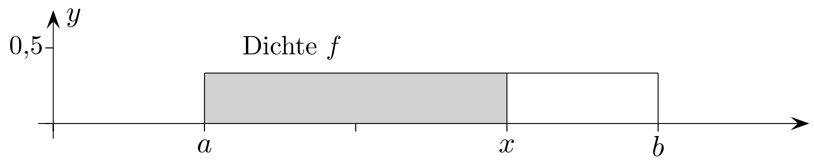
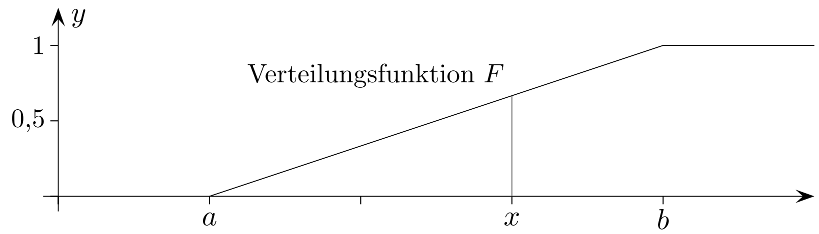
Stetige Verteilungen Rechteckverteilung

Die Längenabweichungen X produzierter Werkstücke von der Norm seien gleichmäßig verteilt zwischen $a = 1\,mm$ und $b = 4\,mm$. Die Dichtefunktion lautet also

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{für} \quad a \le x \le b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Der Graph der Verteilungsfunktion $F(x) = P(X \le x)$ hat das Aussehen:



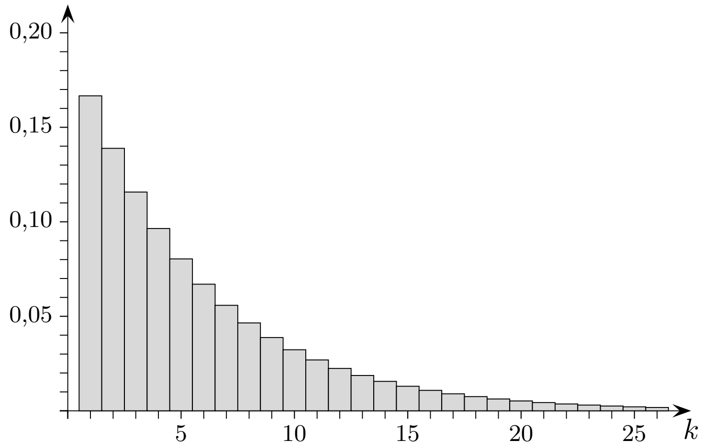
Ferner gilt

$$\mu = E(X) = \int_a^b x \cdot f(x)\,dx \;=\; \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b x\,dx \;=\; \ldots \;=\; \frac{a+b}{2}$$

$$V(X) = \int_a^b x^2 \cdot f(x)\,dx - \mu^2 \;=\; \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b x^2\,dx - \mu^2 \;=\; \ldots \;=\; \frac{(b-a)^2}{12}$$

Stetige Verteilungen Exponentialverteilung

Warten auf eine 6: Wir würfeln solange, bis eine 6 erscheint.
X sei die Anzahl der benötigten Würfe. Es gilt dann für $p = \frac{1}{6}$: $\quad P(X = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$
Z. B. ist die Wahrscheinlichkeit, mit höchstens 4 Würfen eine 6 zu erzielen, $P(X \leq 4) = 51{,}8\,\%$.



Um allgemeiner Wahrscheinlichkeiten von Wartezeiten, z. B. bis zum nächsten Telefonanruf oder bis zum Defektwerden einer Glühlampe, zu berechnen, wählen wir als Ansatz für eine Dichtefunktion

$$f(x) = a \cdot e^{-bx}, \qquad x \geq 0.$$

Für diese Dichtefunktion muss $\int_0^\infty f(x)\,dx = 1$ gelten, also

$$\int_0^\infty a \cdot e^{-bx}\,dx = \left[-\frac{a}{b}\,e^{-bx}\right]_0^\infty = \frac{a}{b} = 1 \quad \Longrightarrow \quad a = b, \qquad \text{damit ist}$$

$$f(x) = a \cdot e^{-ax}, \qquad x \geq 0.$$

Um die Bedeutung von a zu erkennen, bestimmen wir $E(X)$.

