteilung auszugehen? — Trefferwahrscheinlichkeit bleibt gleich, weil ...

b) Wie groß müsste die Schusszahl mindestens sein, damit bei Wahrscheinlichkeitsberechnungen die Normalverteilung verwendet werden kann? — $\sigma > 3$, ab $n = 38$

c) Otto schießt 40-mal.
Ermitteln Sie die 95 %-Prognoseintervalle für die Trefferzahlen und für die relativen Häufigkeiten.

$[16, 28]$

$[0{,}4; 0{,}7]$

Otto trifft 15-mal.
Überprüfen Sie, ob 60 % im 95 %-Konfidenzintervall zu diesem Stichprobenergebnis liegt, ohne das Konfidenzintervall zu ermitteln (nehmen Sie hierbei Bezug auf die Definition eines Konfidenzintervalls). — $X = 15$ ist nicht mit $p = 0{,}6$ verträglich.

Welche Reaktion von Otto wäre denkbar? — Otto nimmt sich vor, mehr zu trainieren.

d) Wie oft müsste Otto mindestens schießen, damit er mit mindestens 99 %iger Wahrscheinlichkeit mindestens 2-mal trifft? — $1 - 0{,}4^n - n \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4^{n-1} \geq 0{,}99$, ab $n = 8$

e) Otto und Willi schießen abwechselnd auf die Torwand, wobei Otto beginnt. Die Trefferwahrscheinlichkeit von Willi beträgt 50 %. Das Spiel ist beendet, wenn jeder zwei Schüsse abgegeben hat. Gewonnen hat derjenige, der am häufigsten getroffen hat. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Otto?
(Kein umfangreiches Baumdiagramm erforderlich.)

$$P_{\text{Willi}}(Y=0) \cdot P_{\text{Otto}}(X=1) + P_{\text{Willi}}(Y=0) \cdot P_{\text{Otto}}(X=2) + P_{\text{Willi}}(Y=1) \cdot P_{\text{Otto}}(X=2) = 0{,}39$$

f) Bestimmen Sie für das Spiel aus e), wie viele Schüsse im Schnitt bis zum erstmaligen Auftreten eines Treffers erforderlich sind. — $n = 1{,}52$

x_i	0	1	2	3	4
P	$0{,}4^2 \cdot 0{,}5^2$	$0{,}6$	$0{,}4 \cdot 0{,}5$	$0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}6$	$0{,}4^2 \cdot 0{,}5^2$

g) Wie oft müsste Otto mindestens schießen, damit er mit 95 %iger Wahrscheinlichkeit mindestens 30 Treffer erzielt?

Rückwärtsrechnung mit der $z\sigma$-Umgebung zur Sicherheitswahrscheinlichkeit von (!) 90 %
$z = 1{,}64$
$np - z\sqrt{np(1-p)} = 30$
$n = 61$

oder (GTR)
Ergebnis aus der Tabelle (TABLE) ablesen
$\diagdown Y_1 = \text{binomcdf}(X, 0.6, 29) = 0.05$
TblStart $= 50$
$n = 60$ $\quad P_{0,6}^{60}(X \geq 30) = 0{,}956$

↑ Urnen-Aufgabe

Eine Urne enthält 5 rote, 3 schwarze und 2 weiße Kugeln. Der Urne werden mit einem Griff 3 Kugeln entnommen.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben alle drei Kugeln dieselbe Farbe?
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, von jeder Farbe eine Kugel zu ziehen?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben mindestens zwei der gezogenen Kugeln dieselbe Farbe?

c) Die Zufallsvariable X sei die Anzahl der roten unter den gezogenen Kugeln. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X sowie den Erwartungswert und die Standardabweichung.

d) Die der Urne mit einem Griff entnommenen 3 Kugeln werden, ohne die Farbe festzustellen, in eine zweite Urne gelegt, die 3 rote, 3 schwarze und 1 weiße Kugel enthält. Anschließend wird der zweiten Urne eine Kugel entnommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese Kugel rot?

↑ Urnen-Aufgabe

Eine Urne enthält 5 rote, 3 schwarze und 2 weiße Kugeln. Der Urne werden mit einem Griff 3 Kugeln entnommen.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben alle drei Kugeln dieselbe Farbe?

$$P(A) = \frac{\binom{5}{3} + \binom{3}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{11}{120} = 9{,}2\,\%$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, von jeder Farbe eine Kugel zu ziehen?

$$P(B) = \frac{5 \cdot 3 \cdot 2}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{4}$$

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben mindestens zwei der gezogenen Kugeln dieselbe Farbe?

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

c) Die Zufallsvariable X sei die Anzahl der roten unter den gezogenen Kugeln. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X sowie den Erwartungswert und die Standardabweichung.

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{10}{120}$	$\frac{50}{120}$	$\frac{50}{120}$	$\frac{10}{120}$

$$E(X) = 1{,}5$$

$$\sigma_X = 0{,}76$$

d) Die der Urne mit einem Griff entnommenen 3 Kugeln werden, ohne die Farbe festzustellen, in eine zweite Urne gelegt, die 3 rote, 3 schwarze und 1 weiße Kugel enthält. Anschließend wird der zweiten Urne eine Kugel entnommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese Kugel rot?

$$\frac{10}{120} \cdot \frac{3}{10} + \frac{50}{120} \cdot \frac{4}{10} + \frac{50}{120} \cdot \frac{5}{10} + \frac{10}{120} \cdot \frac{6}{10} = \frac{54}{120} = 0{,}45$$

↑ Delegations-Aufgabe

Die Belegschaft einer Firma besteht aus vier Frauen und fünf Männern. Zu einem Empfang im Rathaus der Stadt darf die Firma nur eine festgelegte Anzahl Personen entsenden. Da jedes der Firmenmitglieder zu dem Empfang gehen möchte, wird der Firmeninhaber beauftragt, die Delegation durch Losentscheid zufällig zusammenzustellen.

a) Die Delegation umfaßt zwei Personen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht die Delegation nur aus Männern? Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist in der Delegation mindestens eine Frau?

b) Die Zufallsvariable X sei die Anzahl der Männer in einer vierköpfigen Delegation.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser Zufallsvariablen, sowie den Erwartungswert und die Standardabweichung.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind in einer Delegation aus vier Personen mehr Frauen als Männer?

c) Der Firmeninhaber gibt bekannt, dass die vierköpfige Delegation nur aus Männern besteht.
Kann man daraus mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $3\,\%$ schließen, dass die Delegation nicht durch Losentscheid zusammengestellt wurde?

↑ Delegations-Aufgabe

Die Belegschaft einer Firma besteht aus vier Frauen und fünf Männern. Zu einem Empfang im Rathaus der Stadt darf die Firma nur eine festgelegte Anzahl Personen entsenden. Da jedes der Firmenmitglieder zu dem Empfang gehen möchte, wird der Firmeninhaber beauftragt, die Delegation durch Losentscheid zufällig zusammenzustellen.

a) Die Delegation umfaßt zwei Personen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht die Delegation nur aus Männern?

$$P(A) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{5}{18}$$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist in der Delegation mindestens eine Frau?

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18}$$

b) Die Zufallsvariable X sei die Anzahl der Männer in einer vierköpfigen Delegation.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser Zufallsvariablen, sowie den Erwartungswert und die Standardabweichung.

k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	$\frac{1}{126}$	$\frac{20}{126}$	$\frac{60}{126}$	$\frac{40}{126}$	$\frac{5}{126}$

$$E(X) = 2{,}2$$
$$\sigma_X = 0{,}79$$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind in einer Delegation aus vier Personen mehr Frauen als Männer?

$$P(X \leq 1) = \frac{21}{126}$$

c) Der Firmeninhaber gibt bekannt, dass die vierköpfige Delegation nur aus Männern besteht.
Kann man daraus mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 3 % schließen, dass die Delegation nicht durch Losentscheid zusammengestellt wurde?

$$P(X = 4) = \frac{5}{126} = 0{,}040$$

Es bestehen Zweifel am Losentscheid.

↑ Weißbrot-Aufgabe

Zur Herstellung von Weißbroten werden die Teigstücke von einer Maschine geschnitten und gewogen. Die normalverteilte Zufallsgröße X beschreibt die Teigmasse (in g). Die Maschine ist zunächst so eingestellt, dass die mittlere Brotteigmasse $750\,g$ und die Standardabweichung $9\,g$ beträgt.

a) Eine Herstellungsvorgabe beinhaltet, dass mindestens 80 % der Teige zwischen $740\,g$ und $760\,g$ wiegen müssen. Überprüfen Sie, ob die Herstellungsvorgabe eingehalten wird.

b) In welchem symmetrischen Intervall um den Erwartungswert liegen 93 % der Teigmassen?

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von drei produzierten Broten genau zwei weniger als $740\,g$ wiegen.

d) Die Maschine lässt sich so einstellen, dass die mittlere Teigmasse unverändert bleibt, die Standardabweichung aber verändert wird. Es soll sichergestellt werden, dass höchstens 5 % der Brotteige unter $740\,g$ wiegen.
Ermitteln Sie den größtmöglichen Wert für diese neue Standardabweichung.

   Erläutern Sie die Auswirkungen einer neuen, jedoch kleineren Standardabweichung für die Großbäckerei, bzw. ihrer Kunden.

↑ Weißbrot-Aufgabe

Zur Herstellung von Weißbroten werden die Teigstücke von einer Maschine geschnitten und gewogen. Die normalverteilte Zufallsgröße X beschreibt die Teigmasse (in g). Die Maschine ist zunächst so eingestellt, dass die mittlere Brotteigmasse $750\,g$ und die Standardabweichung $9\,g$ beträgt.

a) Eine Herstellungsvorgabe beinhaltet, dass mindestens 80 % der Teige zwischen $740\,g$ und $760\,g$ wiegen müssen. Überprüfen Sie, ob die Herstellungsvorgabe eingehalten wird.

$$P(740 \leq X \leq 760) = 73{,}3\,\%$$

b) In welchem symmetrischen Intervall um den Erwartungswert liegen 93 % der Teigmassen?

$$[733{,}7; 766{,}3]$$

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von drei produzierten Broten genau zwei weniger als $740\,g$ wiegen.

$$p = P(X < 740) = 13{,}3\,\%$$
$$P_p^3(X = 2) = 4{,}6\,\%$$

d) Die Maschine lässt sich so einstellen, dass die mittlere Teigmasse unverändert bleibt, die Standardabweichung aber verändert wird. Es soll sichergestellt werden, dass höchstens 5 % der Brotteige unter $740\,g$ wiegen.
Ermitteln Sie den größtmöglichen Wert für diese neue Standardabweichung.

$$P(X < 740) = \Phi\left(\frac{740-750}{\sigma}\right) \leq 5\,\% \quad \Longrightarrow \quad \sigma \leq 6{,}08$$

Erläutern Sie die Auswirkungen einer neuen, jedoch kleineren Standardabweichung für die Großbäckerei, bzw. ihrer Kunden. höhere Kundenzufriedenheit ...

