Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung

1. In einer Urne befinden sich 3 schwarze und 1 weiße Kugel. Wir entnehmen der Urne eine Kugel, notieren die Farbe und legen die Kugel in die Urne zurück. Dieses *Zufallsexperiment* wiederholen wir 60mal. Dabei notieren wir beispielsweise 20mal eine weiße Kugel.
   Der Anteil der weißen Kugeln beträgt also $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$. Diese Zahl heißt *relative Häufigkeit.*

   Wir hatten erwartet, dass die weiße Kugel ungefähr 15mal gezogen wird.
   Für den *Erwartungswert* 15 stimmt das Verhältnis (weiße Kugeln/Gesamtanzahl) mit dem Verhältnis in der Urne überein. Um den Erwartungswert schwanken die Häufigkeiten.

   Was erwarten wir, falls das Zufallsexperiment 20mal (32mal) wiederholt wird?

2. In der Urne befinden sich nun 3 schwarze und 2 weiße Kugeln.
   Was erwarten wir, falls das Zufallsexperiment 30mal (60mal, 1000mal, 1750mal, 2480mal) wiederholt wird?

   Die *Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses* soll für eine Versuchsreihe den zu erwartenden Anteil[1] angeben, für den das Ereignis eintreffen wird. Für das Urnenexperiment mit 3 schwarzen und 2 weißen Kugeln heißt das:

   $$P(\textit{weiß}) = \frac{2}{5}, \quad P(\textit{schwarz}) = \frac{3}{5}$$

   Die Wahrscheinlichkeit *(engl. probability)* wird mit einem P abgekürzt.

   Unter der Voraussetzung, dass alle Ergebnisse die gleiche Chance haben einzutreffen, gilt:

   $$P(\textit{Ereignis}) = \frac{\textit{Anzahl der Ergebnisse, aus denen das Ereignis besteht}}{\textit{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$$

3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim zweimaligen Würfeln
   a) eine Doppelsechs,
   b) die Augensumme 6,
   c) einen Pasch (gleiche Augenzahl) zu werfen?

4. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim dreimaligen Werfen einer Münze
   a) 3mal Kopf,
   b) genau 1mal Kopf zu werfen?

5. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, in einer Familie mit 3 (4) Kindern
   a) keinen Jungen,
   b) genau ein Mädchen anzutreffen?

[1] zu erwartender Anteil = Erwartungswert/Versuchsreihenlänge

Würfeln

$$
\begin{aligned}
P(\text{“}1\text{“}) &= \frac{1}{6}\\
P(\text{“}2\text{“}) &= \frac{1}{6}\\
&\dots\\
P(\text{“}6\text{“}) &= \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

Die Wahrscheinlichkeiten der sechs möglichen Ergebnisse sind gleich.
Hierin steckt die Annahme, dass aufgrund der Symmetrie des Würfels alle Ergebnisse die gleichen Chancen haben und damit langfristig ungefähr gleichhäufig auftreten. Dies ähnelt einer Unschuldsvermutung, die solange aufrecht erhalten werden kann, bis etwas anderes naheliegt, wenn z. B. das Ereignis “666“ deutlich häufiger als erwartet auftritt. Was *deutlich häufiger* heißt, wird später präzisiert.

Später werden wir auch die Anzahl der benötigten Würfe ermitteln, so dass die relative Häufigkeit für das Werfen einer 6 mit 95 %-iger (z. B.) Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{6}$ um weniger als 0,01 (z. B.) abweicht.
Jakob Bernoulli, Gesetz der großen Zahlen 1713.

Welchen Ereignissen ordnen wir eine Wahrscheinlichkeit zu?

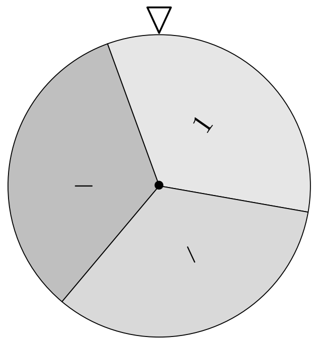
Zu diesen Ereignissen ist jeweils ein Zufallsexperiment denkbar, in dem festgestellt werden kann,
ob das Ereignis eingetreten ist oder nicht. Zudem kann das Zufallsexperiment beliebig oft unter gleichen Bedingungen wiederholt werden, ohne dass dessen Ausgang mit Sicherheit vorhersagbar ist. Da wir nicht genug über das Geschehen beim Zufallsexperiment wissen, erscheint uns das Ergebnis zufallsbedingt.

