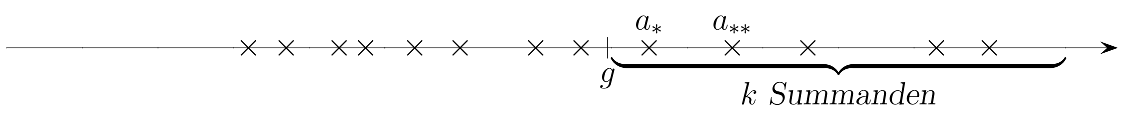
Tschebyschow'sche Ungleichung $\quad P(\mid X - E(X) \mid \geq \alpha) \;\leq\; \dfrac{V(X)}{\alpha^2}$

Sie schätzt grob die Wahrscheinlichkeit ab, mit der das Ergebnis eines Zufallsversuchs um mehr als eine vorgegebene Zahl α vom Erwartungswert $\mu = E(X)$ abweicht.

Die Begründung der Ungleichung beruht auf einer simplen Abschätzung der Summe einer Reihe mit positiven Summanden: $\quad s \;=\; a_1 + a_2 + a_3 + \;\ldots\; + a_n.$



Wenn für eine beliebig vorgegebene Zahl g insgesamt k Summanden größer oder gleich g sind, dann gilt: $\quad k \cdot g \leq s.$

Hierbei fallen die Summanden kleiner als g unter den Tisch,
die größeren werden nach unten grob durch g abgeschätzt.

Sei nun $\quad \underbrace{(X(\omega_1) - \mu)}_{a_1}{}^2 \cdot p_1 + \underbrace{(X(\omega_2) - \mu)}_{a_2}{}^2 \cdot p_2 + \;\ldots\; + \underbrace{(X(\omega_n) - \mu)}_{a_n}{}^2 \cdot p_n \;=\; V(X)$

oder kürzer: $\quad a_1 \cdot p_1 + a_2 \cdot p_2 + \;\ldots\; + a_n \cdot p_n \;=\; V(X)$

Wir lassen zunächst alle Summanden weg, für die a_i kleiner als g ist, dann gilt:

$$\underbrace{a_* \cdot p_* \;+\; a_{**} \cdot p_{**} \;+\; \ldots}_{\textit{alle Summanden mit } a_i \geq g} \qquad \leq \;\; V(X)$$

$$\Longrightarrow \qquad g \cdot p_* \;+\; g \cdot p_{**} \;+\; \ldots \qquad \leq \;\; V(X)$$

$$\Longrightarrow \qquad g\,(\underbrace{p_* \;+\; p_{**} \;+\; \ldots}_{\substack{\textit{Wahrscheinlichkeit} \\ \textit{für die } a_i \geq g \textit{ ist, d.h.} \\ P(\,(X(\omega) - \mu)^2 \geq g)}}) \qquad \leq \;\; V(X)$$

$$\Longrightarrow \qquad P(\,(X(\omega) - \mu)^2 \geq g) \qquad \leq \;\; \frac{V(X)}{g}$$

Die Schreibweise kann noch vereinfacht werden, falls $g = \alpha^2$ gesetzt wird:

$$(X(\omega) - \mu)^2 \;\;\geq\;\; \alpha^2$$

$$\Longleftrightarrow \;\; \mid X(\omega) - \mu \mid \;\;\geq\;\; \alpha$$

Insgesamt erhalten wir: $\quad P(\mid X - \mu \mid \geq \alpha) \;\leq\; \dfrac{V(X)}{\alpha^2}$