↑ Glühlampen-Aufgabe

Bei einer Qualitätskontrolle wird die Lebensdauer von Glühlampen in Tagen gemessen.
Dabei haben sich im Werk A folgende Werte ergeben:

44 44 46 44 43 43 39 40 44 40 35 41 41 46 44 48 44 47 44 43

a) Stellen Sie die Daten grafisch dar.
Bestimmen Sie für die Lebensdauer der Glühlampen den Mittelwert und die Standardabweichung.

Ein Hersteller produziert Glühlampen an zwei Standorten A und B. Erfahrungsgemäß sind 1 % der Glühlampen, die im Werk A produziert werden, defekt. Werk B produziert 5 % defekte Lampen.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

E_1: Alle Glühlampen in einer Lichterkette mit 10 Glühlampen aus dem Werk A sind in Ordnung.

E_2: Von 25 Glühlampen einer Lichterkette aus Werk B ist genau eine defekt.

E_3: ln einer neuen Lichterkette mit 10 Glühlampen aus Werk A und 25 aus Werk B ist genau eine defekt.

c) Üblicherweise werden je 1000 Glühlampen als Versandeinheiten auf Paletten verpackt und im Zentrallager mit einem Aufkleber versehen, auf dem auch das Herstellerwerk vermerkt ist. Fehlt der Aufkleber, so werden 100 Glühlampen geprüft. Bei 3 oder mehr defekten Glühlampen wird der Karton dem Werk B zugeordnet, sonst dem Werk A.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Karton mit im Werk B produzierten Glühlampen bei diesem Verfahren einen falschen Aufkleber bekommt.

↑ Glühlampen-Aufgabe

Bei einer Qualitätskontrolle wird die Lebensdauer von Glühlampen in Tagen gemessen.
Dabei haben sich im Werk A folgende Werte ergeben:

44 44 46 44 43 43 39 40 44 40 35 41 41 46 44 48 44 47 44 43

a) Stellen Sie die Daten grafisch dar.
Bestimmen Sie für die Lebensdauer der Glühlampen den Mittelwert und die Standardabweichung.

$\overline{x} = 43, \quad \sigma = 2{,}93$

Ein Hersteller produziert Glühlampen an zwei Standorten A und B. Erfahrungsgemäß sind 1 % der Glühlampen, die im Werk A produziert werden, defekt. Werk B produziert 5 % defekte Lampen.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

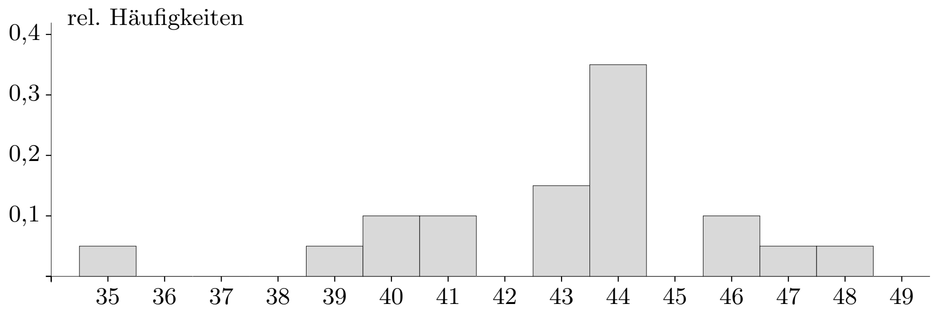
E_1: Alle Glühlampen in einer Lichterkette mit 10 Glühlampen aus dem Werk A sind in Ordnung. 90,4 %

E_2: Von 25 Glühlampen einer Lichterkette aus Werk B ist genau eine defekt. 36,5 %

E_3: ln einer neuen Lichterkette mit 10 Glühlampen aus Werk A und 25 aus Werk B ist genau eine defekt. 35,5 %

c) Üblicherweise werden je 1000 Glühlampen als Versandeinheiten auf Paletten verpackt und im Zentrallager mit einem Aufkleber versehen, auf dem auch das Herstellerwerk vermerkt ist. Fehlt der Aufkleber, so werden 100 Glühlampen geprüft. Bei 3 oder mehr defekten Glühlampen wird der Karton dem Werk B zugeordnet, sonst dem Werk A.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Karton mit im Werk B produzierten Glühlampen bei diesem Verfahren einen falschen Aufkleber bekommt. 11,8 %



↑ Quizshow Bayern 2012

Für eine Quizshow sucht ein Fernsehsender Abiturientinnen und Abiturienten als Kandidaten. Jeder Bewerber gibt in einem online auszufüllenden Formular die Durchschnittsnote seines Abiturzeugnisses an.

1. Insgesamt bewerben sich dreimal so viele weibliche wie männliche Personen, wobei 80 % der weiblichen und 75 % der männlichen Bewerber eine Durchschnittsnote von 1,5 oder besser angeben. Bestimmen Sie den Anteil der Personen unter allen Bewerbern, die eine schlechtere Durchschnittsnote als 1,5 angeben.

2. Aus dem Bewerberfeld werden zwanzig weibliche und zehn männliche Personen zu einem Casting eingeladen, das in zwei Gruppen durchgeführt wird. Fünfzehn der Eingeladenen werden für die erste Gruppe zufällig ausgewählt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass für die erste Gruppe zehn weibliche und fünf männliche Personen ausgewählt werden, wird mit p bezeichnet.

   a) Begründen Sie im Sachzusammenhang, dass p nicht durch den Term

   $$\binom{15}{5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \quad \text{beschrieben wird.}$$

   b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit p mithilfe eines geeigneten Terms.

Nach dem Casting stehen die zehn Kandidaten der Quizshow fest.

3. Im Rahmen der Show müssen Aufgaben aus verschiedenen Fachgebieten gelöst werden. Die Anzahl der von einem Kandidaten zu lösenden Aufgaben aus dem Fachgebiet Mathematik ist gleich der Augensumme, die von ihm bei einmaligem Werfen zweier Würfel erzielt wird. Die beiden Würfel tragen jeweils auf zwei Seitenflächen die Augenzahl 0, auf drei Seitenflächen die Augenzahl 1 und auf einer Seitenfläche die Augenzahl 2.

   a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der erste Kandidat genau zwei Aufgaben aus dem Fachgebiet Mathematik lösen muss.

   b) Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der von einem Kandidaten zu lösenden Aufgaben aus dem Fachgebiet Mathematik. Der Tabelle kann die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X entnommen werden. Ermitteln Sie den fehlenden Wert der Wahrscheinlichkeitsverteilung sowie den Erwartungswert von X.

k	0	1	2	3	4
$P(X=k)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{36}$		$\frac{1}{36}$

   c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau einer der zehn Kandidaten keine Aufgabe aus dem Fachgebiet Mathematik lösen muss.

   d) Bestimmen Sie, wie viele Kandidaten an der Quizshow mindestens teilnehmen müssten, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90 % wenigstens ein Kandidat darunter ist, der keine Aufgabe aus dem Fachgebiet Mathematik lösen muss.

   Für eine Aufgabe aus dem Fachgebiet Mathematik kommen zwei Kuverts zum Einsatz, die jeweils fünf Spielkarten enthalten. Es ist bekannt, dass das eine Kuvert genau zwei und das andere genau drei rote Spielkarten enthält. Der Showmaster wählt, jeweils zufällig, ein Kuvert und aus diesem zwei Karten aus.

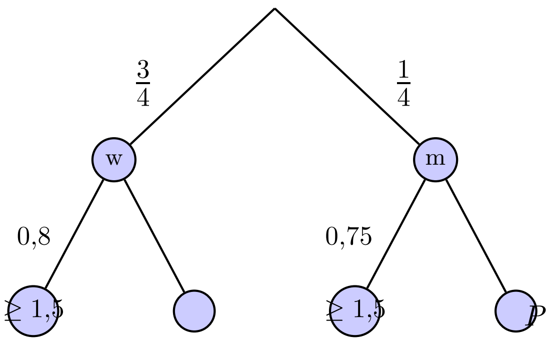
   e) Bestätigen Sie rechnerisch, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden ausgewählten Karten rot sind, 20 % beträgt.

   f) Der Showmaster zeigt die beiden ausgewählten Karten; sie sind tatsächlich rot. Der Kandidat wird nach der Wahrscheinlichkeit dafür gefragt, dass die beiden Karten aus dem Kuvert mit den drei roten Karten stammen. Bestimmen Sie diese Wahrscheinlichkeit.

$\uparrow$ Quizshow Bayern 2012

Für eine Quizshow sucht ein Fernsehsender Abiturientinnen und Abiturienten als Kandidaten. Jeder Bewerber gibt in einem online auszufüllenden Formular die Durchschnittsnote seines Abiturzeugnisses an.

1. Insgesamt bewerben sich dreimal so viele weibliche wie männliche Personen, wobei 80 % der weiblichen und 75 % der männlichen Bewerber eine Durchschnittsnote von 1,5 oder besser angeben. Bestimmen Sie den Anteil der Personen unter allen Bewerbern, die eine schlechtere Durchschnittsnote als 1,5 angeben.



$P(< 1{,}5) = \frac{3}{4} \cdot 0{,}2 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}25 = 21{,}3\,\%$

Das Diagramm ist zu ergänzen.

2. Aus dem Bewerberfeld werden zwanzig weibliche und zehn männliche Personen zu einem Casting eingeladen, das in zwei Gruppen durchgeführt wird. Fünfzehn der Eingeladenen werden für die erste Gruppe zufällig ausgewählt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass für die erste Gruppe zehn weibliche und fünf männliche Personen ausgewählt werden, wird mit p bezeichnet.

   a) Begründen Sie im Sachzusammenhang, dass p nicht durch den Term

   $\binom{15}{5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{10}$ beschrieben wird.   Term wäre für Ziehen mit Zurücklegen richtig.

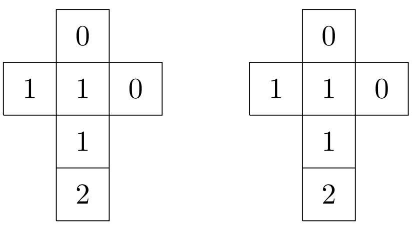
   b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit p mithilfe eines geeigneten Terms.

$$p = \frac{\binom{20}{10} \cdot \binom{10}{5}}{\binom{30}{15}} = 30{,}0\,\%$$

Nach dem Casting stehen die zehn Kandidaten der Quizshow fest.

