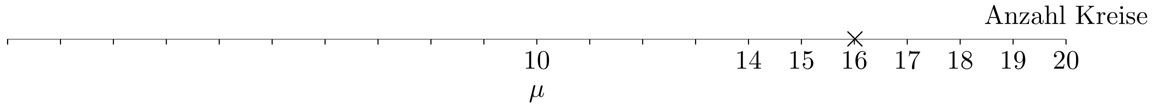
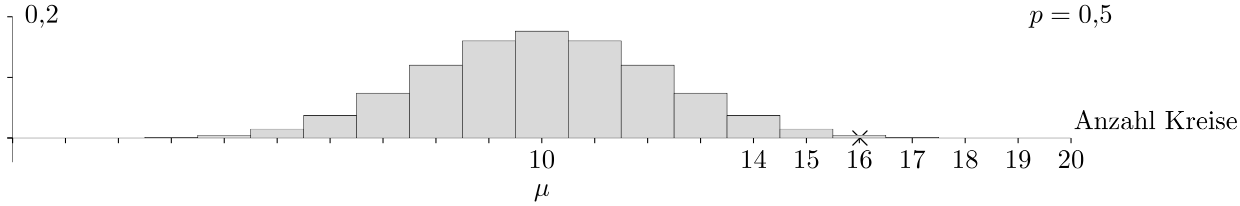
# Hypothesentest

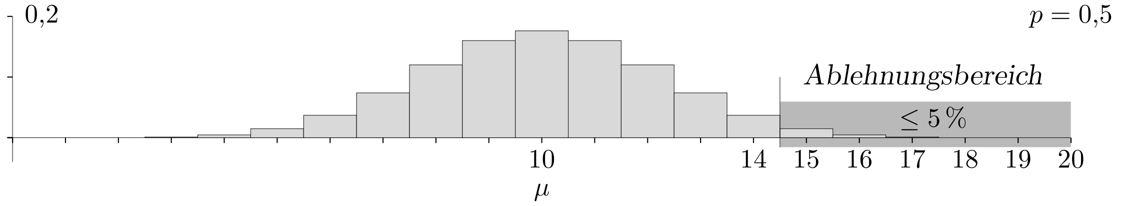
Ein Biologe vermutet, dass neugeborene Küken schon Körner erkennen können und dies nicht erst durch Erfahrung lernen müssen. Er möchte seine Vermutung wissenschaftlich beweisen.
Der Biologe legt einem Küken “Körner“ aus Papier vor, je zur Hälfte Kreise und Dreiecke, und lässt das Küken 20mal picken. Eine hohe Anzahl gepickter Kreise spräche für seine Vermutung, eine irrtümliche Folgerung wäre allerdings auch nicht ausgeschlossen.
Das Küken pickt 16mal auf einen Kreis.




Für eine rechnerische Auswertung ist die Wahrscheinlichkeit, mit der Küken Kreise bevorzugen ja nicht bekannt, der Biologe vermutet $p = 0{,}7$ oder $p = 0{,}8$.
Einzig bekannt ist die Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}5$, falls die Küken gleichwahrscheinlich auf Kreise und Dreiecke picken, weil sie es noch nicht gelernt haben, dass Körner rund sind.
Nun ist die Wahrscheinlichkeit für dieses Pickergebnis unter der Hypothese $p = 0{,}5$ jedoch so klein, dass die Hypothese wohl nicht stimmen und verworfen werden kann.




17 oder 18 Kreise wären unter der Hypothese $p = 0{,}5$ noch unwahrscheinlicher gewesen.
Wissenschaftlich üblich ist es, einen Bereich (hier [15; 20]) mit der Wahrscheinlichkeit von maximal 5% zu wählen, so dass die Hypothese verworfen wird, wenn das Testergebnis in diesen Bereich fällt.




In diesem Fall beträgt die Irrtumswahrscheinlichkeit (die Hypothese $p = 0{,}5$ abzulehnen, obwohl sie richtig ist) sogar nur $\alpha = 2{,}1\,\%$.

Sprechweisen:
Die Hypothese $p = 0{,}5$ heißt Nullhypothese $H_0$ (es liegt nichts Besonderes vor),
die Gegenhypothese $H_1$ wäre $p > 0{,}5$.
Fällt das Testergebnis in den Ablehnungsbereich, so liegt eine signifikante Abweichung vor oder die Abweichung ist auf dem 5%-Niveau gesichert.
$\alpha$ ist der Fehler 1. Art.

