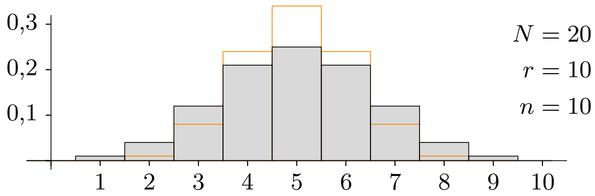
Stichprobe, mit und ohne Zurücklegen

In einer Lieferung von 1000 Glühlampen sind 20 defekt. Für eine Stichprobe vom Umfang $n = 100$ interessieren wir uns für die Wahrscheinlichkeiten, dass $k = 0, 1, 2, \ldots,$ defekte Glühlampen in der Stichprobe sind.

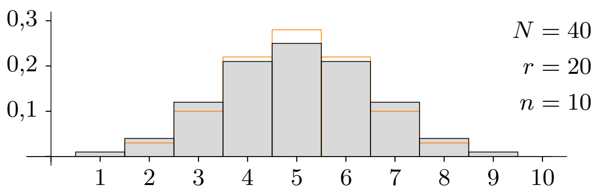
Es ist zu vermuten, dass der Unterschied zwischen einer Stichprobe mit Zurücklegen und einer ohne Zurücklegen nicht sehr groß ist, da der Stichprobenumfang sehr viel kleiner ist als die Anzahl der Grundgesamtheit. Wir rechnen nach:



Ziehen <u>ohne</u> Zurücklegen:

X ist hypergeometrisch verteilt.

$$P(X = k) = \frac{\binom{r}{k} \cdot \binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

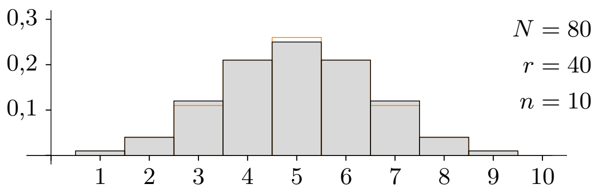


N	Grundgesamtheit	im Beispiel	1000
n	Stichprobenumfang		100
r	Anzahl aller Merkmalsträger		20
k	Anzahl der Merkmalsträger in der Stichprobe		

Ziehen <u>mit</u> Zurücklegen:

X ist binomial verteilt.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \qquad \text{mit } \ p = \frac{r}{N}$$



k	hypergeometrische Verteilung	Binomial-verteilung
0	0,119	0,133
1	0,270	0,271
2	0,288	0,273
3	0,192	0,182
4	0,089	0,090
5	0,031	0,035
6	0,008	0,011
7	0,002	0,003
8	0,000	0,001

Die hypergeometrischen Verteilungen sind orange dargestellt.

Hypergeometrische Verteilung

N	Grundgesamtheit	z. B.	50 Kugeln
n	Stichprobenumfang		10 Kugeln
r	Anzahl aller Merkmalsträger		20 rote Kugeln
k	Anzahl der Merkmalsträger in der Stichprobe		4 rote Kugeln

Ziehen <u>ohne</u> Zurücklegen:

$$P(X = 4) = \frac{\binom{20}{4} \cdot \binom{30}{6}}{\binom{50}{10}} = 0{,}280$$

Für die Rechnung ist das folgende Schema hilfreich.
Tipp: Mit N und n beginnen.

N	r	$N-r$
n	k	$n-k$

$$P(X = k) = \frac{\binom{r}{k} \cdot \binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Für das Beispiel:

50	20	30
10	4	6

Stichprobe ohne Zurücklegen, GTR

In einer Packung sind 20 Kugelschreiber, davon sind i defekt. Der Packung werden 2 Kugelschreiber entnommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (in Abhängigkeit von i), dass beide Kugelschreiber nicht defekt sind?

$$P(i) = \frac{\binom{20-i}{2}}{\binom{20}{2}} \qquad \text{oder (Pfadwahrscheinlichkeit)} \qquad P(i) = \frac{20-i}{20} \cdot \frac{19-i}{19}$$

i	$P(i)$
0	1
1	0,900
2	0,805
3	0,716
4	0,632
5	0,553
6	0,479
...	...
17	0,016
18	0,005
19	0

GTR
$P(i)$ kann als Funktion eingegeben werden (die Binomialkoeffizienten mit nCr).
Die Tabelle enthält die Wahrscheinlichkeiten.
Für ein Plotten ist eine Listen-Eingabe von $P(i)$ erforderlich.

Stichprobe, mit und ohne Zurücklegen

In einer Kiste sind 100 Äpfel, darunter 5 % wurmstichige.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Stichprobe

a) ohne
b) mit Zurücklegen

vom Umfang 20 genau 1 Apfel wurmstichig ist?

a) hypergeometrisch-verteilt: $P(X=1) = \dfrac{\binom{5}{1}\cdot\binom{95}{19}}{\binom{100}{20}} = 0{,}420$

b) binomial-verteilt: $P_{0,05}^{20}(X=1) = \binom{20}{1}\, 0{,}05^1 \cdot 0{,}95^{19} = 0{,}377$

Betrachten wir nun die Wahrscheinlichkeiten für größer werdendes N (5 % wurmstichige Äpfel bleiben).

Die Wahrscheinlichkeiten $P(X=1)$ (hypergeometrisch) nähern sich $P_{0,05}^{20}(X=1)$ (binomialverteilt) an. Das ist auch plausibel.

N	40	60	80	100	120	140	160	180	200
$P(X=1)$	0,513	0,456	0,433	0,420	0,412	0,407	0,403	0,400	0,397