3. Im Rahmen der Show müssen Aufgaben aus verschiedenen Fachgebieten gelöst werden. Die Anzahl der von einem Kandidaten zu lösenden Aufgaben aus dem Fachgebiet Mathematik ist gleich der Augensumme, die von ihm bei einmaligem Werfen zweier Würfel erzielt wird. Die beiden Würfel tragen jeweils auf zwei Seitenflächen die Augenzahl 0, auf drei Seitenflächen die Augenzahl 1 und auf einer Seitenfläche die Augenzahl 2.

   a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der erste Kandidat genau zwei Aufgaben aus dem Fachgebiet Mathematik lösen muss.



Verteilung für einen Würfel

k	0	1	2
$P(Y = k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

$P(\text{genau } 2) = P(0,2) + P(2,0) + P(1,1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{13}{36}$

b) Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der von einem Kandidaten zu lösenden Aufgaben aus dem Fachgebiet Mathematik. Der Tabelle kann die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X entnommen werden. Ermitteln Sie den fehlenden Wert der Wahrscheinlichkeitsverteilung sowie den Erwartungswert von X.

k	0	1	2	3	4
$P(X=k)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{36}$		$\frac{1}{36}$

$P(X=3)=\frac{1}{6},\quad E(x)=\frac{5}{3}$

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau einer der zehn Kandidaten keine Aufgabe aus dem Fachgebiet Mathematik lösen muss.

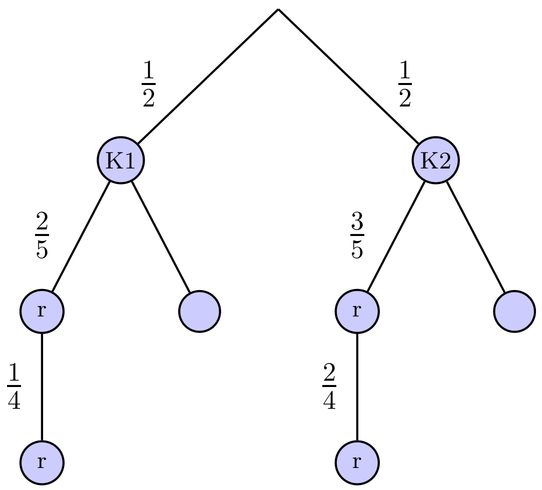
Binomialverteilung $\quad P_{\frac{1}{9}}^{10}(Z=1)=38{,}5\,\%$

d) Bestimmen Sie, wie viele Kandidaten an der Quizshow mindestens teilnehmen müssten, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90 % wenigstens ein Kandidat darunter ist, der keine Aufgabe aus dem Fachgebiet Mathematik lösen muss.

$P_{\frac{1}{9}}^{n}(W\geq 1)=0{,}9;\quad$ ab $n=20$

Für eine Aufgabe aus dem Fachgebiet Mathematik kommen zwei Kuverts zum Einsatz, die jeweils fünf Spielkarten enthalten. Es ist bekannt, dass das eine Kuvert genau zwei und das andere genau drei rote Spielkarten enthält. Der Showmaster wählt, jeweils zufällig, ein Kuvert und aus diesem zwei Karten aus.

e) Bestätigen Sie rechnerisch, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden ausgewählten Karten rot sind, 20 % beträgt.



$P(\text{rr})=\frac{1}{5}$

f) Der Showmaster zeigt die beiden ausgewählten Karten; sie sind tatsächlich rot. Der Kandidat wird nach der Wahrscheinlichkeit dafür gefragt, dass die beiden Karten aus dem Kuvert mit den drei roten Karten stammen. Bestimmen Sie diese Wahrscheinlichkeit.

$$P(\text{K2}\mid\text{rr})=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}$$

↑ Ventil-Aufgabe

Im Motor eines bestimmten Flugzeugtyps sind 7 Ventile eingebaut. Die mittlere Lebensdauer eines Ventils beträgt erfahrungsgemäß 120 Stunden. Die Lebensdauer ist normalverteilt mit einer Standardabweichung von 25 Stunden. Alle Ventile werden jeweils nach 60 Flugstunden ausgetauscht.
Gehen Sie davon aus, dass die neu eingebauten Ventile im Wartungsintervall funktionsfähig sind.

a) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass im Wartungsintervall genau ein Ventil von sieben defekt wird.

b) Wie müsste das Wartungsintervall gewählt werden, damit die Wahrscheinlichkeit unter a) lediglich 1 % beträgt?

Die Ersatzventile werden in Kisten mit je 20 Ventilen geliefert. Die Erfahrung zeigt, dass 95 % der gelieferten Ventile (nach dem Einbau) intakt sind. Ihre Anzahl sei binomialverteilt.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass in drei Kisten

- alle Ventile intakt sind,
- insgesamt mehr als vier Ventile defekt sind,
- in genau einer Kiste mehr als zwei Ventile defekt sind,
  die Ventile der anderen beiden Kisten jedoch intakt sind.

↑ Ventil-Aufgabe

Im Motor eines bestimmten Flugzeugtyps sind 7 Ventile eingebaut. Die mittlere Lebensdauer eines Ventils beträgt erfahrungsgemäß 120 Stunden. Die Lebensdauer ist normalverteilt mit einer Standardabweichung von 25 Stunden. Alle Ventile werden jeweils nach 60 Flugstunden ausgetauscht.
Gehen Sie davon aus, dass die neu eingebauten Ventile im Wartungsintervall funktionsfähig sind.

a) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass im Wartungsintervall genau ein Ventil von sieben defekt wird.

$$p = P(X \leq 60) \; = \; \Phi\left(\frac{60-120}{\sigma}\right) = 0{,}0082$$

$$P = 7p(1-p)^6 = 5{,}5\,\%$$

b) Wie müsste das Wartungsintervall gewählt werden, damit die Wahrscheinlichkeit unter a) lediglich 1 % beträgt?

Rückwärtsrechnen

$$7p(1-p)^6 = 1\,\%, \; p_1 = 0{,}00144$$

$$45{,}5 \; = \; \Phi^{-1}_{\mu,\sigma}(p_1)$$

$p_2 = 0{,}6383$ führt zu keiner Lösung.

$$128{,}9 \; = \; \Phi^{-1}_{\mu,\sigma}(p_2)$$

Die Ersatzventile werden in Kisten mit je 20 Ventilen geliefert. Die Erfahrung zeigt, dass 95 % der gelieferten Ventile (nach dem Einbau) intakt sind. Ihre Anzahl sei binomialverteilt.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass in drei Kisten

- alle Ventile intakt sind, $P^{60}_{0,95}(X=60) = 0{,}95^{60} = 4{,}6\,\%$
- insgesamt mehr als vier Ventile defekt sind, $P^{60}_{0,95}(X \leq 55) = 1 - P^{60}_{0,05}(Y \leq 4) = 18{,}0\,\%$
- in genau einer Kiste mehr als zwei Ventile defekt sind,
  die Ventile der anderen beiden Kisten jedoch intakt sind.

$$3 \cdot 0{,}95^{20} \cdot 0{,}95^{20} \cdot P^{20}_{0,05}(Y > 2) = 2{,}9\,\%$$

↑ Fan-Aufgabe   Baden-Württemberg Abitur 2014 berufl. Gymn.

Die Polizei plant für das Spiel der beiden Fußballvereine Rot-Weiß Kuborg (RWK) und TuS Restadt (TuS) einen Einsatz.

Sie geht davon aus, dass 48 % der Zuschauer Fans vom RWK und 30 % vom TuS sind. Keiner der Fans ist Fan von beiden Vereinen. Die restlichen Zuschauer werden als neutral eingestuft.

Die Polizei weiß aus Erfahrung, dass 15 % aller Zuschauer Alkohol bei sich haben, unter den RWK-Fans sind es sogar 20 % und unter den TuS-Fans nur 10 %.

a) Die Polizei kontrolliert vor dem Stadion vier zufällig ausgewählte Personen aus einer Gruppe von RWK-Fans.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A: Mindestens eine Person hat Alkohol dabei.

B: Genau zwei Personen haben Alkohol dabei.

C: Höchstens eine Person hat keinen Alkohol dabei.

b) Wie viel Prozent der neutralen Zuschauer haben Alkohol bei sich?
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von allen Personen, die Alkohol dabei haben, eine zufällig ausgewählte Person ein TuS-Fan ist?

c) Der Einsatzleiter möchte wissen, wie viele Personen mindestens in einer Gruppe von TuS-Fans kontrolliert werden müssen, um mit mehr als 60 % Wahrscheinlichkeit mindestens zwei Personen mit Alkohol erwischen.

Der Sohn des Einsatzleiters meint, dass die kleinste natürliche Zahl n, die die Ungleichung

$$0{,}6 < 1 - (0{,}9^n + 0{,}9^{n-1} \cdot 0{,}1)$$

erfüllt, die gesuchte Personenzahl ist.

Begründen Sie, warum dieser Ansatz falsch ist.

↑ Fan-Aufgabe   Baden-Württemberg Abitur 2014 berufl. Gymn.

Die Polizei plant für das Spiel der beiden Fußballvereine Rot-Weiß Kuborg (RWK) und TuS Restadt (TuS) einen Einsatz.

Sie geht davon aus, dass 48 % der Zuschauer Fans vom RWK und 30 % vom TuS sind. Keiner der Fans ist Fan von beiden Vereinen. Die restlichen Zuschauer werden als neutral eingestuft.

Die Polizei weiß aus Erfahrung, dass 15 % aller Zuschauer Alkohol bei sich haben, unter den RWK-Fans sind es sogar 20 % und unter den TuS-Fans nur 10 %.

a) Die Polizei kontrolliert vor dem Stadion vier zufällig ausgewählte Personen aus einer Gruppe von RWK-Fans.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A: Mindestens eine Person hat Alkohol dabei. $P^4_{0,20}(X \geq 1) = 1 - 0{,}8^4 = 59{,}0\,\%$

B: Genau zwei Personen haben Alkohol dabei. $P^4_{0,20}(X = 2) = 15{,}4\,\%$

C: Höchstens eine Person hat keinen Alkohol dabei. $P^4_{0,80}(X \leq 1) = 2{,}7\,\%$

b) Wie viel Prozent der neutralen Zuschauer haben Alkohol bei sich? 10,9 %
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von allen Personen, die Alkohol dabei haben, eine zufällig ausgewählte Person ein TuS-Fan ist? 20 %

	RWK-Fan	TuS-Fan	Neutral	
mit Alkohol	9,6 %	3 %	2,4 %	15 %
ohne Alkohol	38,4 %	27 %	19,6 %	85 %
	48 %	30 %	22 %	100 %

c) Der Einsatzleiter möchte wissen, wie viele Personen mindestens in einer Gruppe von TuS-Fans kontrolliert werden müssen, um mit mehr als 60 % Wahrscheinlichkeit mindestens zwei Personen mit Alkohol erwischen.

