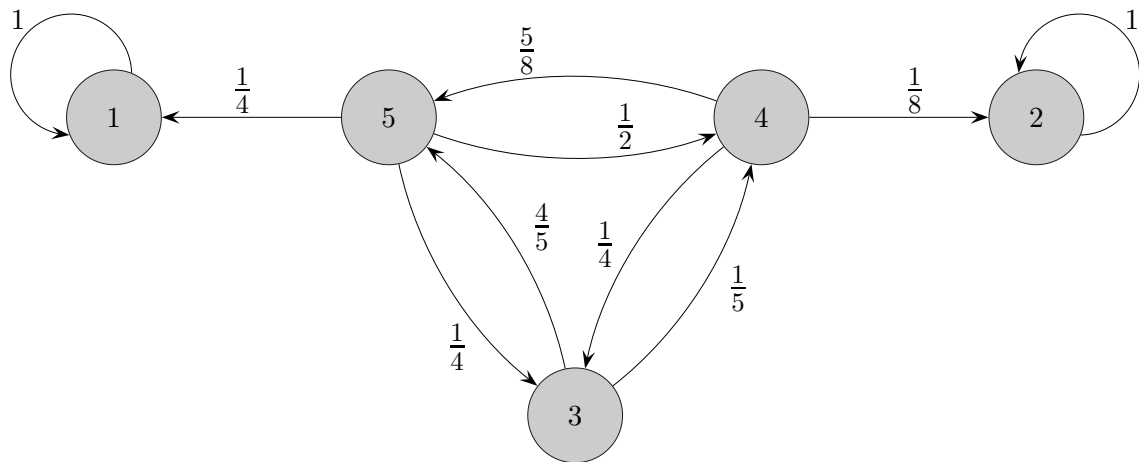
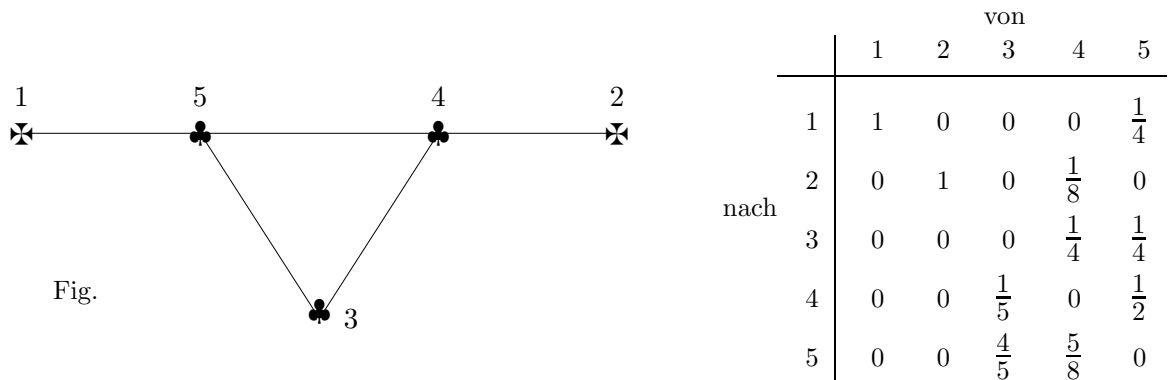


Absorbierende Markow-Ketten Alternative

Ein Käfer krabbelt auf der Figur.

In den Endpunkten 1 und 2 wartet jeweils ein Vogel, der den Käfer verschlucken wird, die Zustände 1 und 2 heißen absorbierend. In den Punkten (Zuständen) 3, 4 und 5 wählt der Käfer die Richtung zum nächsten mit den Wahrscheinlichkeiten der Übergangsmatrix \mathcal{M} .



Die absorbierenden Zustände bilden den Rand der Markow-Kette, die übrigen werden als innere Zustände bezeichnet.

Man beachte, dass die Zustände so nummeriert sind, dass die nicht absorbierenden Zustände 3, 4, 5 den absorbierenden Zuständen 1 und 2 folgen. Die Übergangsmatrix \mathcal{M} hat dann die Form:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & \mathcal{A} \\ \mathcal{O} & \mathcal{Q} \end{pmatrix}$$

\mathcal{E} ist die Einheitsmatrix, \mathcal{O} die Nullmatrix, \mathcal{A} beinhaltet die Übergangswahrscheinlichkeiten von den inneren zu den absorbierenden Zuständen, \mathcal{Q} die Übergangswahrscheinlichkeiten von den inneren zu den inneren Zuständen.

Absorbierende Markow-Ketten

Es gilt:
$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & \mathcal{A} \\ \mathcal{O} & \mathcal{Q} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}^2 = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & \mathcal{A}(\mathcal{E} + \mathcal{Q}) \\ \mathcal{O} & \mathcal{Q}^2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}^3 = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & \mathcal{A}(\mathcal{E} + \mathcal{Q} + \mathcal{Q}^2) \\ \mathcal{O} & \mathcal{Q}^3 \end{pmatrix}, \dots$$

Sei t_{ji} die mittlere Anzahl der Besuche in j vor der Absorption beim Start in i .