$$E(X) = \int_0^\infty x \cdot f(x)\,dx = \int_0^\infty x \cdot a \cdot e^{-ax}\,dx = \overset{\text{partiell}}{\cdots} = \left[-x \cdot e^{-ax} - \frac{1}{a}\,e^{-ax}\right]_0^\infty = \frac{1}{a}$$

Eine Zufallsvariable X mit der Dichtefunktion $f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$,
heißt exponentialverteilt mit dem Parameter λ. Der Erwartungswert ist dann $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

In einem Büro klingelt durchschnittlich alle 5 Minuten das Telefon.

a) Zeichne die Graphen der Dichte- und der Verteilungsfunktion $F(x)$.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Telefon

b) in den nächsten 10 Minuten,

c) in den nächsten 15 Minuten nicht,

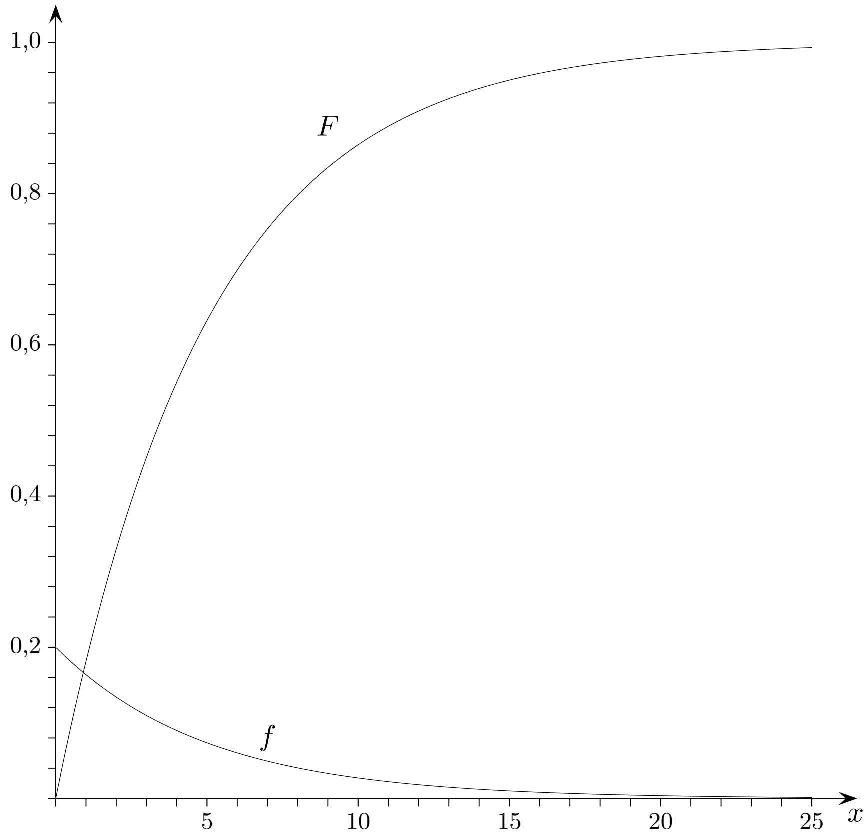
d) erst in den nächsten 5 bis 10 Minuten klingelt?

In einem Büro klingelt durchschnittlich alle 5 Minuten das Telefon.

a) Zeichne die Graphen der Dichte- und der Verteilungsfunktion $F(x)$.

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x \lambda \cdot e^{-\lambda t}\, dt = \ldots = 1 - e^{-\lambda x}$$

beachte: $F'(x) = f(x)$



Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Telefon

b) in den nächsten 10 Minuten, $E(X) = 5$, $\lambda = \dfrac{1}{5}$, $P(X \leq 10) = F(10) = 86{,}5\,\%$

Dies ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Wartezeit bis zum nächsten Anruf höchstens 10 Minuten beträgt.

c) in den nächsten 15 Minuten nicht, $P(X > 15) = 1 - P(X \leq 15) = 1 - F(15) = 5{,}0\,\%$

d) erst in den nächsten 5 bis 10 Minuten klingelt? $P(5 \leq X \leq 10) = F(10) - F(5) = 23{,}3\,\%$

beachte: $(1 - F(5)) \cdot F(5) = 23{,}3\%$

Dies ist die Wahrscheinlichkeit, dass es in den ersten 5 Minuten nicht klingelt, jedoch innerhalb weiterer 5 Minuten.

