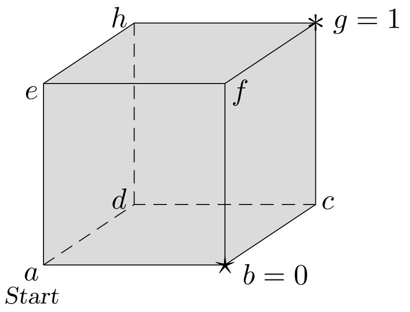
Absorbierende Markow-Ketten

Markow 1856-1922



Ein Käfer startet auf den Würfelkanten eine Irrfahrt, d. h. er wählt die Richtung zufällig.
$\star$ und $\ast$ sind die beiden absorbierenden Ecken.
Seien nun a, b, c, ... die Wahrscheinlichkeiten, mit der von der zugehörigen Ecke aus eine Absorption in der Ecke $\ast$ erfolgt.
Diese Wahrscheinlichkeiten sollen ermittelt werden.

Zustände einer Markow-Kette, die nicht mehr verlassen werden können, heißen absorbierend.
Die absorbierenden Zustände bilden den Rand, die übrigen werden als innere Zustände bezeichnet.

Absorptionswahrscheinlichkeit

Die Beziehungen zwischen den Wahrscheinlichkeiten sind durch die Pfadregel festgelegt.

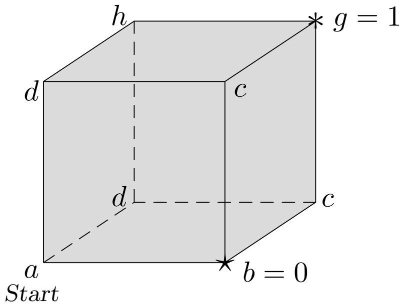
```
g1:= a = 1/3*(e+d):
g2:= c = 1/3*d+1/3:
g3:= d = 1/3*(a+c+h):
g4:= e = 1/3*(a+f+h):
g5:= f = 1/3*e+1/3:
g6:= h = 1/3*(e+d)+1/3:

lsg:=solve({g1,g2,g3,g4,g5,g6}, {a,c,d,e,f,h});
```

Maple liefert $\quad a = \frac{1}{3},\ c = \frac{1}{2},\ d = \frac{1}{2},\ e = \frac{1}{2},\ f = \frac{1}{2},\ h = \frac{2}{3}$

Eine Absorption in der Ecke $\star$ erfolgt mit der Wahrscheinlichkeit $\;1 - a = \frac{2}{3}$.

Auch ohne Rechnung wäre zu erkennen, dass aufgrund der Symmetrie die Ergebnisse für d und e, bzw. für c und f, identisch sein müssen.

Absorbierende Markow-Ketten, Wartezeiten



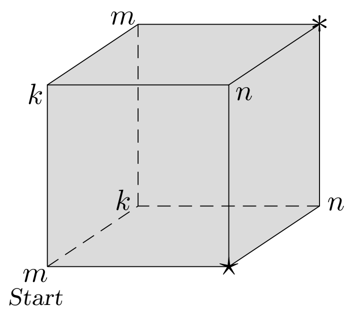
Daher kann die Rechnung vereinfacht werden zu

g1:= a = 1/3*(d + d):
g2:= c = 1/3*d + 1/3:
g3:= d = 1/3*(a + c + h):
g4:= h = 1/3* (d + d) + 1/3:

lsg:=solve({g1, g2, g3, g4}, {a, c, d, h});

Maple liefert $a = \frac{1}{3},\ c = \frac{1}{2},\ d = \frac{1}{2},\ h = \frac{2}{3}$

<u>Wartezeiten</u>



Seien nun m, n und k die mittlere Dauer der Irrfahrt
von der zugehörigen Ecke bis zur Absorption in $*$ oder $\star$.
Diese Erwartungswerte sollen bestimmt werden.

g1:= m = 1 + 1/3*(k + k):
g2:= n = 1 + 1/3*k:
g3:= k = 1 + 1/3*(m + n + m):

lsg:=solve({g1, g2, g3}, {m, n, k});

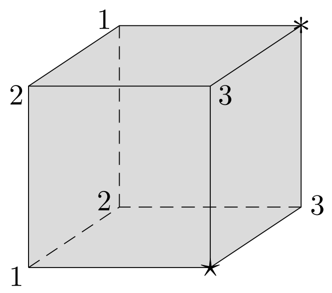
Maple liefert $m = 4,\ n = \frac{5}{2},\ k = \frac{9}{2}$

Beachte:

$$m = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3}(1 + k) + \frac{1}{3}(1 + k)$$

$$m = 1 + \frac{1}{3}(k + k)$$

Absorbierende Markow-Ketten,   Verweilzeiten



Für die 3 inneren Zustände (Symmetrie) sei t_{ji} die mittlere Anzahl der Besuche in j beim Start in i.

$\mathcal{Q}$ sei die Matrix, die die Übergänge für die inneren Zustände enthält.

	1	2	3
1	0	$\frac{2}{3}$	0
2	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
3	0	$\frac{1}{3}$	0

Die Fundamentalmatrix $\mathcal{T} = (\mathcal{E} - \mathcal{Q})^{-1}$ lautet dann:

	1	2	3
1	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{3}{4}$
3	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{4}$

Die Spaltensumme der Verweilzeiten t_{ji} ergibt die Dauer bis zur Absorption beim Start in i.

Erneut erhalten wir für diese Dauer z. B. beim Start in 1: $t_{11} + t_{21} + t_{31} = 2 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 4$