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} t_{33} & t_{34} & t_{35} \\ t_{43} & t_{44} & t_{45} \\ t_{53} & t_{54} & t_{55} \end{pmatrix}$$

Es ist:

$$\mathcal{T} = \mathcal{E} + \mathcal{Q} + \mathcal{Q}^2 + \mathcal{Q}^3 + \dots \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{Q}^n = \mathcal{O}$$

Das Erste folgt aus einer Erwartungswert-Überlegung. \mathcal{Q}^n enthält an der Stelle ji die Wahrscheinlichkeit, in n Schritten von i nach j zu gelangen, $n = 1, 2, 3, \dots$. Für $i = j$ ist das Teilchen bereits in i und es muss eine 1 addiert werden. Das Zweite erscheint plausibel (siehe nächste Seite).

Für diese sogenannte Fundamentalmatrix \mathcal{T} der absorbierenden Markow-Kette kann eine kurze Berechnungsformel

$$\mathcal{T} = (\mathcal{E} - \mathcal{Q})^{-1} \iff (\mathcal{E} + \mathcal{Q} + \mathcal{Q}^2 + \mathcal{Q}^3 + \dots)(\mathcal{E} - \mathcal{Q}) = \mathcal{E}$$

angegeben werden (Begründung durch Ausmultiplizieren).

Für das Beispiel gilt:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{49} \cdot \begin{pmatrix} 110 & 65 & 60 \\ 96 & 128 & 88 \\ 148 & 132 & 152 \end{pmatrix}$$

Die Spaltensumme der Verweilzeiten t_{ji} ergibt die Dauer (mittlere Anzahl der Schritte) bis zur Absorption beim Start in i , z.B.: $m_3 = t_{33} + t_{43} + t_{53} = 7,2$.

Aus dem Obigen folgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{M}^n = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & \mathcal{A} \cdot \mathcal{T} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix}$$

Für das Beispiel gilt:

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{T} = \begin{pmatrix} a_{13}^* & a_{14}^* & a_{15}^* \\ a_{23}^* & a_{24}^* & a_{25}^* \end{pmatrix} = \frac{1}{49} \cdot \begin{pmatrix} 37 & 33 & 38 \\ 12 & 16 & 11 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{A} \cdot \mathcal{T}$ beinhaltet die Wahrscheinlichkeiten a_{ji}^* in j absorbiert zu werden beim Start in i .

Die Wahrscheinlichkeit in Zustand 1 beim Start in 3 absorbiert zu werden beträgt $a_{13}^* = 75,5\%$, die Wahrscheinlichkeit in Zustand 2 beim Start in 3 absorbiert zu werden ist natürlich $1 - a_{13}^*$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q^n = \mathcal{O} \quad \text{oder:}$$

Jeder Käfer wird mit der Wahrscheinlichkeit 1 absorbiert.

\mathcal{M}^n hat die Form:

$$\mathcal{M}^n = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & \mathcal{B} \\ \mathcal{O} & Q^n \end{pmatrix}$$

Sei von jedem inneren Zustand i der Rand mit der minimalen Schrittzahl m_i erreichbar (und dann auch für jede größere Schrittzahl).

Für das Maximum m der m_i gilt dann:

In jeder Spalte der Teilmatrix

$$\begin{pmatrix} \mathcal{B} \\ Q^m \end{pmatrix}$$

gibt es ein Element von \mathcal{B} , das ungleich Null ist. Die Spaltensummen von Q^m sind daher kleiner als 1. Dies bedingt, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} Q^{mn}$ gegen die Nullmatrix konvergiert. Im Einzelnen:

Sei s das Maximum der Spaltensummen s_i der Matrix Q^m .

Die maximale Spaltensumme von Q^{2m} ist dann kleiner als s^2 :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc} \cdot & q_1 & \cdot \\ \cdot & q_2 & \cdot \\ \cdot & q_3 & \cdot \end{array} \right) = Q^m \\
 \hline
 Q^m = \left(\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right) \left| \begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right) = Q^{2m} \\
 \blacksquare
 \end{array}
 \end{array}$$

Spaltensumme:

$$\begin{aligned}
 \blacksquare &= q_1 \cdot s_1 + q_2 \cdot s_2 + q_3 \cdot s_3 && \text{(umgeordnet)} \\
 &\leq q_1 \cdot s + q_2 \cdot s + q_3 \cdot s \\
 &= (q_1 + q_2 + q_3) \cdot s \\
 &\leq s^2
 \end{aligned}$$

Zeige: Die maximale Spaltensumme von Q^{3m} ist kleiner als s^3 .

In einer absorbierenden Markow-Kette wird ein Teilchen mit Wahrscheinlichkeit 1 (früher oder später) absorbiert.

Beweis

Sei von jedem inneren Zustand i der Rand in (möglichen) s_i Schritten (und dann auch mit jeder größeren Schrittzahl) erreichbar.

Ein Teilchen, das in irgendeinem Zustand startet, kann in $s = \max_i s_i$ Schritten absorbiert werden.

Daher ist die Wahrscheinlichkeit p , in s Schritten absorbiert zu werden, positiv. Für die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses, in s Schritten wieder einen inneren Zustand zu erreichen, gilt dann $1 - p < 1$. Für ns Schritte ist die Wahrscheinlichkeit, nicht absorbiert zu werden $(1 - p)^n$.

Für $n \rightarrow \infty$ strebt dies gegen null.