Den z. B. in der Frage

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der Angeklagte für uns schuldig?

verwendeten subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriff berücksichtigen wir hier nicht.

Wahrscheinlichkeit



Bei diesem Glücksrad erscheint die 1 mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$.
Wenn wir das Rad 6mal drehen, erwarten wir im Schnitt 2mal die 1.
Die Möglichkeiten, 2 Einsen auf 6 Plätze zu verteilen, lauten:

1 1 _ _ _ _

1 _ 1 _ _ _

1 _ _ 1 _ _

1 _ _ _ 1 _

1 _ _ _ _ 1

_ 1 1 _ _ _

_ 1 _ 1 _ _

_ 1 _ _ 1 _

_ 1 _ _ _ 1

_ _ 1 1 _ _

_ _ 1 _ 1 _

_ _ 1 _ _ 1

_ _ _ 1 1 _

_ _ _ 1 _ 1

_ _ _ _ 1 1

Wie oft erscheint die Eins von den $15 \cdot 2^4$ Möglichkeiten beim 1. Drehen, beim 3. Drehen, beim 5. Drehen?
Wie groß ist der Anteil?

Wie oft erscheint die Eins von den $15 \cdot 2^4$ Möglichkeiten beim 1. Drehen, beim 3. Drehen, beim 5. Drehen? Wie groß ist der Anteil?

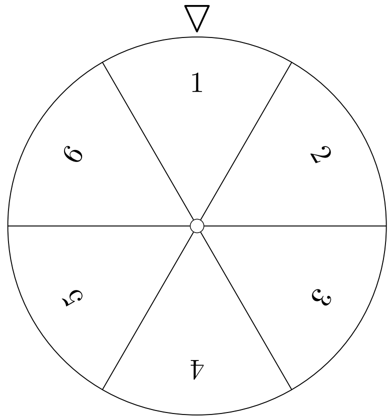
$15 \cdot 2^4 = 240$

Die Eins erscheint beim 1. Drehen (3. Drehen, 5. Drehen) $5 \cdot 2^4 = 80$ mal.

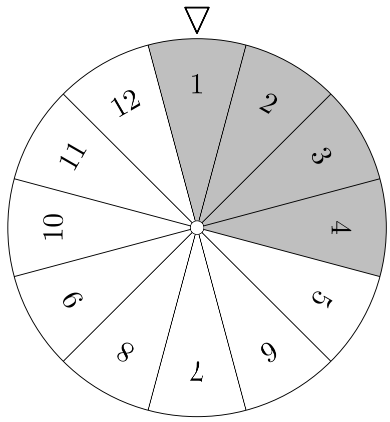
Der Anteil beträgt (stets) $\frac{1}{3}$.

Anmerkungen zur Didaktik

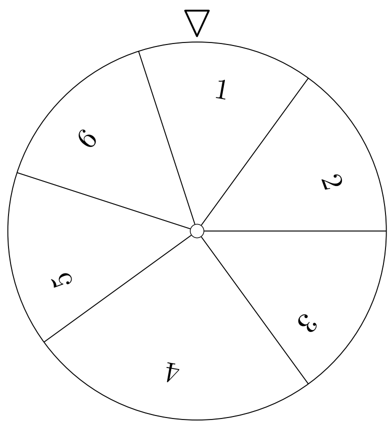
Die erste naheliegende Idee hinsichtlich Wahrscheinlichkeit ist,
dass sie etwas mit der Anzahl der bestehenden Möglichkeiten zu tun hat.
In zwei Stapeln mit 3 und 5 Schachteln befindet sich jeweils eine Schachtel mit einem Geschenk.
Du darfst eine der 8 Schachteln wählen. Welchem Stapel entnimmst du die Schachtel?



Das Würfeln entspricht dem Drehen eines Glücksrades.
In Laplace-Experimenten sind die Wahrscheinlichkeiten eines
elementaren Ereignisses umgekehrt proportional zur Anzahl aller Möglichkeiten.



