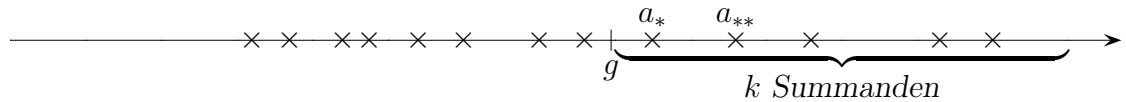


Tschebyschow'sche Ungleichung $P(|X - E(X)| \geq \alpha) \leq \frac{V(X)}{\alpha^2}$

Sie schätzt grob die Wahrscheinlichkeit ab, mit der das Ergebnis eines Zufallsversuchs um mehr als eine vorgegebene Zahl α vom Erwartungswert $\mu = E(X)$ abweicht.

Die Begründung der Ungleichung beruht auf einer simplen Abschätzung der Summe einer Reihe mit positiven Summanden: $s = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$.



Wenn für eine beliebig vorgegebene Zahl g insgesamt k Summanden größer oder gleich g sind, dann gilt: $k \cdot g \leq s$.

Hierbei fallen die Summanden kleiner als g unter den Tisch, die größeren werden nach unten grob durch g abgeschätzt.

Sei nun
$$\underbrace{(X(\omega_1) - \mu)^2 \cdot p_1}_{a_1} + \underbrace{(X(\omega_2) - \mu)^2 \cdot p_2}_{a_2} + \dots + \underbrace{(X(\omega_n) - \mu)^2 \cdot p_n}_{a_n} = V(X)$$

oder kürzer:
$$a_1 \cdot p_1 + a_2 \cdot p_2 + \dots + a_n \cdot p_n = V(X)$$

Wir lassen zunächst alle Summanden weg, für die a_i kleiner als g ist, dann gilt:

$$\begin{aligned} & \underbrace{a_* \cdot p_* + a_{**} \cdot p_{**} + \dots}_{\text{alle Summanden mit } a_i \geq g} \leq V(X) \\ \implies & g \cdot p_* + g \cdot p_{**} + \dots \leq V(X) \\ \implies & g \underbrace{(p_* + p_{**} + \dots)}_{\text{Wahrscheinlichkeit}} \leq V(X) \\ & \text{für die } a_i \geq g \text{ ist, d.h.} \\ & P((X(\omega) - \mu)^2 \geq g) \\ \implies & P((X(\omega) - \mu)^2 \geq g) \leq \frac{V(X)}{g} \end{aligned}$$

Die Schreibweise kann noch vereinfacht werden, falls $g = \alpha^2$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned} (X(\omega) - \mu)^2 & \geq \alpha^2 \\ \iff |X(\omega) - \mu| & \geq \alpha \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir:
$$P(|X - \mu| \geq \alpha) \leq \frac{V(X)}{\alpha^2}$$

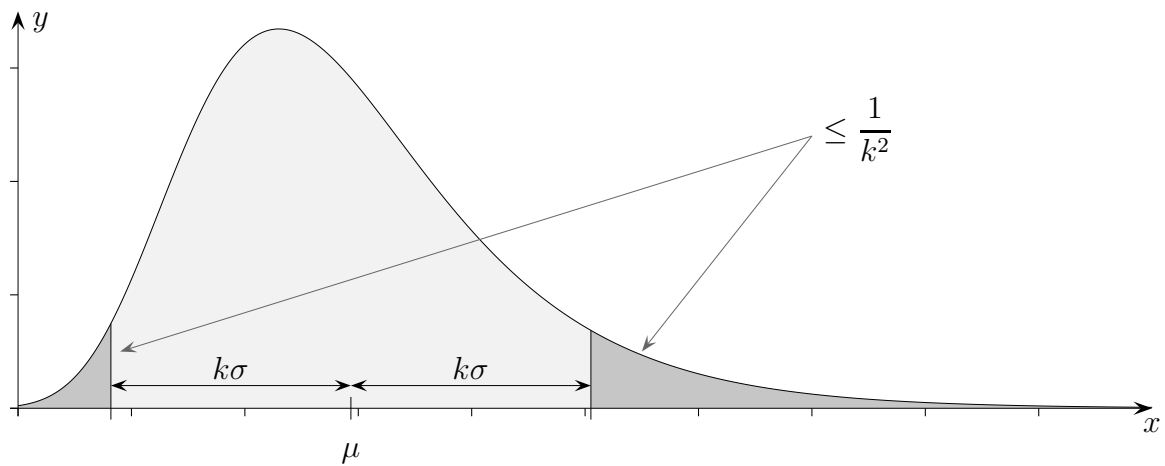
Tschebyschow'sche Ungleichung

Die Tschebyschow-Ungleichung

$$P(|X - \mu| \geq \alpha) \leq \frac{V(X)}{\alpha^2}$$

nimmt eine einprägsame Form an, wenn für α ein Vielfaches von σ eingesetzt wird.
 $V(X)$ kürzt sich dann heraus.

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$



Gesetz der großen Zahlen

Jakob Bernoulli (1654-1705)

Die äquivalente unmittelbar einsichtige Formulierung der Tschebyschow-Ungleichung

$$P(|X - \mu| \geq \alpha) \leq \frac{V(X)}{\alpha^2}$$

für das Gegenereignis lautet:

$$P(|X - \mu| < \alpha) \geq 1 - \frac{V(X)}{\alpha^2}$$

The diagram illustrates the decomposition of the complement probability $P(\bar{E})$. A horizontal line represents the total probability $P(\bar{E})$. Below this line, a bracket labeled $P(E)$ spans the entire length. A vertical line with an 'x' at the top marks the point where the complement probability is split. To the right of this mark, a bracket labeled $P(\bar{E})$ spans the remaining length. Below this bracket, two smaller brackets are shown: the first is labeled $\frac{V(X)}{\alpha^2}$ and the second is labeled $1 - \frac{V(X)}{\alpha^2}$.

Für eine Binomialverteilung ($\mu = n \cdot p$, $V(X) = n \cdot p \cdot q$) mit $\alpha = n \cdot \varepsilon$ ergibt das:

$$P(|X - n \cdot p| < n \cdot \varepsilon) \geq 1 - \frac{n \cdot p \cdot q}{(n \cdot \varepsilon)^2}$$

oder

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{p \cdot q}{n \cdot \varepsilon^2}$$

Diese Ungleichung belegt mathematisch exakt das intuitiv Angenommene:

Die Wahrscheinlichkeit, dass die relative Häufigkeit nur um einen beliebig kleinen Wert ε von der tatsächlichen Wahrscheinlichkeit p abweicht, strebt mit wachsendem Stichprobenumfang n gegen 1.

Das ist der Inhalt des Gesetzes der großen Zahlen, das Jakob Bernoulli um 1685 gefunden hat. Tschebyschow lebte von 1821 bis 1894.

Tschebyschow'sche Ungleichung und Binomialverteilung

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

Falls eine Binomialverteilung mit $\mu = E(X) = np$ und $V(X) = npq$ vorliegt, geht die Ungleichung über in:

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \frac{a}{n}\right) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq b\right) \leq \frac{V(X)}{(n \cdot b)^2}$$

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq b\right) \leq \frac{npq}{(n \cdot b)^2} = \frac{pq}{n \cdot b^2} \leq \frac{1}{4nb^2} \quad \text{beachte: } p(1-p) \leq \frac{1}{4}$$

und damit

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < b\right) \geq 1 - \frac{pq}{n \cdot b^2} \geq 1 - \frac{1}{4nb^2}$$