Von einem elektronischen Bauteil ist bekannt, dass es durchschnittlich 10 Jahre hält.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit hält das Bauteil höchstens 8 Jahre?

Von einem elektronischen Bauteil ist bekannt, dass es durchschnittlich 10 Jahre hält.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit hält das Bauteil höchstens 8 Jahre?

$$E(X) = 10,\ \lambda = \frac{1}{10}, \qquad P(X \leq 8) = F(8) = 55{,}1\,\%$$

Mehr als die Hälfte der Bauteile hält höchstens 8 Jahre.
Die mittlere Lebensdauer wird jedoch durch einzelne Bauteile beeinflusst, die sehr lange halten.

Stetige Verteilungen   Belastungstest

1. In einem Belastungstest reißt ein Faden mit der Länge $20\,cm$ in $X\,cm$ (vom linken Ende gemessen). Die Zufallsgröße X besitzt die Dichte

$$f(x) = \begin{cases} k \cdot x \cdot (20 - x) & \text{für} \quad 0 \leq x \leq 20 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   a) Bestimme k so, dass f Dichtefunktion ist und weise dies nach.

   b) Skizziere die Grafen von f und der Verteilungsfunktion F.

   c) Bestimme den Erwartungswert und die Standardabweichung von X.

   d) In welchem Bereich symmetrisch zum Erwartungswert liegen $80\,\%$ der Rissstellen?

   e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eines der beiden Teilfäden mindestens $15\,cm$ lang?

Belastungstest Lösungen

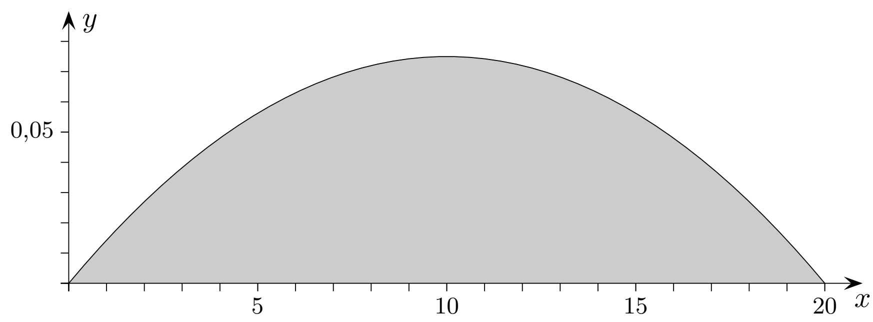
1. In einem Belastungstest reißt ein Faden mit der Länge $20\,cm$ in $X\,cm$ (vom linken Ende gemessen). Die Zufallsgröße X besitzt die Dichte

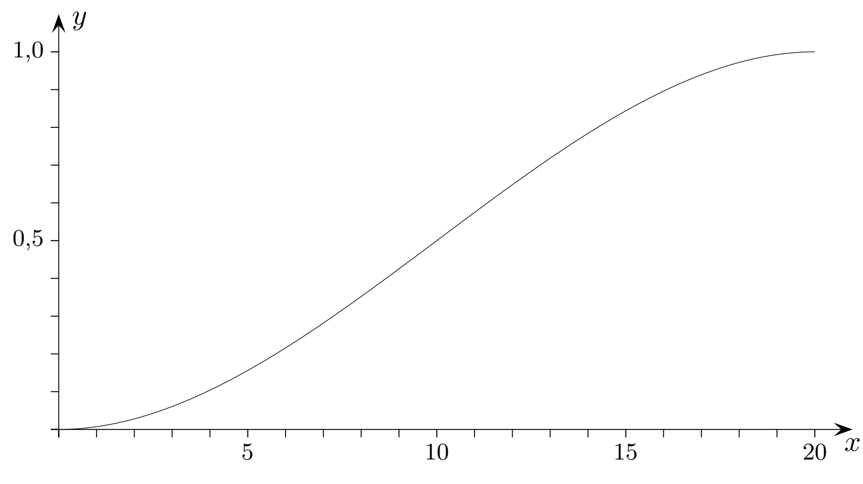
$$f(x) = \begin{cases} k \cdot x \cdot (20 - x) & \text{für} \quad 0 \le x \le 20 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Bestimme k so, dass f Dichtefunktion ist und weise dies nach.