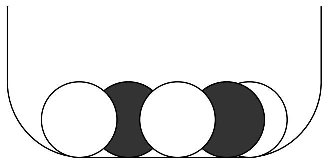
Die Betrachtung eines Ereignisses
„Das Ergebnis fällt in den Bereich $[1,4]$“ führt zur Laplace-Definition,
die eine anschauliche Grundlage für alles Weitere ist.
In Versuchsreihen schwanken die absoluten Häufigkeiten und deren Mittelwerte
um ihre Erwartungswerte.
Auch für unsymmetrische Wurfobjekte ist es stets denkbar,
dass das Zufallsgeschehen durch ein Glücksrad gesteuert wird,
bei dem die Anteile für das Auftreten der elementaren
Ereignisse nicht mehr gleich sind.



Die Anteile können lediglich mehr oder weniger gut vermutet
und gegebenenfalls durch weitere Versuchsreihen verbessert werden.
Die genauen Wahrscheinlichkeiten bleiben im Verborgenen, Festlegungen sind hypothetisch.

Die schrittweise Verbesserung von Hypothesen mit der Bayes-Formel ist in der Schule nur noch rudimentär bei einer Testwiederholung anzutreffen (Abitur Ni 2018).
An die Stelle des Hypothesentests tritt im KC Ni 2015 die Berechnung von Konfidenzintervallen, die die zugrunde liegende unbekannte Wahrscheinlichkeit in math. ansprechender Weise eingrenzen.

Die vielen in der Didaktik formulierten Wahrscheinlichkeitsbegriffe suggerieren eine grundsätzliche Verschiedenheit, wohingegen lediglich den Elementarereignissen auf unterschiedliche Weise Werte (Wahrscheinlichkeiten) zugewiesen werden. Die Festlegung einer Wahrscheinlichkeitsfunktion kann laplacesch, frequentistisch, prognostisch (subjektiv aufgrund eigener Erfahrungen) oder geometrisch (Glücksrad) erfolgen. Hierin spiegelt sich die Schwierigkeit wider, die Realität in einem math. Modell abzubilden.
Die Wahrscheinlichkeitstheorie (Kolmogorow-Axiome) beinhaltet, wie aus vorhandenen Wahrscheinlichkeiten neue ermittelt werden können.



Im Anfangsunterricht kann die letztlich unbefriedigende Ungewissheit bei unsymmetrischen Wurfobjekten vermieden werden, wenn Kugeln aus einer Urne (Schachtel mit z. B. 3 weißen und 2 schwarzen Kugeln) mit Zurücklegen verdeckt gezogen werden und Mutmaßungen über das Farbverhältnis der Kugeln angestellt werden. Überlegungen hinsichtlich der Sicherheit und Versuchslänge liegen nahe.

„Versucht die Anzahlen der weißen und schwarzen Kugeln in der Schachtel zu ermitteln.
Der Blick in die Schachtel ist nicht erlaubt.“

Nach kurzer Sammlung der vorgeschlagenen Vorgehensweisen wird präzisiert:

„Fühlen ist erlaubt. Die gezogene Kugel muss anschließend zurückgelegt werden.
Der Vorgang kann wiederholt werden.“

Variationen z. B. mit roten, grünen und blauen Kugeln sind möglich:

„Es sind gleich viele grüne und blaue Kugeln vorhanden.“

Oder:

„Es sind doppelt so viele rote wie grüne Kugeln vorhanden. “

Wahrscheinlichkeit

Kolmogorow zeigte 1933, dass für den Aufbau einer Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung drei geeignet ausgewählte Eigenschaften der rel. Häufigkeit genügen.

Wir betrachten die Ergebnismenge Ω und alle Teilmengen (Ereignisse) von Ω.
P sei eine Funktion, die jeder Teilmenge eine reelle Zahl zuordnet.
P (Wahrscheinlichkeitsverteilung) erfülle folgende Bedingungen (Axiome):

1. $P(E) \geq 0$ für alle Teilmengen von Ω, $\quad E \subset \Omega$
2. $P(\Omega) = 1$ (sicheres Ereignis Ω)
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ für $A,\ B \subset \Omega$ und $A \cap B = \emptyset$ (unmögliches Ereignis $\emptyset$)