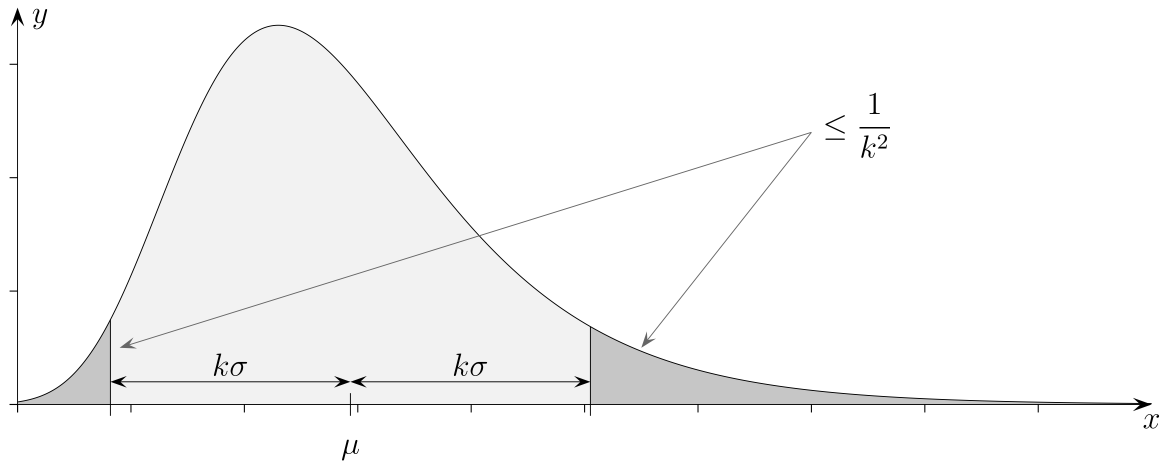
Tschebyschow'sche Ungleichung

Die Tschebyschow-Ungleichung

$$P(\mid X - \mu \mid \geq \alpha) \; \leq \; \frac{V(X)}{\alpha^2}$$

nimmt eine einprägsame Form an, wenn für α ein Vielfaches von σ eingesetzt wird.
$V(X)$ kürzt sich dann heraus.

$$P(\mid X - \mu \mid \geq k\sigma) \; \leq \; \frac{1}{k^2}$$



Gesetz der großen Zahlen

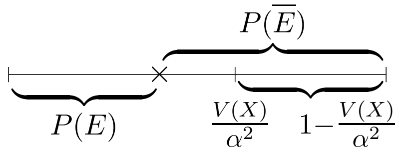
Jakob Bernoulli (1654-1705)

Die äquivalente unmittelbar einsichtige Formulierung der Tschebyschow-Ungleichung

$$P(\mid X-\mu \mid \geq \alpha) \;\leq\; \frac{V(X)}{\alpha^2}$$

für das Gegenereignis lautet:

$$P(\mid X-\mu \mid < \alpha) \;\geq\; 1-\frac{V(X)}{\alpha^2}$$



Für eine Binomialverteilung $(\mu = n \cdot p,\; V(X) = n \cdot p \cdot q)$ mit $\alpha = n \cdot \varepsilon$ ergibt das:

$$P(\mid X-n \cdot p \mid < n \cdot \varepsilon) \;\geq\; 1-\frac{n \cdot p \cdot q}{(n \cdot \varepsilon)^2}$$

oder

$$P(\mid \frac{X}{n}-p \mid < \varepsilon) \;\geq\; 1-\frac{p \cdot q}{n \cdot \varepsilon^2}$$

Diese Ungleichung belegt mathematisch exakt das intuitiv Angenommene:
Die Wahrscheinlichkeit, dass die relative Häufigkeit nur um einen beliebig kleinen Wert ε von der tatsächlichen Wahrscheinlichkeit p abweicht, strebt mit wachsendem Stichprobenumfang n gegen 1.

Das ist der Inhalt des Gesetzes der großen Zahlen, das Jakob Bernoulli um 1685 gefunden hat.
Tschebyschow lebte von 1821 bis 1894.

Tschebyschow'sche Ungleichung und Binomialverteilung

$$P(\,|\,X - E(X)\,| \geq a) \;\leq\; \frac{V(X)}{a^2}$$

Falls eine Binomialverteilung mit $\mu = E(X) = np$ und $V(X) = npq$ vorliegt, geht die Ungleichung über in:

$$P(\,|\,\frac{X}{n} - p\,| \geq \frac{a}{n}) \;\leq\; \frac{V(X)}{a^2}$$

$$P(\,|\,\frac{X}{n} - p\,| \geq b) \;\leq\; \frac{V(X)}{(n \cdot b)^2}$$

$$P(\,|\,\frac{X}{n} - p\,| \geq b) \;\leq\; \frac{npq}{(n \cdot b)^2} \;=\; \frac{pq}{n \cdot b^2} \;\leq\; \frac{1}{4nb^2} \qquad \text{beachte:} \quad p(1-p) \leq \frac{1}{4}$$

und damit

$$P(\,|\,\frac{X}{n} - p\,| < b) \;\geq\; 1 - \frac{pq}{n \cdot b^2} \;\geq\; 1 - \frac{1}{4nb^2}$$