$$\int_0^{20} f(x)\,dx \;=\; k \int_0^{20} x \cdot (20 - x)\,dx \;=\; 1 \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{3}{4000}\,, \qquad f(x) \ge 0$$

b) Skizziere die Grafen von f und der Verteilungsfunktion F.





$$F(x) = -\frac{1}{4000}x^3 + \frac{3}{400}x^2 \qquad \text{für} \quad 0 \le x \le 20$$

c) Bestimme den Erwartungswert und die Standardabweichung von X. $\mu = 10,\ \sigma = \sqrt{20}$

d) In welchem Bereich symmetrisch zum Erwartungswert liegen 80% der Rissstellen?

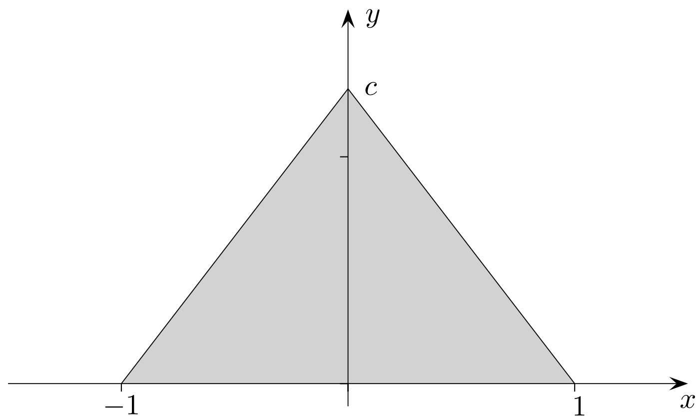
$$F(x) = 0{,}10 \quad \Longrightarrow \quad x = 3{,}92 \quad \text{daher} \quad 3{,}92 \le x \le 16{,}08$$

e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eines der beiden Teilfäden mindestens $15\,cm$ lang?

$$P(X \le 5 \vee X \ge 15) = 2 \cdot F(5) = 31{,}3\,\%$$

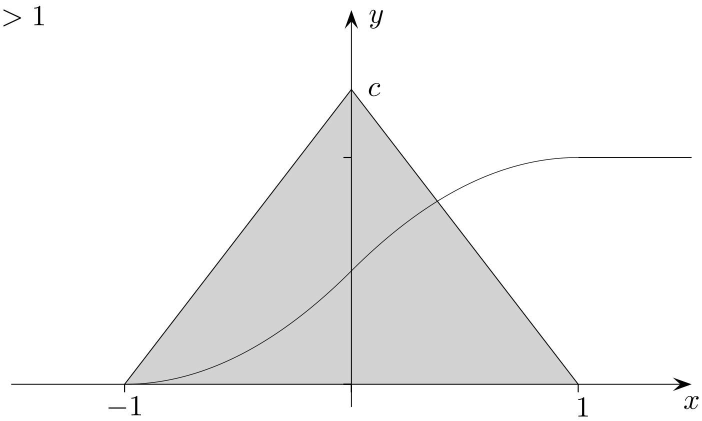
Stetige Verteilung

2. Nebenstehend ist der Graph der Dichtefunktion f einer Zufallsvariablen X skizziert.
   a) Bestimmen Sie die Konstante c,
   b) ermitteln und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion F von X,
   c) berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.



a) $c = 1$

b) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < -1 \\ \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} & -1 \leq x \leq 0 \\ -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} & 0 < x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$



c)
$$\mu = E(X) = \int_{-1}^{1} x \cdot f(x)\, dx \;=\; 0 \qquad \text{(Symmetrie)}$$
$$V(X) = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot f(x)\, dx - \mu^2 \;=\; \ldots \;=\; \frac{1}{6}$$

3. Eine Maschine stellt Metallstifte her, deren Längen-Abweichung von der Norm eine stetige Zufallsgröße X (in mm) mit der Dichte f ist.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < -2 \\ a(x^2 - 4) & \quad -2 \leq x \leq 2 \\ 0 & \quad x > 2 \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie a.

b) Skizzieren Sie die Grafen von f und der Verteilungsfunktion F.

c) Wie lautet die Verteilungsfunktion?

d) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von X.

e) In welchem Bereich symmetrisch zum Erwartungswert liegen 90 % der Abweichungen?