Der Sohn des Einsatzleiters meint, dass die kleinste natürliche Zahl n, die die Ungleichung

$$0{,}6 < 1 - (0{,}9^n + 0{,}9^{n-1} \cdot 0{,}1)$$

erfüllt, die gesuchte Personenzahl ist.

Begründen Sie, warum dieser Ansatz falsch ist.

$$P^{\mathrm{n}}_{0,10}(Y \geq 2) = 1 - \underbrace{P^{\mathrm{n}}_{0,10}(Y \leq 1)}_{0{,}9^n + 0{,}9^{n-1} \cdot 0{,}1 \cdot n} > 0{,}6$$

↑ Rückerstattung Baden-Württemberg Abitur berufl. Gymn.

1 Ein Skiort wirbt mit Schneesicherheit und seinem großen Skigebiet. Leider kommt es in diesem Gebiet auch zu Schneestürmen, dann sind die Pisten gesperrt. Langjährige Wetteraufzeichnungen in den Bergen zeigen, dass im Monat Januar 20 % der Tage Sturmtage sind.

1.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse:

A: Von drei Januartagen ist genau ein Tag ein Sturmtag.

B: Eine Woche im Januar hat mindestens einen Sturmtag.

1.2 Der Besitzer eines Hotels bietet folgendes Angebot für sieben Tage Halbpension im Monat Januar an: Falls der Gast mehr als zwei Sturmtage erlebt, erhält er eine Rückerstattung von 100 € .

Ein Gast erhält die Rückerstattung von 100 € .
Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er genau drei Sturmtage erlebt?

1.3 Der Hotelier plant, an den Sturmtagen ein Wellnessangebot anzubieten. Um die Auslastung dieses Angebots in den nächsten zehn Jahren beurteilen zu können, schätzt er, dass es im Januar in diesem Zeitraum insgesamt 62 Sturmtage geben wird.

1.3.1 Erläutern Sie, wie er zu diesem Wert kommen kann.

1.3.2 Das Wellnessangebot ist nicht rentabel, wenn es weniger als 50 Sturmtage in den nächsten zehn Jahren gibt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Angebot sich nicht rentiert?

1.4 Der Hotelier befragt zufällig ausgewählte Gäste nach ihrer Zufriedenheit. Von 120 befragten Gästen sind 96 zufrieden. Bestimmen Sie ein 95 %-Vertrauensintervall für den Anteil der zufriedenen Gäste.

↑ Rückerstattung Baden-Württemberg Abitur berufl. Gymn.

2 Ein Skiort wirbt mit Schneesicherheit und seinem großen Skigebiet. Leider kommt es in diesem Gebiet auch zu Schneestürmen, dann sind die Pisten gesperrt. Langjährige Wetteraufzeichnungen in den Bergen zeigen, dass im Monat Januar 20 % der Tage Sturmtage sind.

Der Besitzer eines Hotels in diesem Skiort bietet folgendes Angebot für den Monat Januar:
Sieben Tage Halbpension kosten für eine Person 500 € . Falls während dieser sieben Tage mehr als zwei Sturmtage sind, erhält der Gast eine Rückerstattung von 100 € .

2.1 Anton bucht dieses Angebot. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse:

A: Anton erlebt keinen Sturmtag.

B: Anton kann nur an den ersten drei und den letzten zwei Tagen Ski fahren.

C: Anton erlebt mindestens zwei Sturmtage.

2.2 Da das Angebot nicht die erhoffte Nachfrage zeigt, möchte der Hotelier die Rückerstattung erhöhen. Prüfen Sie, ob der Hotelier die Rückerstattung auf 200 € anheben kann, wenn er mindestens 460 € pro Gast einnehmen will.

2.3 Anton plant seinen nächsten Skiurlaub im gleichen Skigebiet. Er stellt sich die folgende Frage: „Wie viele Tage im Januar darf ich maximal buchen, wenn ich mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 60 % nicht mehr als einen Sturmtag erleben will?“

↑ Rückerstattung   Baden-Württemberg Abitur berufl. Gymn.

1 Ein Skiort wirbt mit Schneesicherheit und seinem großen Skigebiet. Leider kommt es in diesem Gebiet auch zu Schneestürmen, dann sind die Pisten gesperrt. Langjährige Wetteraufzeichnungen in den Bergen zeigen, dass im Monat Januar 20 % der Tage Sturmtage sind.

1.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse:

A: Von drei Januartagen ist genau ein Tag ein Sturmtag. $3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^2 = 0{,}384$

B: Eine Woche im Januar hat mindestens einen Sturmtag. $1 - 0{,}8^7 = 0{,}790$

1.2 Der Besitzer eines Hotels bietet folgendes Angebot für sieben Tage Halbpension im Monat Januar an: Falls der Gast mehr als zwei Sturmtage erlebt, erhält er eine Rückerstattung von 100 € .

Ein Gast erhält die Rückerstattung von 100 € .
Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er genau drei Sturmtage erlebt? bed. W. $\frac{0{,}1147}{0{,}1480} = 0{,}775$

1.3 Der Hotelier plant, an den Sturmtagen ein Wellnessangebot anzubieten. Um die Auslastung dieses Angebots in den nächsten zehn Jahren beurteilen zu können, schätzt er, dass es im Januar in diesem Zeitraum insgesamt 62 Sturmtage geben wird.

1.3.1 Erläutern Sie, wie er zu diesem Wert kommen kann. $31 \cdot 10 \cdot 0{,}2 = 62$

1.3.2 Das Wellnessangebot ist nicht rentabel, wenn es weniger als 50 Sturmtage in den nächsten zehn Jahren gibt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Angebot sich nicht rentiert?

$P_{0,2}^{310}(X \leq 49) = \ 3{,}5\,\%$

1.4 Der Hotelier befragt zufällig ausgewählte Gäste nach ihrer Zufriedenheit. Von 120 befragten Gästen sind 96 zufrieden. Bestimmen Sie ein 95 %-Vertrauensintervall für den Anteil der zufriedenen Gäste.

$h = \frac{96}{120} = 0{,}8$

Wald-Konfidenzintervall $\left[0{,}8 - 1{,}96 \cdot \frac{\sqrt{0{,}8 \cdot 0{,}2}}{\sqrt{120}}; 0{,}8 + 1{,}96 \cdot \frac{\sqrt{0{,}8 \cdot 0{,}2}}{\sqrt{120}}\right] = [0{,}728; 0{,}872]$

↑ Olivenöl

Ein Produzent von Olivenöl gibt auf den Etiketten der Flaschen eine Füllmenge von 500 ml an.
Dieser Wert wird als Nennwert bezeichnet. Die Olivenölflaschen werden von einer Abfüllmaschine gefüllt. Die Abfüllmenge X kann als normalverteilte Zufallsgröße angesehen werden mit dem Erwartungswert $\mu = 502{,}4\ ml$ und der Standardabweichung $\sigma = 5{,}2\ ml$.

a) Aus der laufenden Produktion wird eine Stichprobe vom Umfang 100 genommen.
Die Zufallsgröße Y beschreibt die Anzahl der Olivenölflaschen, die höchstens 500 ml Inhalt aufweisen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, in der Stichprobe

(1) mindestens 30 Flaschen

(2) mehr als 28 und höchstens 35 Flaschen

mit einer Füllmenge von höchstens 500 ml zu erhalten.

b) Überprüfen Sie, ob folgende Verordnung eingehalten wird:
Höchstens 2 % der gesamten Produktion darf eine Füllmenge von 490 ml unterschreiten.

Eine zweite Verordnung schreibt vor, dass bei einer Stichprobe vom Umfang 5 das arithmetische Mittel der Füllmengen mindestens so groß sein muss wie der angegebene Nennwert.
Für die ersten 4 Flaschen liefern die Messungen die folgenden Füllmengen:
497,2 ml, 501,6 ml, 503,8 ml, 495,1 ml.

Bestimmen Sie die Mindestfüllmenge der 5. Flasche, so dass diese Vorgabe eingehalten wird.

c) Die maximale Füllmenge für eine Flasche beträgt 515 ml, danach läuft Olivenöl über. Ermitteln Sie die zu erwartende Anzahl überlaufender Olivenölflaschen, wenn 1300 Stück abgefüllt werden.

d) Bestimmen Sie die obere Grenze des Intervalls, in dem 75 % aller Füllmengen liegen,
wenn die untere Grenze 497 ml beträgt.

e) Aus Kostengründen sollen höchstens 5 % aller Flaschen mehr als 506 ml enthalten. Diese Vorgabe wird durch die vorhandene Abfüllmaschine aufgrund der zu großen Standardabweichung von 5,2 ml nicht erfüllt. Ermitteln Sie bei gleich bleibendem Erwartungswert von $\mu = 502{,}4\ ml$ die größte Standardabweichung, für die diese Vorgabe erfüllt ist.

f) In einem Karton befindet sich eine unbekannte Anzahl von Flaschen, darunter sind 4 Flaschen mit mehr als 500 ml Inhalt. Es werden zufällig zwei Flaschen aus dem Karton entnommen. Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Flaschen mehr als 500 ml Inhalt aufweisen, beträgt 2 %. Ermitteln Sie mit diesen Informationen die Gesamtanzahl der Flaschen im Karton.
Tipp: Auch an Pfadwahrscheinlichkeit denken.

↑ Olivenöl

Ein Produzent von Olivenöl gibt auf den Etiketten der Flaschen eine Füllmenge von 500 ml an. Dieser Wert wird als Nennwert bezeichnet. Die Olivenölflaschen werden von einer Abfüllmaschine gefüllt. Die Abfüllmenge X kann als normalverteilte Zufallsgröße angesehen werden mit dem Erwartungswert $\mu = 502{,}4\ ml$ und der Standardabweichung $\sigma = 5{,}2\ ml$.

a) Aus der laufenden Produktion wird eine Stichprobe vom Umfang 100 genommen.
Die Zufallsgröße Y beschreibt die Anzahl der Olivenölflaschen, die höchstens 500 ml Inhalt aufweisen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, in der Stichprobe

(1) mindestens 30 Flaschen $\quad P(X \leq 500) = 0{,}322$

$$P_{0{,}322}^{100}(X \geq 30) = 1 - P_{0{,}322}^{100}(X \leq 29) = 71{,}5\,\%$$

(2) mehr als 28 und höchstens 35 Flaschen $\quad P_{0{,}322}^{100}(29 \leq X \leq 35) = 54{,}6\,\%$

mit einer Füllmenge von höchstens 500 ml zu erhalten.

b) Überprüfen Sie, ob folgende Verordnung eingehalten wird:
Höchstens 2 % der gesamten Produktion darf eine Füllmenge von 490 ml unterschreiten.