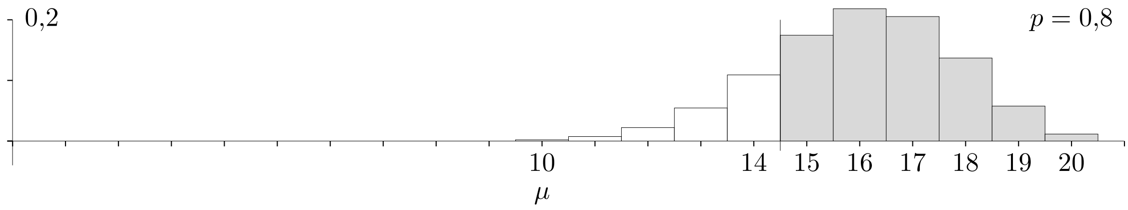


Hypothese  Annahme, unbewiesene Voraussetzung

# Hypothesentest Fortsetzung

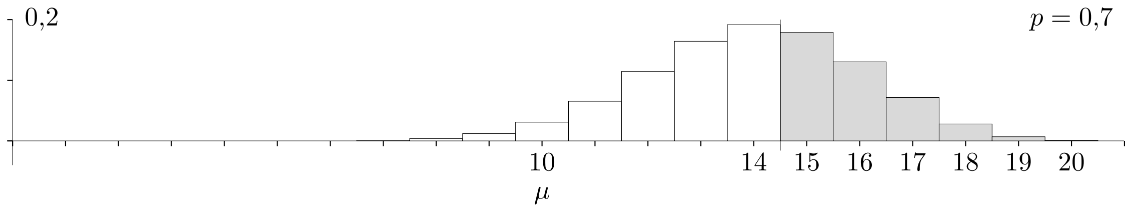
Der Biologe fragt sich, mit welcher Wahrscheinlichkeit $\beta$ die Begabung der Küken nicht erkannt wird.
Würden sie z. B. die Kreise mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}8$ bevorzugen, so wäre:

$\beta = P(X < 15) = 0{,}196$



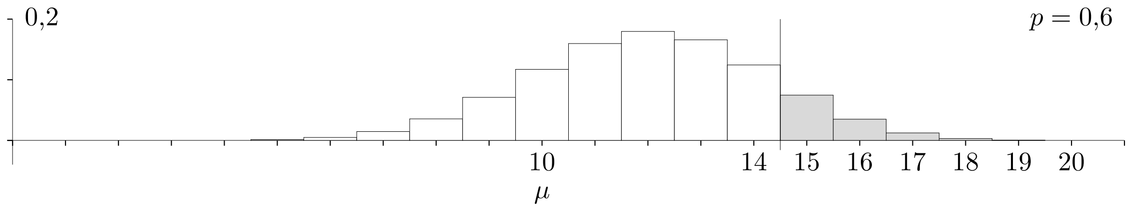

Mit der Annahme $p = 0{,}7$ wäre:

$\beta = P(X < 15) = 0{,}583$




Mit der Annahme $p = 0{,}6$ wäre:

$\beta = P(X < 15) = 0{,}874$




Je mehr sich die Wahrscheinlichkeit $p$ dem Wert 0,5 nähert, um so größer wird der Fehler $\beta$.
Er lässt sich daher nur ermitteln, wenn die zugrundeliegende Wahrscheinlichkeit bekannt ist.

$\beta$ heißt auch Fehler 2. Art.

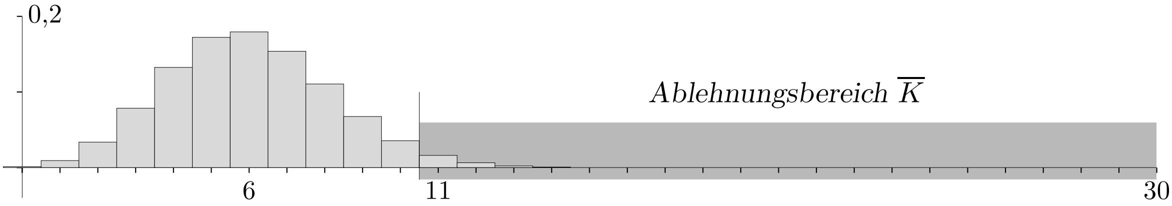
Zusammengefasst:
Um eine Hypothese zu beweisen zeigt man, dass die Gegenhypothese wegen eines Testergebnisses äußerst unwahrscheinlich ist.