f) Metallstifte, deren absolute Abweichung mindestens 1,5 mm beträgt, sind Ausschuss. Wieviel Prozent Ausschuss hat man zu erwarten?

g) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter 5 zufällig ausgewählten Stiften kein Ausschussstück befindet?

h) Wie muss man die symmetrischen Ausschuss-Grenzen wählen, damit nur noch 5 % Ausschuss vorliegt?

i) Die Stifte sollen in vier gleichstarke (erwartete Anzahlen jeweils gleich) Qualitätsstufen aufgeteilt werden. Wie sind die Grenzen hierfür zu wählen?

a) $-\frac{3}{32}$

b) ...

c) $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < -2 \\ -\frac{1}{32}x^3 + \frac{3}{8}x + \frac{1}{2} & \quad -2 \leq x \leq 2 \\ 1 & \quad x > 2 \end{cases}$$

d) $E(X) = 0, \quad \sigma = 0{,}89$

e) [-1,46; 1,46]

f) 8,6 %

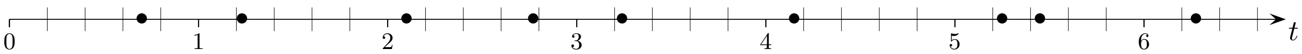
g) 63,8 %

h) absolute Abweichung mindestens 1,62 mm

i) [-2; -0,69], [-0,69; 0], [0; 0,69], [0,69; 2]

Exponentialverteilung

Punktförmige Signale werden in zufälliger Aufeinanderfolge ausgesendet.
Wir wollen die Wartezeit T bis zum ersten Signal (oder zwischen zwei Signalen) untersuchen.



Das Intervall $I = \big(0 \mid t\big]$ teilen wir in n gleiche Teile $(\ldots]$ und wählen n so groß, dass jeder Abschnitt höchstens einen Punkt enthält. Wir nehmen an, dass pro Zeiteinheit im Schnitt λ Signale gesendet werden.
Der Erwartungswert für I beträgt daher $\mu = \lambda \cdot t$ Punkte.
Pro Abschnitt wird mit der Wahrscheinlichkeit $p = \frac{\lambda \cdot t}{n}$ ein Signal gesendet (Bernoulli-Kette).

Für T gilt:

$$P(T > t) = \big(1 - p\big)^n = \big(1 - \tfrac{\lambda \cdot t}{n}\big)^n$$

Für $n \longrightarrow \infty$ erhält man

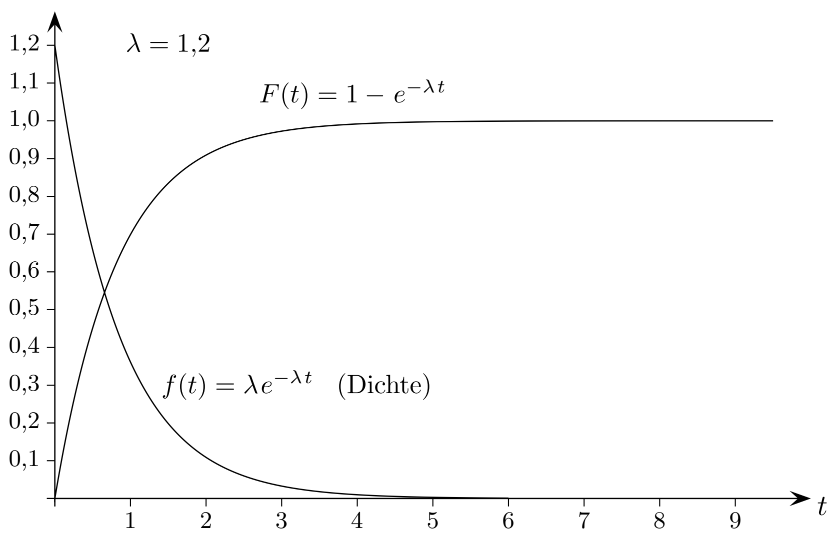
$$P(T > t) = \lim_{n \to \infty} \big(1 - \tfrac{\lambda \cdot t}{n}\big)^n = e^{-\lambda t}.$$

Die Wahrscheinlichkeit für kein Signal in einem Intervall der Länge t beträgt

$$P(T > t) = e^{-\lambda t}$$

und für mindestens ein Signal (Verteilungsfunktion $F(t)$)

$$P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$ Diese Wahrscheinlichkeiten sind Funktionen von t, $F' = f$ (Dichte).