$P(X \leq 490) = 0{,}0085$ Verordnung wird eingehalten.

alternativ $\quad P(X \leq k) = 0{,}02 \quad \Longrightarrow \quad k = 491{,}7$

Eine zweite Verordnung schreibt vor, dass bei einer Stichprobe vom Umfang 5 das arithmetische Mittel der Füllmengen mindestens so groß sein muss wie der angegebene Nennwert.
Für die ersten 4 Flaschen liefern die Messungen die folgenden Füllmengen:
497,2 ml, 501,6 ml, 503,8 ml, 495,1 ml.

Bestimmen Sie die Mindestfüllmenge der 5. Flasche, so dass diese Vorgabe eingehalten wird. $\quad$ 502,3 ml

c) Die maximale Füllmenge für eine Flasche beträgt 515 ml, danach läuft Olivenöl über. Ermitteln Sie die zu erwartende Anzahl überlaufender Olivenölflaschen, wenn 1300 Stück abgefüllt werden.

$$P(X > 515) \cdot 1300 = 10$$

d) Bestimmen Sie die obere Grenze des Intervalls, in dem 75 % aller Füllmengen liegen, wenn die untere Grenze 497 ml beträgt. $\quad P(497 \leq X \leq a) = 0{,}75$

$$a = 509{,}05$$

e) Aus Kostengründen sollen höchstens 5 % aller Flaschen mehr als 506 ml enthalten. Diese Vorgabe wird durch die vorhandene Abfüllmaschine aufgrund der zu großen Standardabweichung von 5,2 ml nicht erfüllt. Ermitteln Sie bei gleich bleibendem Erwartungswert von $\mu = 502{,}4\ ml$ die größte Standardabweichung, für die diese Vorgabe erfüllt ist. $\quad \sigma_{\text{max}} = 2{,}19\ ml$ siehe Standardisierung, S. 6

f) In einem Karton befindet sich eine unbekannte Anzahl von Flaschen, darunter sind 4 Flaschen mit mehr als 500 ml Inhalt. Es werden zufällig zwei Flaschen aus dem Karton entnommen. Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Flaschen mehr als 500 ml Inhalt aufweisen, beträgt 2 %. Ermitteln Sie mit diesen Informationen die Gesamtanzahl der Flaschen im Karton.
Tipp: Auch an Pfadwahrscheinlichkeit denken.

$$P(A) = \frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n-1} = 0{,}02$$

$$n_1 = 25, \ (n_2 = -24)$$

↑ Reißzwecke

Beim Werfen einer Reißzwecke kann diese entweder auf der Seite oder auf dem Kopf liegen bleiben (siehe Abbildung). Eine Reißzwecke wird zweimal geworfen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie dabei mindestens einmal auf der Seite liegen bleibt, beträgt 0,84.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Reißzwecke bei den zwei Würfen genau einmal auf dem Kopf liegen bleibt.

↑ Reißzwecke

Beim Werfen einer Reißzwecke kann diese entweder auf der Seite oder auf dem Kopf liegen bleiben (siehe Abbildung). Eine Reißzwecke wird zweimal geworfen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie dabei mindestens einmal auf der Seite liegen bleibt, beträgt 0,84.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Reißzwecke bei den zwei Würfen genau einmal auf dem Kopf liegen bleibt.

Seitenlage Treffer, Wahrscheinlichkeit p
$P(X \geq 1) = 0{,}84$
$P(X = 0) = 0{,}16$
$q = 0{,}4$
$p = 0{,}6$
$P = 2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}48$

2 Ein Skiort wirbt mit Schneesicherheit und seinem großen Skigebiet. Leider kommt es in diesem Gebiet auch zu Schneestürmen, dann sind die Pisten gesperrt. Langjährige Wetteraufzeichnungen in den Bergen zeigen, dass im Monat Januar 20 % der Tage Sturmtage sind.

Der Besitzer eines Hotels in diesem Skiort bietet folgendes Angebot für den Monat Januar: Sieben Tage Halbpension kosten für eine Person 500 € . Falls während dieser sieben Tage mehr als zwei Sturmtage sind, erhält der Gast eine Rückerstattung von 100 € .

2.1 Anton bucht dieses Angebot. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse:

A: Anton erlebt keinen Sturmtag.

B: Anton kann nur an den ersten drei und den letzten zwei Tagen Ski fahren.

C: Anton erlebt mindestens zwei Sturmtage.

2.2 Da das Angebot nicht die erhoffte Nachfrage zeigt, möchte der Hotelier die Rückerstattung erhöhen. Prüfen Sie, ob der Hotelier die Rückerstattung auf 200 € anheben kann, wenn er mindestens 460 € pro Gast einnehmen will.

2.3 Anton plant seinen nächsten Skiurlaub im gleichen Skigebiet. Er stellt sich die folgende Frage: „Wie viele Tage im Januar darf ich maximal buchen, wenn ich mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 60 % nicht mehr als einen Sturmtag erleben will?“

↑ Rückerstattung Baden-Württemberg Abitur berufl. Gymn.

2 Ein Skiort wirbt mit Schneesicherheit und seinem großen Skigebiet. Leider kommt es in diesem Gebiet auch zu Schneestürmen, dann sind die Pisten gesperrt. Langjährige Wetteraufzeichnungen in den Bergen zeigen, dass im Monat Januar 20 % der Tage Sturmtage sind.

Der Besitzer eines Hotels in diesem Skiort bietet folgendes Angebot für den Monat Januar:
Sieben Tage Halbpension kosten für eine Person 500 € . Falls während dieser sieben Tage mehr als zwei Sturmtage sind, erhält der Gast eine Rückerstattung von 100 € .

2.1 Anton bucht dieses Angebot. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse:

A: Anton erlebt keinen Sturmtag. 0,210

B: Anton kann nur an den ersten drei und den letzten zwei Tagen Ski fahren. $0,8^3 \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^2 = 0{,}013$

C: Anton erlebt mindestens zwei Sturmtage. 0,423

2.2 Da das Angebot nicht die erhoffte Nachfrage zeigt, möchte der Hotelier die Rückerstattung erhöhen. Prüfen Sie, ob der Hotelier die Rückerstattung auf 200 € anheben kann, wenn er mindestens 460 € pro Gast einnehmen will.

Einnahmen in €: $500 \cdot P^7_{0,2}(X \leq 2) + 300 \cdot (1 - P^7_{0,2}(X \leq 2)) = 470{,}39 > 460$

2.3 Anton plant seinen nächsten Skiurlaub im gleichen Skigebiet. Er stellt sich die folgende Frage:
„Wie viele Tage im Januar darf ich maximal buchen, wenn ich mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 60 % nicht mehr als einen Sturmtag erleben will?“

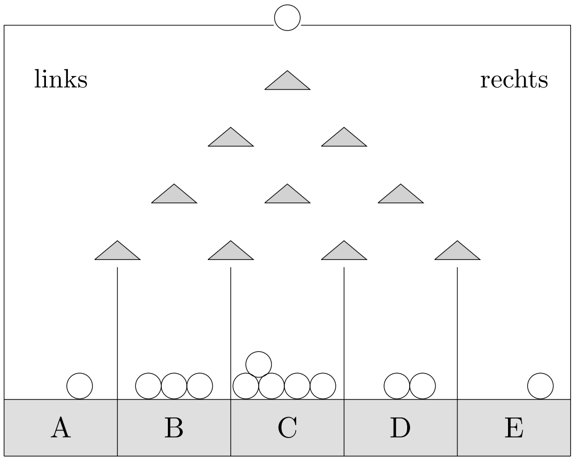
n maximal: $P^n_{0,2}(X \leq 1) \geq 0{,}6$

$$P^6_{0,2}(X \leq 1) = 0{,}655$$

$$P^7_{0,2}(X \leq 1) = 0{,}577$$

$$n = 6$$

↑ Galton-Brett



Für ein Schulfest plant eine Klasse einen Glücksspielstand mit einem Galton-Brett.
Eingeworfene Kugeln werden auf jedem der tiefer liegenden Stifte jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}5$ nach rechts bzw. nach links abgelenkt, um dann schließlich in einem der Auffangbehälter A, B, C, D und E zu landen.

a) Die Tabelle gibt die Wahrscheinlichkeiten an, mit denen eine eingeworfene Kugel in die jeweiligen Auffangbehälter fällt.

Behälter	A	B	C	D	E
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

Begründen Sie die Werte für die Behälter A und B.

Leichtes Verbiegen des Stifts links außen in der vierten Reihe (von oben) führt dazu, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine eingeworfene Kugel im Auffangbehälter A landet, $\frac{1}{32}$ beträgt. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der dieser verbogene Stift die Kugeln nach links ablenkt.

Durch leichtes Schrägstellen des Original-Bretts wird erreicht, dass sich die Ablenkwahrscheinlichkeiten aller Stifte in gleicher Weise verändern. Berechnen Sie den Erwartungswert für die Anzahl der Kugeln im Auffangbehälter C beim Einwerfen von 259 Kugeln, wenn alle Stifte jetzt mit den Wahrscheinlichkeiten $p_{\text{links}} = \frac{1}{4}$ und $p_{\text{rechts}} = \frac{3}{4}$ ablenken.

b) Das exakt horizontal stehende Galton-Brett (1. Tabelle aus Aufgabenteil a) möchte die Klasse für ein Glücksspiel nutzen. Nach Einwurf jeweils nur einer Kugel sollen bei einem Einsatz des Spielers von 1 € je nach Auftreffen der Kugel in den Auffangbehältern die folgenden Beträge ausgezahlt werden:

Behälter	A	B	C	D	E
Auszahlung	3 €	1,20 €	0 €	1,20 €	3 €

Berechnen Sie den zu erwartenden Verlust oder Gewinn des Spielers pro Spiel.

Der Klassenlehrer drängt auf eine Änderung der Spielregeln, da bei Glücksspielen in der Schule weder Gewinne noch Verluste erzielt werden sollten. Berechnen Sie, wie die Auszahlung bei den Ergebnissen „Kugel landet in dem Behälter A“ und „Kugel landet in dem Behälter E“ geändert werden müssen. Bei beiden Ergebnissen sollen die Auszahlungen aus Symmetriegründen gleich groß sein.

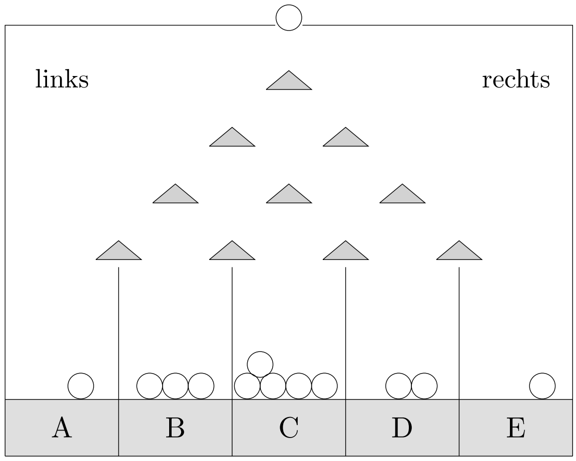
c) Das Galton-Brett wird wieder exakt horizontal aufgestellt.