# Hypothesentest zusammengefasst

<u>rechtsseitiger Test</u>

Nullhypothese $H_0:\ p \le p_0$ Gegenhypothese $H_1:\ p > p_0$

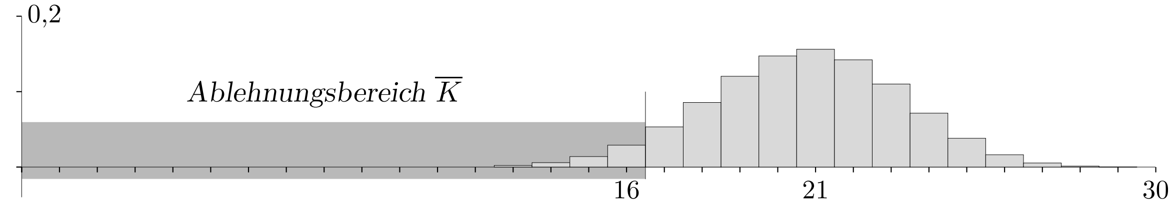
Behauptung: Ein bestimmtes Medikament verursacht höchstens bei 20 % der Patienten Nebenwirkungen. Wir bezweifeln dies und testen die Nullhypothese auf dem 5 %-Niveau. Die Stichprobenlänge sei $n = 30$.




<u>linksseitiger Test</u>

Nullhypothese $H_0:\ p \ge p_0$ Gegenhypothese $H_1:\ p < p_0$

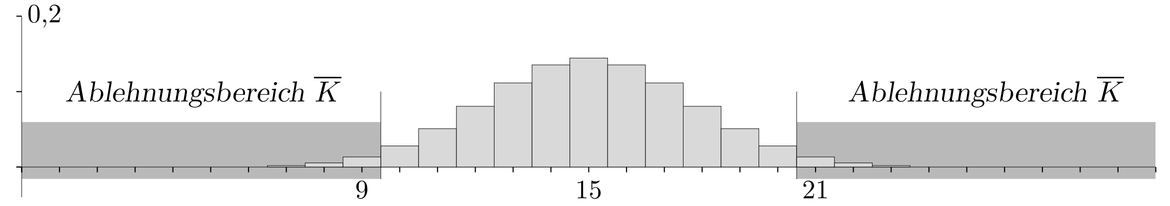
Behauptung: Mindestens 70 % der gelieferten Gurken erfüllen die europäische Krümmungsnorm. Wir vermuten das Gegenteil und testen auf dem 5 %-Niveau.




<u>zweiseitiger Test</u> (die obigen Tests sind einseitig)

Nullhypothese $H_0:\ p = p_0$ Gegenhypothese $H_1:\ p \ne p_0$

Bei der zufälligen Farbgebung sollen 50 % der Serienprodukte eine helle Tönung besitzen. Wir wollen Abweichungen aufdecken.



# Hypothesentest  Ergänzungen

Beim Testen einer Nullhypothese hofft man, eine bestimmte Wahrscheinlichkeit aufgrund eines Testergebnisses ausschließen zu können. Mehr kann mit einem Signifikanztest nicht erreicht werden. Welche Hypothese als Nullhypothese getestet wird, hängt von der Zielsetzung ab.

Fehler 1. Art
Die Nullhypothese ist richtig, sie wird jedoch verworfen, da das Stichprobenergebnis zufällig im Ablehnungsbereich liegt.
Die Wahrscheinlichkeit dieses Fehlers wird durch die Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = P(\overline{K})$ erfasst.

Fehler 2. Art
Die Nullhypothese ist falsch. Dies wird jedoch nicht erkannt, da das Stichprobenergebnis zufällig im Nicht-Ablehnungsbereich liegt.
Die Wahrscheinlichkeit dieses Fehlers $\beta$ kann nur ermittelt werden, wenn die tatsächliche Trefferwahrscheinlichkeit bekannt ist.

Beim zweiseitigen Test besteht der Ablehnungsbereich aus zwei Bereichen mit jeweils halbem Signifikanzniveau.

Die Entscheidungsregel beinhaltet, für welche Stichprobenergebnisse die Nullhypothese abzulehnen ist.

Der Ablehnungsbereich wird auch als Verwerfungsbereich oder als kritischer Bereich bezeichnet.

Der Nicht-Ablehnungsbereich wird manchmal irreführenderweise als Annahmebereich bezeichnet. Ein Stichprobenergebnis, das in diesen Bereich fällt, sagt nichts über die Gültigkeit der Nullhypothese aus, es kann aufgrund vieler anderer Trefferwahrscheinlichkeiten zustande gekommen sein.

Mit einem Hypothesentest (Signifikanztest) (z.B. $H_1: \ p \geq p_0$) kann - wie schon oben gesagt - keine zugrundeliegende Wahrscheinlichkeit bewiesen, sondern es können nur Wahrscheinlichkeiten ausgeschlossen werden. Dazu wird ein Bereich (der Ablehnungsbereich) konstruiert, in den ein Stichprobenergebnis bei Gültigkeit von $H_0$ nur mit sehr geringer Wahrscheinlichkeit (dem Signifikanzniveau) fallen würde.
Tritt dies nun doch ein, betrachten wir $H_0$ als praktisch widerlegt und damit gilt die Gegenhypothese $H_1$ als praktisch sicher (mit einer gewissen Irrtumswahrscheinlichkeit).