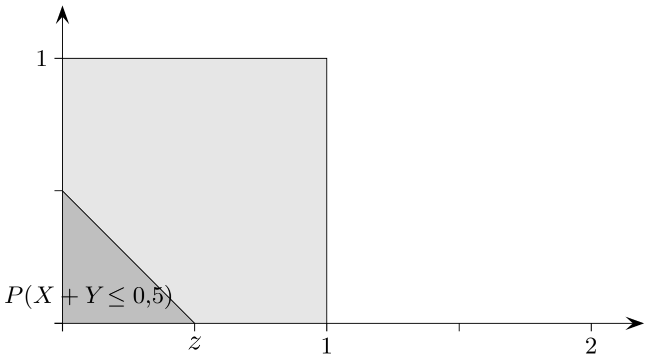


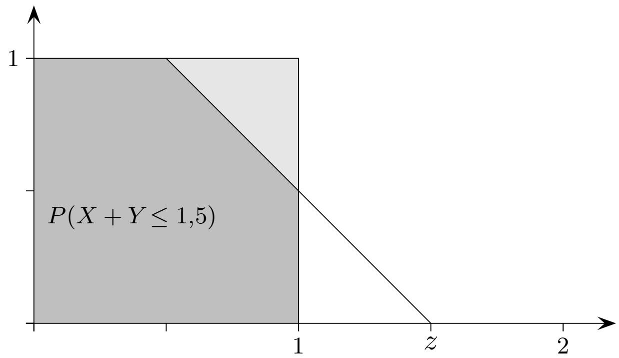
Summe von Zufallsvariablen

Gegeben sind die unabhängigen, gleichverteilten Zufallsvariablen X und Y mit den Wahrscheinlichkeitsdichten $f(x)$ und $g(x)$.

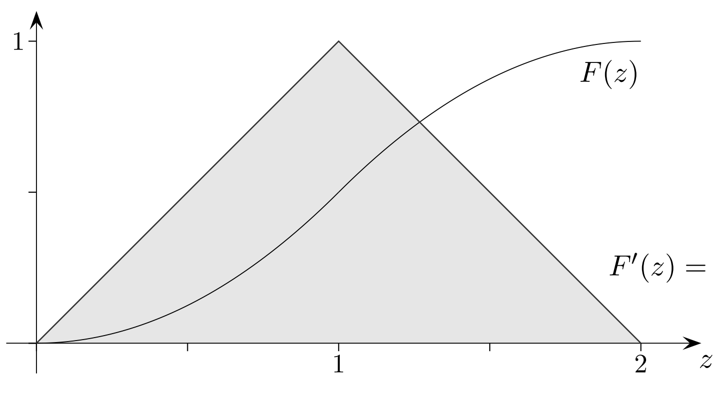
$$f(x) = g(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir interessieren uns für die Wahrscheinlichkeiten $P(X + Y \leq z)$.





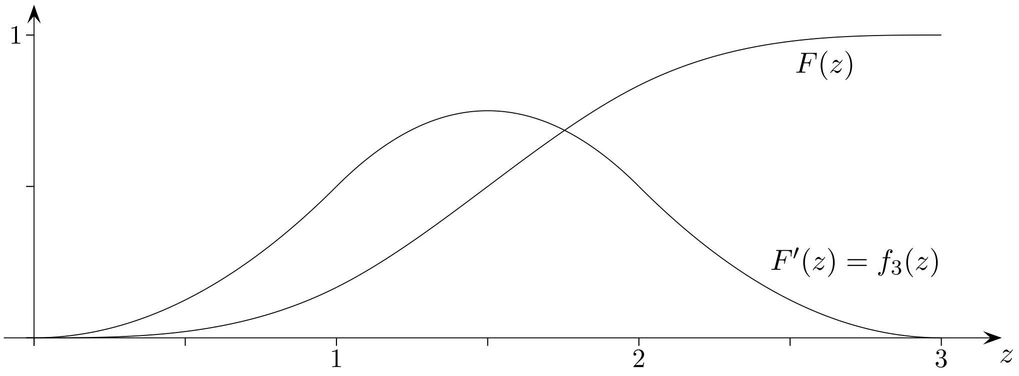
Die Ergebnisse von (X, Y) fallen in das Quadrat der Länge 1.
Zwei der Ereignisse $X + Y \leq z$ sind grafisch dargestellt.
Die Verteilungsfunktion $F(z)$, sowie deren Ableitung, die Dichtefunktion, sind nun zu erkennen.