Berechnen Sie mithilfe der Binomialverteilung die Wahrscheinlichkeit, dass beim Einwurf von 50 Kugeln 16 oder 17 Kugeln in den Behälter C fallen.
Zeigen Sie, dass die eben berechnete Wahrscheinlichkeit auch näherungsweise mit der Normalverteilung bestimmt werden kann, und führen Sie die Rechnung durch.
Bestimmen Sie, wie viele Kugeln man mindestens einwerfen muss, damit die Wahrscheinlichkeit, dass der Behälter A leer bleibt, kleiner als 7 % ist.

d) Bei einem schräg aufgestellten Galton-Brett mit n Stiftreihen sei p_{A} die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine eingeworfene Kugel in Auffangbehälter A fällt, p_{B} sei die entsprechende Wahrscheinlichkeit für Behälter B. Außerdem gelte $p_{\mathrm{B}} = 3np_{\mathrm{A}}$. Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Stifte die Kugel nach links ablenken.

↑

↑ Galton-Brett



a) Die Tabelle gibt die Wahrscheinlichkeiten an, mit denen eine eingeworfene Kugel in die jeweiligen Auffangbehälter fällt.

Behälter	A	B	C	D	E
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

Begründen Sie die Werte für die Behälter A und B. $p_{\text{A}} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$, $p_{\text{B}} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}$

Leichtes Verbiegen des Stifts ... $p_{\text{A}} = \frac{1}{32} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot p_L \implies p_L = \frac{1}{4}$

Auffangbehälter C, 259 Kugeln, $p_{\text{links}} = \frac{1}{4}$, $p_{\text{rechts}} = \frac{3}{4}$ 54

b)

Behälter	A	B	C	D	E
Auszahlung	3 €	1,20 €	0 €	1,20 €	3 €

$E(X) = -0{,}025$

$A = 3{,}20$ (Einsatz beachten)

c) Von 50 Kugeln 16 oder 17 Kugeln in C. 19,0 %

Normalverteilung, Stetigkeitskorrektur, Laplace-Bedingung $\sigma > 3$ erfüllt 18,5 %

Behälter A leer $\left(\frac{15}{16}\right)^n < 0{,}07$ mindestens 42 Kugeln

d) schräges Galton-Brett mit n Stiftreihen, $p_{\text{B}} = 3np_{\text{A}}$ $p_{\text{A}} = p_L^n$

$p_{\text{B}} = n \cdot p_L^{n-1} \cdot (1 - p_L)$

In die Bedingung eingesetzt erhalten wir $p_L = \frac{1}{4}$.

↑ Tischtennisbälle

Tischtennisbälle sind im Spielbetrieb extremen Belastungen ausgesetzt. Erst nach aufwendigen Testverfahren kommen die Turnierbälle als sogenannte „3-Stern-Bälle“ in den Handel. Die Bälle, die bei der Herstellung durch die Kontrollen fallen, werden als Trainingsbälle angeboten.

a) Unter den Trainingsbällen wiederum befinden sich auch solche, die durch starke Verformungen (V) oder Nahtfehler (N) völlig unbrauchbar sind. Andere Fehler treten nicht auf. 5 % der Trainingsbälle des Herstellers „Ping und Pong“ zeigen starke Verformungen und 7 % weisen defekte Nahtstellen auf. 2 % aller Trainingsbälle zeigen sogar beide Fehler.

   Ermitteln Sie den Anteil der völlig unbrauchbaren Trainingsbälle.

   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig zu entnehmender Tischtennisball mit Nahtfehlern Verformungen hat.

b) Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass 10 % der Trainingsbälle der Firma „Ping und Pong“ völlig unbrauchbar sind.

   Trainingsbälle werden u. a. in Großpackungen zu 100 Stück angeboten. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man mehr als 11, aber höchstens 14 völlig unbrauchbare Bälle in einer solchen Packung findet.

   In einer 12er-Packung befinden sich genau 3 völlig unbrauchbare Bälle. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter 6 daraus zu entnehmenden Bällen genau 2 völlig unbrauchbare befinden.

   Ermitteln Sie die Zahl der Trainingsbälle, die man der Produktion mindestens entnehmen müsste, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95 % mindestens einen völlig unbrauchbaren Ball zu erhalten.

c) Trotz der Kontrollen liegt der Anteil der einwandfreien Turnierbälle unter den verkauften „3-Stern-Bällen“ der Firma „Ping und Pong“ erfahrungsgemäß nur bei 92 %. Für die Meisterschaften eines Tischtennis-Verbandes werden bei diesem Hersteller 1000 „3-Stern-Bälle“ geordert.

   Berechnen Sie die größte Zahl k so, dass die Wahrscheinlichkeit, mit dieser Lieferung mindestens k einwandfreie Turnierbälle zu erhalten, größer als 98 % ist.

d) Die Firma „Ping und Pong“ räumt Kunden ein, mangelhafte Bälle zurückzugeben.
   Im Durchschnitt werden 5 % der ausgelieferten Bälle bemängelt. Für jeden zurückgegebenen Ball erleidet die Firma einen Verlust von 0,30 Euro, für jeden nicht zurückgegebenen Ball erzielt sie einen Gewinn von 0,80 Euro.
   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der die Firma bei einer Lieferung von 1000 Bällen einen Gesamtgewinn von mindestens 750 Euro erzielt.

↑ Tischtennisbälle

Tischtennisbälle sind im Spielbetrieb extremen Belastungen ausgesetzt. Erst nach aufwendigen Testverfahren kommen die Turnierbälle als sogenannte „3-Stern-Bälle“ in den Handel. Die Bälle, die bei der Herstellung durch die Kontrollen fallen, werden als Trainingsbälle angeboten.

a) Unter den Trainingsbällen wiederum befinden sich auch solche, die durch starke Verformungen (V) oder Nahtfehler (N) völlig unbrauchbar sind. Andere Fehler treten nicht auf. 5 % der Trainingsbälle des Herstellers „Ping und Pong“ zeigen starke Verformungen und 7 % weisen defekte Nahtstellen auf. 2 % aller Trainingsbälle zeigen sogar beide Fehler.

Ermitteln Sie den Anteil der völlig unbrauchbaren Trainingsbälle.

$P(N \mid V) = 40\,\%,\ P(V \cap \overline{N}) = 3\%,\ P(N) + P(V \cap \overline{N}) = 10\,\%$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig zu entnehmender Tischtennisball mit Nahtfehlern Verformungen hat. $P(V \mid N) = 28{,}6\,\%$

b) Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass 10 % der Trainingsbälle der Firma „Ping und Pong“ völlig unbrauchbar sind.

Trainingsbälle werden u. a. in Großpackungen zu 100 Stück angeboten. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man mehr als 11, aber höchstens 14 völlig unbrauchbare Bälle in einer solchen Packung findet. $P(11 \le X \le 14) = 22{,}4\,\%$

In einer 12er-Packung befinden sich genau 3 völlig unbrauchbare Bälle. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter 6 daraus zu entnehmenden Bällen genau 2 völlig unbrauchbare befinden.

$P(Y = 2) = 40{,}9\,\%$ (hypergeometrisch)

Ermitteln Sie die Zahl der Trainingsbälle, die man der Produktion mindestens entnehmen müsste, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95 % mindestens einen völlig unbrauchbaren Ball zu erhalten. mindestens 29 Bälle

c) Trotz der Kontrollen liegt der Anteil der einwandfreien Turnierbälle unter den verkauften „3-Stern-Bällen“ der Firma „Ping und Pong“ erfahrungsgemäß nur bei 92 %. Für die Meisterschaften eines Tischtennis-Verbandes werden bei diesem Hersteller 1000 „3-Stern-Bälle“ geordert.

Berechnen Sie die größte Zahl k so, dass die Wahrscheinlichkeit, mit dieser Lieferung mindestens k einwandfreie Turnierbälle zu erhalten, größer als 98 % ist. $k = 902$

d) Die Firma „Ping und Pong“ räumt Kunden ein, mangelhafte Bälle zurückzugeben.
Im Durchschnitt werden 5 % der ausgelieferten Bälle bemängelt. Für jeden zurückgegebenen Ball erleidet die Firma einen Verlust von 0,30 Euro, für jeden nicht zurückgegebenen Ball erzielt sie einen Gewinn von 0,80 Euro.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der die Firma bei einer Lieferung von 1000 Bällen einen Gesamtgewinn von mindestens 750 Euro erzielt.

$$(1000 - x) \cdot 0{,}8 - x \cdot 0{,}3 \ge 750$$

$$x \le 45{,}5$$

Mit 45 oder weniger zurückgegebenen Bällen werden Einnahmen von mindestens 750 Euro erzielt.

$P(X \le 45) = 25{,}8\,\%$ Normalverteilung mit Stetigkeitskorrektur, 26,1 % Binomialverteilung

a) Vierfeldertafel

	V	$\overline{V}$	
N	0,02	0,05	0,07
$\overline{N}$	0,03	0,90	0,93
	0,05	0,95	1,00

$1 - P(\overline{N} \cap \overline{V}) = 0{,}10$

10 % der Trainingsbälle sind völlig unbrauchbar.

↑

↑ Fahrzeit

Xara fährt von Montag bis Freitag regelmäßig mit dem Rad zur Schule. Ihre Fahrzeit ohne Wartezeit beträgt 20 Minuten. Allerdings kommt sie an drei Fahrradampeln vorbei, die unabhängig voneinander geschaltet sind. Sie findet die ersten beiden Ampeln jeweils zu 70 %, die dritte zu 60 % mit Rot vor. Sie weiß, dass sich ihre Fahrzeit an jeder roten Ampel durchschnittlich um 2 Minuten verlängert. Zur Vereinfachung rechnen Sie im Folgenden mit einer konstanten Fahrtverlängerung um 2 Minuten, wenn eine Ampel Rot zeigt.

a) Zeichnen Sie ein bezüglich der Ampelsituation geeignetes vollständig beschriftetes Baumdiagramm mit allen Wahrscheinlichkeiten längs der Pfade.

   Bestimmen Sie für eine Fahrt zur Schule die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse
   A = „Alle Ampeln zeigen Grün."
   B = „Mindestens eine Ampel zeigt Rot."
   C = „Genau zwei Ampeln zeigen Rot."

   Bestimmen Sie die durchschnittlich zu erwartende Wartezeit an allen Ampeln für ihren Weg zur Schule.