Um eine vermutete Wahrscheinlichkeit statistisch zu belegen, sind aufwändigere Verfahren (Stichwort: Konfidenzintervall) erforderlich.

Es sei noch einmal hervorgehoben, dass die Idee eines Signifikanztests, wie die meisten Ideen in der Mathematik, bei geeigneter Blickrichtung unmittelbar einleuchtend ist: Eine Frau begegnet ihrem Ex an verschiedenen, weit entfernt liegenden Orten. Wenn Sie den Zufall zugrunde legt (Nullhypothese), erscheint ihr dieses Geschehen sehr unwahrscheinlich. In ihr keimt der Verdacht, dass ihr Ex sie verfolgt.

# Übungen

1. Ein Lieferant behauptet, dass der Anteil der Premium-Qualität in seiner Lieferung über 80 % sei. Wir, die Abnehmer, wollen dies als Lüge entlarven (5 %-Niveau, $n = 200$).

   Wir testen also die Nullhypothese $H_0\colon\ p > 80\,\%$.
   Es liegt daher ein linksseitiger Test vor.
   $P_{0,8}^{200}(X \leq k_{\max}) \leq 5\,\% \quad \Longrightarrow \quad k_{\max} = 150$
   $\overline{A} = \{\,0, \ldots, 150\}$ (Ablehnungsbereich für die Nullhypothese)

   Fehler 2. Art (unser Nachweis misslingt, $H_0$ liegt nicht vor, wir erkennen es jedoch nicht), das Stichprobenergebnis fällt in den Nichtablehnungsbereich, z. B. für

   *1)* $p = 72\,\%$
   $\beta = P_{0,72}^{200}(X \geq 151) = \ 15{,}3\,\%$

   *2)* $p = 76\,\%$
   $\beta = P_{0,76}^{200}(X \geq 151) = \ 60{,}3\,\%$

   $\overline{A} = \{\,0, \ldots, 150\}$ erhalten wir auch durch die Approximation mit der Normalverteilung:

   $$P(\,X \leq k_{\max}) \approx \Phi\Big(\frac{k+0{,}5-\mu}{\sigma}\Big) \leq \ 0{,}05 \quad \Longrightarrow \quad k_{\max} = \ 150$$

2. Als Lieferant sind wir überzeugt, dass der Anteil der Premium-Qualität in unserer Lieferung über 80 % ist. Wir wollen die Abnehmer hiervon überzeugen (5 %-Niveau, $n = 200$).

   Wir testen also im Beisein der Abnehmer die Nullhypothese $H_0\colon\ p \leq 80\,\%$.
   Es liegt daher ein rechtsseitiger Test vor.
   $P_{0,8}^{200}(X \geq k_{\min}) \leq 5\,\% \quad \Longrightarrow \quad k_{\min} = 170$
   $\overline{A} = \{\,170, \ldots, 200\}$ (Ablehnungsbereich für die Nullhypothese)

   Fehler 2. Art (unser Nachweis misslingt, $H_0$ liegt nicht vor, wir erkennen es jedoch nicht), das Stichprobenergebnis fällt in den Nichtablehnungsbereich, z. B. für

   *1)* $p = 88\,\%$
   $\beta = P_{0,88}^{200}(X \leq 169) = \ 8{,}2\,\%$

   *2)* $p = 90\,\%$
   $\beta = P_{0,9}^{200}(X \leq 169) = 1{,}0\,\%$

   $\overline{A} = \{\,170, \ldots, 200\}$ erhalten wir auch durch die Approximation mit der Normalverteilung:

   $$P(\,X \geq k_{\min}) \approx 1 - \Phi\Big(\frac{k-1+0{,}5-\mu}{\sigma}\Big) \leq \ 0{,}05 \quad \Longrightarrow \quad k_{\min} = \ 170$$

3. Das Kopiergerät wurde repariert. Die mit der Reparatur beauftragte Firma behauptet, dass die Ausschussquote jetzt nur noch höchstens 6 % beträgt. Wir möchten das Gegenteil anhand 200 Kopien nachweisen und nehmen dabei eine Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 5 % in Kauf.
   Beschreibe und begründe einen hierfür geeigneten Test und gib die zugehörige Entscheidungsregel an.

$P_{0,6}^{200}(X \geq k_{\min}) \leq 5\,\% \quad \Longrightarrow \quad k_{\min} = 19$

$\overline{A} = \{\,19, \ldots, 200\}$