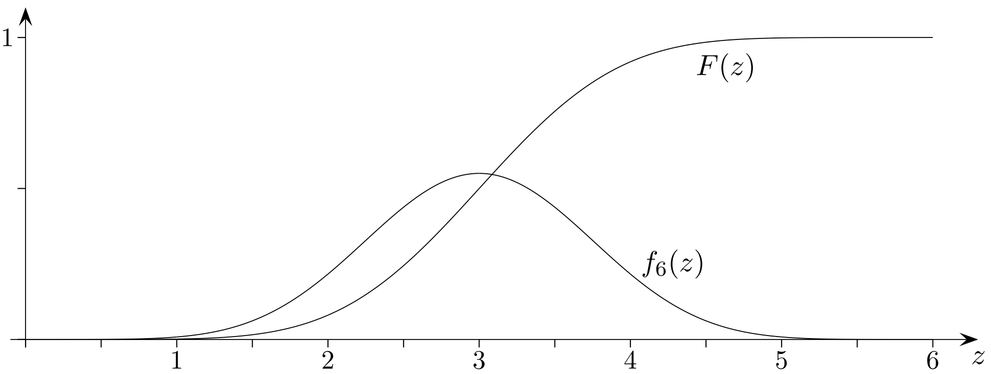
$$F(z) = \begin{cases} \frac{z^2}{2} & \text{für} \quad 0 \leq z \leq 1 \\ 1 - \frac{(z-2)^2}{2} & \phantom{\text{für}} \quad 1 \leq z \leq 2 \end{cases}$$

$$f_2(z) = \begin{cases} z & \text{für} \quad 0 \leq z \leq 1 \\ 2 - z & \phantom{\text{für}} \quad 1 \leq z \leq 2 \end{cases}$$

Zu den Zufallsvariablen X und Y nehmen wir noch eine dritte unabhängige Zufallsvariable Z mit derselben Wahrscheinlichkeitsdichte hinzu.
Verteilungs- und Dichtefunktion von $X + Y + Z$ sind grafisch dargestellt.
Auf die (mühsame) Herleitung der Funktionsterme wird hier verzichtet.

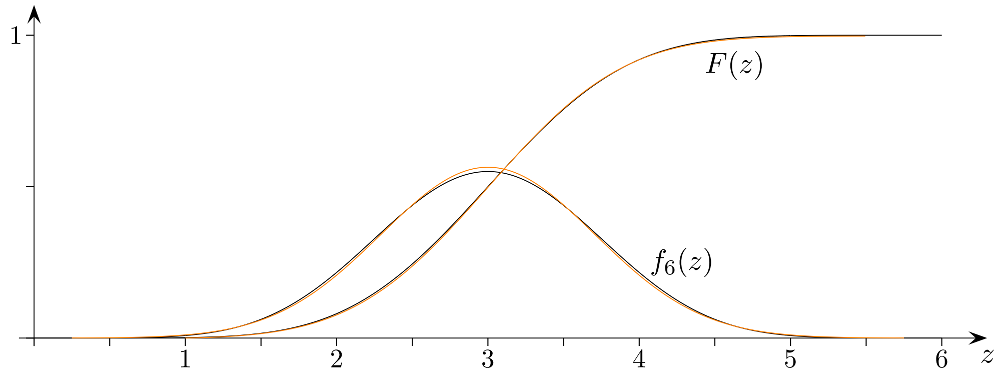


Für sechs unabhängige Zufallsvariablen ergibt sich folgende Grafik:



Vergleich mit der Normalverteilung

Für sechs unabhängige Zufallsvariablen ergibt sich folgende Grafik:



Die orange gefärbten Kurven gehören zur Normalverteilung mit $\mu = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$ und $\sigma = \sqrt{6 \cdot \frac{1}{12}}$.
Die Varianz eines Summanden beträgt $\frac{1}{12}$.

Mit 12 Summanden können näherungsweise normalverteilte ($\mu = 6$ und $\sigma = 1$) Zufallszahlen erzeugt werden. Mit der Subtraktion um 6 erhalten wir den Mittelwert null (Zwölferregel).