   In einem Schuljahr fährt Xara 190-mal mit dem Rad zur Schule.
   Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Xara auf ihrem Weg zur Schule an mehr als 131 von diesen Tagen schon an der ersten Ampel warten muss.

b) Xara plant nun immer 22 Minuten für ihren Schulweg ein. Die Wahrscheinlichkeit, dass sie sich verspätet, also an mehr als einer roten Ampel warten muss, beträgt $p = 0{,}742$.
   (Dies muss nicht nachgewiesen werden.)

   In einem Selbstversuch will sie über 10 Schultage hinweg ihre eventuellen Verspätungen protokollieren ($p = 0{,}742$). Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Xara höchstens einmal zu spät kommt.

   Berechnen Sie die Mindestanzahl an Schultagen, über die hinweg Xara Protokoll führen müsste, damit sie mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % mindestens einmal pünktlich erscheint, wenn sich die üblichen Rahmenbedingungen nicht ändern.

c) Yono fährt mit dem Bus zur Schule. Nach Auswertung seiner täglichen Fahrzeiten zur Schule über einen sehr langen Zeitraum hinweg gelangt er zu der Auffassung, dass man die Zufallsvariable „Fahrzeit zur Schule" Y als normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu_Y = 30$ min und der Standardabweichung $\sigma_Y = 4{,}58$ min ansehen kann. Als „gewöhnlich" bezeichnet er eine Fahrt, wenn ihre Dauer nicht mehr als sechs Minuten vom Erwartungswert abweicht.

   Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig herausgegriffene Fahrt „gewöhnlich" ist, und berechnen Sie die zu erwartende Zahl „gewöhnlicher" Fahrten zur Schule in einem Schuljahr mit 190 Schultagen.

d) Gegeben ist eine teilweise ausgefüllte Tabelle zu einer binomialverteilten Zufallsvariablen Z mit $n = 5$ und Wahrscheinlichkeit p.

k	0	1	2	3	4	5
$P(Z = k)$			0,2926	0,1138	0,?	

   Zoey behauptet, dass anstelle des „?" bei $P(Z = 4)$ ursprünglich an der ersten Nachkommastelle eine 2 gestanden habe. Überprüfen Sie, ob Zoeys Aussage wahr ist.

   Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit p, die obiger Verteilung zugrunde liegt.

↑ Fahrzeit

Xara fährt von Montag bis Freitag regelmäßig mit dem Rad zur Schule. Ihre Fahrzeit ohne Wartezeit beträgt 20 Minuten. Allerdings kommt sie an drei Fahrradampeln vorbei, die unabhängig voneinander geschaltet sind. Sie findet die ersten beiden Ampeln jeweils zu 70 %, die dritte zu 60 % mit Rot vor.
Sie weiß, dass sich ihre Fahrzeit an jeder roten Ampel durchschnittlich um 2 Minuten verlängert.
Zur Vereinfachung rechnen Sie im Folgenden mit einer konstanten Fahrtverlängerung um 2 Minuten, wenn eine Ampel Rot zeigt.

a) Zeichnen Sie ein bezüglich der Ampelsituation geeignetes vollständig beschriftetes Baumdiagramm mit allen Wahrscheinlichkeiten längs der Pfade.

Baumdiagramm mit drei Stufen
Verzweigungen der 1. und 2. Stufe jeweils 0,7 (Rot), 0,3 (Grün)
Verzweigungen der 3. Stufe jeweils 0,6 (Rot), 0,4 (Grün)

Bestimmen Sie für eine Fahrt zur Schule die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse

$A =$ „Alle Ampeln zeigen Grün.“ $\quad 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 3{,}6\,\%$

$B =$ „Mindestens eine Ampel zeigt Rot.“ $\quad 1 - 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 96{,}4\,\%$

$C =$ „Genau zwei Ampeln zeigen Rot.“ $\quad 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}4 + 0{,}7 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}6 + 0{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 44{,}8\,\%$

Bestimmen Sie die durchschnittlich zu erwartende Wartezeit an allen Ampeln für ihren Weg zur Schule. $\quad E(X) = 0{,}7 \cdot 2 + 0{,}7 \cdot 2 + 0{,}6 \cdot 2 = 4$

In einem Schuljahr fährt Xara 190-mal mit dem Rad zur Schule.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Xara auf ihrem Weg zur Schule an mehr als 131 von diesen Tagen schon an der ersten Ampel warten muss.

$P(X > 131) = 59{,}5\,\%$ Normalverteilung mit Stetigkeitskorrektur, $59{,}8\,\%$ Binomialverteilung

b) Xara plant nun immer 22 Minuten für ihren Schulweg ein. Die Wahrscheinlichkeit, dass sie sich verspätet, also an mehr als einer roten Ampel warten muss, beträgt $p = 0{,}742$.
(Dies muss nicht nachgewiesen werden.)

In einem Selbstversuch will sie über 10 Schultage hinweg ihre eventuellen Verspätungen protokollieren ($p = 0{,}742$). Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Xara höchstens einmal zu spät kommt.

X Anzahl der Verspätungen, $P(X \leq 1) = 0{,}00004 = 0{,}004\,\%$

Berechnen Sie die Mindestanzahl an Schultagen, über die hinweg Xara Protokoll führen müsste, damit sie mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % mindestens einmal pünktlich erscheint, wenn sich die üblichen Rahmenbedingungen nicht ändern.

Y Anzahl der Tage mit pünktlichem Erscheinen, $p = 0{,}258$, $P(Y \geq 1) > 0{,}99$, ab $n = 16$

c) Yono fährt mit dem Bus zur Schule. Nach Auswertung seiner täglichen Fahrzeiten zur Schule über einen sehr langen Zeitraum hinweg gelangt er zu der Auffassung, dass man die Zufallsvariable „Fahrzeit zur Schule“ Y als normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu_Y = 30$ min und der Standardabweichung $\sigma_Y = 4{,}58$ min ansehen kann. Als „gewöhnlich“ bezeichnet er eine Fahrt, wenn ihre Dauer nicht mehr als sechs Minuten vom Erwartungswert abweicht.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig herausgegriffene Fahrt „gewöhnlich“ ist, und berechnen Sie die zu erwartende Zahl „gewöhnlicher“ Fahrten zur Schule in einem Schuljahr mit 190 Schultagen.

$P(24 \leq Y \leq 36) = 0{,}8098$
154 „gewöhnliche“ Fahrten

d) Gegeben ist eine teilweise ausgefüllte Tabelle zu einer binomialverteilten Zufallsvariablen Z mit $n = 5$ und Wahrscheinlichkeit p.

k	0	1	2	3	4	5
$P(Z = k)$			0,2926	0,1138	0,?	

Zoey behauptet, dass anstelle des „?“ bei $P(Z = 4)$ ursprünglich an der ersten Nachkommastelle eine 2 gestanden habe. Überprüfen Sie, ob Zoeys Aussage wahr ist.

Aus $P(X=2) > P(X=3)$ folgt $P(X=3) > P(X=4)$

Die Aussage ist falsch.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit p, die obiger Verteilung zugrunde liegt. 28,0 %

$$P(X=2) = \binom{5}{2} \cdot p^2 \cdot q^3 = 0{,}2926$$

$$P(X=3) = \binom{5}{3} \cdot p^3 \cdot q^2 = 0{,}1138$$

$$\frac{10 \cdot p^2 \cdot q^3}{10 \cdot p^3 \cdot q^2} = \frac{0{,}2926}{0{,}1138}$$

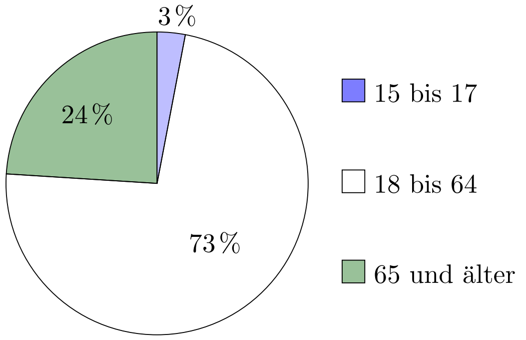
$$\Longleftrightarrow \quad \frac{1-p}{p} = 2{,}5711$$

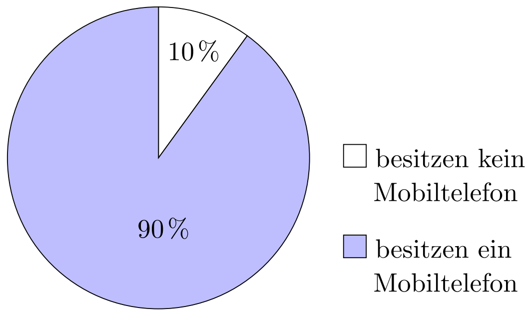
$$p = 0{,}280$$

↑

↑ Mobiltelefon

1. Die beiden Diagramme zeigen für die Bevölkerungsgruppe der über 14-Jährigen in Deutschland Daten zur Altersstruktur und zum Besitz von Mobiltelefonen.





   a) Entscheiden Sie ohne Baumdiagramm und ohne Vierfeldertafel, welche der beiden folgenden Wahrscheinlichkeiten größer ist. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

   p_1 ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die ausgewählte Person ein Mobiltelefon besitzt, wenn bekannt ist, dass sie 65 Jahre oder älter ist.

   p_2 ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die ausgewählte Person 65 Jahre oder älter ist, wenn bekannt ist, dass sie ein Mobiltelefon besitzt.

   b) Erstellen Sie für die Merkmale $M =$ „Die Person besitzt ein Mobiltelefon.“ und $S =$ „Die Person ist 65 Jahre oder älter.“ eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel, wobei mindestens ein Merkmal mit der Wahrscheinlichkeit von 98 % auftritt.
   Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(M \mid S)$.

2. Zwei Drittel der Senioren in Deutschland besitzen ein Mobiltelefon. Bei einer Talkshow zum Thema „Chancen und Risiken der digitalen Welt“ sitzen 30 Senioren im Publikum.

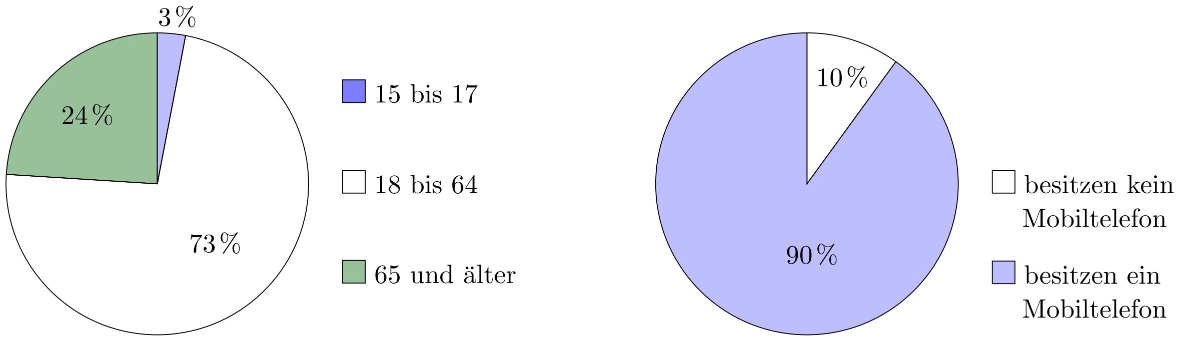
   a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 30 zufällig ausgewählten Senioren mindestens 17 und höchstens 23 ein Mobiltelefon besitzen.

   b) Von den 30 Senioren im Publikum besitzen 24 ein Mobiltelefon. Im Verlauf der Sendung werden drei der Senioren aus dem Publikum zufällig ausgewählt und nach ihrer Meinung befragt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit besitzen genau zwei dieser drei Senioren ein Mobiltelefon?

3. Eine Handelskette hat noch zahlreiche Smartphones des Modells *Y3* auf Lager, als der Hersteller das Nachfolgemodell *Y4* auf den Markt bringt. Der Einkaufspreis für das neue *Y4* beträgt 300 €, während die Handelskette für das Vorgängermodell *Y3* im Einkauf nur 250 € bezahlen musste. Um die Lagerbestände noch zu verkaufen, bietet die Handelskette ab dem Verkaufsstart des *Y4* die Smartphones des Typs *Y3* für je 199 € an. Aufgrund früherer Erfahrungen geht die Handelskette davon aus, dass von den verkauften Smartphones der Modelle *Y3* und *Y4* trotz des Preisnachlasses nur 26 % vom Typ *Y3* sein werden. Berechnen Sie unter dieser Voraussetzung, zu welchem Preis die Handelskette das *Y4* anbieten muss, damit sie voraussichtlich pro verkauftem Smartphone der Modelle *Y3* und *Y4* im Mittel 97 € mehr erhält, als sie beim Einkauf dafür zahlen musste.

↑ Mobiltelefon

1. Die beiden Diagramme zeigen für die Bevölkerungsgruppe der über 14-Jährigen in Deutschland Daten zur Altersstruktur und zum Besitz von Mobiltelefonen.



a) Entscheiden Sie ohne Baumdiagramm und ohne Vierfeldertafel, welche der beiden folgenden Wahrscheinlichkeiten größer ist. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

p_1 ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die ausgewählte Person ein Mobiltelefon besitzt, wenn bekannt ist, dass sie 65 Jahre oder älter ist.

p_2 ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die ausgewählte Person 65 Jahre oder älter ist, wenn bekannt ist, dass sie ein Mobiltelefon besitzt.

$$p_1 = P(M \mid S) = \frac{M \cap S}{S},\ p_2 = P(S \mid M) = \frac{M \cap S}{M},\ P(S) = 0{,}24 < P(M) = 0{,}9,\ p_2 < p_1$$

b) Erstellen Sie für die Merkmale $M =$ „Die Person besitzt ein Mobiltelefon.“ und $S =$ „Die Person ist 65 Jahre oder älter.“ eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel, wobei mindestens ein Merkmal mit der Wahrscheinlichkeit von 98 % auftritt.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(M \mid S)$.

	M	$\overline{M}$	
S	0,16	0,08	0,24
$\overline{S}$	0,74	0,02	0,76
	0,90	0,10	1,00

$P(M \mid S) = 0{,}667$

2. Zwei Drittel der Senioren in Deutschland besitzen ein Mobiltelefon. Bei einer Talkshow zum Thema „Chancen und Risiken der digitalen Welt“ sitzen 30 Senioren im Publikum.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 30 zufällig ausgewählten Senioren mindestens 17 und höchstens 23 ein Mobiltelefon besitzen. $P(A) = 82{,}6\,\%$

b) Von den 30 Senioren im Publikum besitzen 24 ein Mobiltelefon. Im Verlauf der Sendung werden drei der Senioren aus dem Publikum zufällig ausgewählt und nach ihrer Meinung befragt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit besitzen genau zwei dieser drei Senioren ein Mobiltelefon?
$P(E) = 40{,}8\,\%$ (hypergeometrisch)

3. Eine Handelskette hat noch zahlreiche Smartphones des Modells *Y3* auf Lager, als der Hersteller das Nachfolgemodell *Y4* auf den Markt bringt. Der Einkaufspreis für das neue *Y4* beträgt 300 €, während die Handelskette für das Vorgängermodell *Y3* im Einkauf nur 250 € bezahlen musste. Um die Lagerbestände noch zu verkaufen, bietet die Handelskette ab dem Verkaufsstart des *Y4* die Smartphones des Typs *Y3* für je 199 € an. Aufgrund früherer Erfahrungen geht die Handelskette davon aus, dass von den verkauften Smartphones der Modelle *Y3* und *Y4* trotz des Preisnachlasses nur 26 % vom Typ *Y3* sein werden. Berechnen Sie unter dieser Voraussetzung, zu welchem Preis die Handelskette das *Y4* anbieten muss, damit sie voraussichtlich pro verkauftem Smartphone der Modelle *Y3* und *Y4* im Mittel 97 € mehr erhält, als sie beim Einkauf dafür zahlen musste.

	Y3	*Y4*
Anteil	0,26	0,74
Kosten	250 €	300 €
Verkaufspreis	199 €	x

$$-51 \cdot 0{,}26 + (x - 300) \cdot 0{,}74 = 97$$

449 €

↑

↑ Aufgaben zur Binomial- und Normalverteilung

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten sowohl mit der Binomialverteilung
als auch mit der Normalverteilung (Stetigkeitskorrektur).

1. Eine Maschine stellt Transistoren her, von denen durchschnittlich 5 % fehlerhaft sind. Pro Tag werden 200 Transistoren geprüft. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind
   a) weniger als 5
   b) mehr als 15
   c) nicht weniger als 5 und nicht mehr als 15 geprüfte Transistoren defekt?

2. Das Gewicht von neugeborenen Kindern sei normalverteilt mit $\mu = 3200$ g und $\sigma = 800$ g. In welchem um den Erwartungswert symmetrischen Bereich liegen die Gewichte von 90 % aller Neugeborenen?

3. Eine Maschine schneidet Holzplatten mit einer durchschnittlichen Länge von 80 cm und einer Standardabweichung von 0,3 cm zu.
   a) Wie viel Prozent der Platten sind kürzer als 79,5 cm?
   b) 7,2 % der Platten sind Ausschuss. Welche Abweichung vom Mittelwert wird dabei toleriert?

4. Eine Fluggesellschaft bietet Linienflüge mit einem Airbus (300 Sitzplätze) an. Erfahrungsgemäß erscheinen nur 80 % der Passagiere, die einen Platz gebucht haben, auch tatsächlich zum Abflug.
   a) In welchem Bereich liegt mit 95 %iger Wahrscheinlichkeit die Anzahl der tatsächlich belegten Plätze bei einem ausgebuchten Flug?
   b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem ausgebuchten Flug mindestens 250 Plätze belegt werden?
   c) Aus Sparsamkeitsgründen ist die Fluggesellschaft dazu übergegangen, die Flüge überbuchen zu lassen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer 20 %igen Überbuchung (d.h. 360 Plätze verkauft) nicht alle erscheinenden Fluggäste transportiert werden können (d.h. dass mindestens 301 Passagiere kommen)?
   d) Wie viele Buchungen dürfen angenommen werden, wenn das Risiko, mindestens einen Passagier mit einem gebuchten Platz abweisen zu müssen, höchstens 1 % betragen soll?

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten sowohl mit der Binomialverteilung
als auch mit der Normalverteilung (Stetigkeitskorrektur).

1. Eine Maschine stellt Transistoren her, von denen durchschnittlich 5 % fehlerhaft sind. Pro Tag werden 200 Transistoren geprüft. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind
   a) weniger als 5 $P_{0{,}05}^{200}(X \leq 4) = 2{,}6\,\%$ $(\mu = 10,\ \sigma = 3{,}08,\ P = 3{,}7\,\%)$
   b) mehr als 15 $P(X > 15) = 1 - P(X \leq 15) = 4{,}4\,\%$ $(3{,}7\,\%)$
   c) nicht weniger als 5 und nicht mehr als 15 geprüfte Transistoren defekt?
   $P(5 \leq X \leq 15) = P(X \leq 15) - P(X \leq 4) = 92{,}9\,\%$ $(92{,}6\,\%)$

2. Das Gewicht von neugeborenen Kindern sei normalverteilt mit $\mu = 3200$ g und $\sigma = 800$ g. In welchem um den Erwartungswert symmetrischen Bereich liegen die Gewichte von 90 % aller Neugeborenen? [1884 g, 4516 g]

3. Eine Maschine schneidet Holzplatten mit einer durchschnittlichen Länge von 80 cm und einer Standardabweichung von 0,3 cm zu.
   a) Wie viel Prozent der Platten sind kürzer als 79,5 cm? 4,8 %
   b) 7,2 % der Platten sind Ausschuss. Welche Abweichung vom Mittelwert wird dabei toleriert?
   $80 \pm 0{,}54$ cm

4. Eine Fluggesellschaft bietet Linienflüge mit einem Airbus (300 Sitzplätze) an. Erfahrungsgemäß erscheinen nur 80% der Passagiere, die einen Platz gebucht haben, auch tatsächlich zum Abflug.
   a) In welchem Bereich liegt mit 95%iger Wahrscheinlichkeit die Anzahl der tatsächlich belegten Plätze bei einem ausgebuchten Flug?
   Y1 = binomcdf(n, p, 240 + X) − binomcdf(n, p, 240 − X − 1)

X	Y1
13	.949
14	.964

   [227; 253]

   Normalverteilung invNorm ... , $\sigma = 6{,}928$, [226; 254], 96,4 % (siehe Tabelle)
   b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem ausgebuchten Flug mindestens 250 Plätze belegt werden? 8,3 % (8,5 %) Ergebnis mit Stetigkeitskorrektur
   c) Aus Sparsamkeitsgründen ist die Fluggesellschaft dazu übergegangen, die Flüge überbuchen zu lassen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer 20%igen Überbuchung (d.h. 360 Plätze verkauft) nicht alle erscheinenden Fluggäste transportiert werden können (d.h. dass mindestens 301 Passagiere kommen)? 4,7 % $(\mu = 288,\ \sigma = 7{,}589,\ P = 5{,}0\,\%)$
   d) Wie viele Buchungen dürfen angenommen werden, wenn das Risiko, mindestens einen Passagier mit einem gebuchten Platz abweisen zu müssen, höchstens 1% betragen soll?
   maximales n mit $P_{0{,}8}^{n}(X \geq 300) \leq 1\,\%$, höchstens $n = 353$ (tabellarisch)

   Y1 = 1 − binomcdf(X, 0.8, 299)

X	Y1
353	.0097
354	.0132

↑

Differenzial- und Integralrechnung

Vektorrechnung

Stochastik

Startseite