Folgerungen: $\quad A,\ B,\ C \subset \Omega$

a) $P(A) \leq 1$

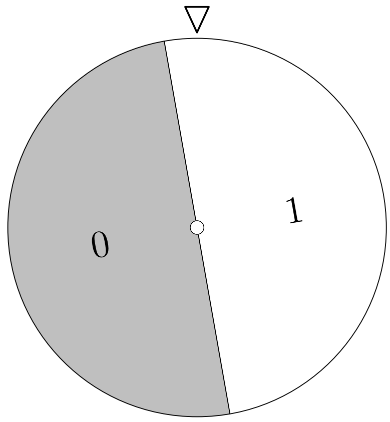
b) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ $\qquad$ Gegenereignis $\overline{A}$

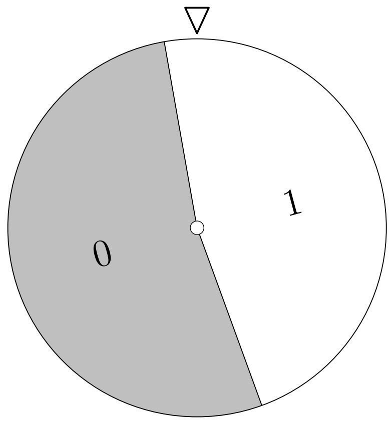
c) $A \subset B \implies P(A) \leq P(B)$

d) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Hierbei wird *Wahrscheinlichkeit* nicht explizit definiert, sondern durch Eigenschaften umgrenzt.
Die Festlegung der Funktionswerte $P(A)$, d. h. die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse, unterliegt keinen weiteren Einschränkungen. Bei realen Experimenten, bei denen man geneigt ist anzunehmen, dass die Ergebnisse gleich häufig auftreten, werden den Elementarereignissen die gleiche Wahrscheinlichkeit P zugeordnet. (Laplace-Experiment).
Für einen unsymmetrischen Würfel hat eine ungleichmäßige Verteilung hypothetischen Charakter, entsprechend werden Anweisungen wie „Bestimme die Wahrscheinlichkeit durch Simulation.“ interpretiert.
Man wird bestrebt sein, rel. Häufigkeiten bestmöglich zu modellieren. Hieran ist ersichtlich, dass es nicht möglich ist, *Wahrscheinlichkeit* für reale Zufallsexperimente explizit umfassend zu definieren. Denn könnte man es, so wären die Wahrscheinlichkeiten für unsymmetrische Würfel (und alle anderen Experimente) zweifelsfrei zu ermitteln.
Das Laplace-Modell beruht auf dem intuitiven Wahrscheinlichkeitsbegriff.
Hans Freudenthal: „Einfache Kombinatorik ist das Rückgrat elementarer Wahrscheinlichkeitsrechnung.“
Auf dieser Grundlage sind unsymmetrische Fälle begreifbar.

Modelle für den Münzwurf





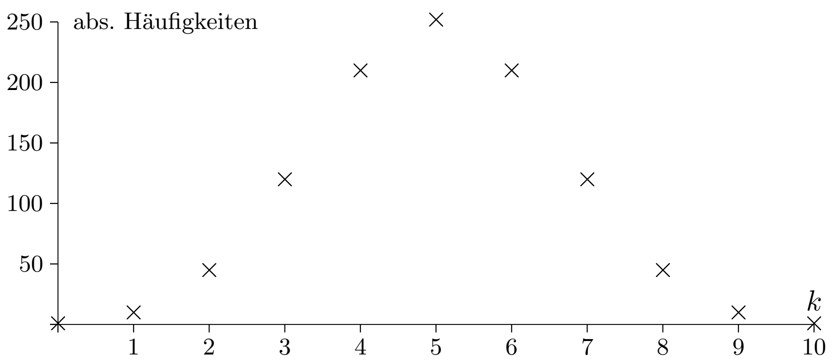
In einem Modell können Wahrscheinlichkeiten exakt festgelegt werden.
Das ist die Basis für Berechnungen in der Schule und entspricht den Festlegungen beim axiomatischen Vorgehen.
Für ein reales Zufallsexperiment stellt sich stets die Frage,
wie gut das Modell das Zufallsgeschehen erfasst, d. h. in welchem Maße im Modell erarbeitete Erkenntnisse (Berechnungen) das Auftreten von realen Ereignissen erklären.
Bei engem Zusammenhang verblasst der begriffliche Unterschied von Modell und Realität, insbesondere wird der Modell-Begriff Wahrscheinlichkeit auf die Realität übertragen
(wo er schon in genäherter Form vorhanden war).

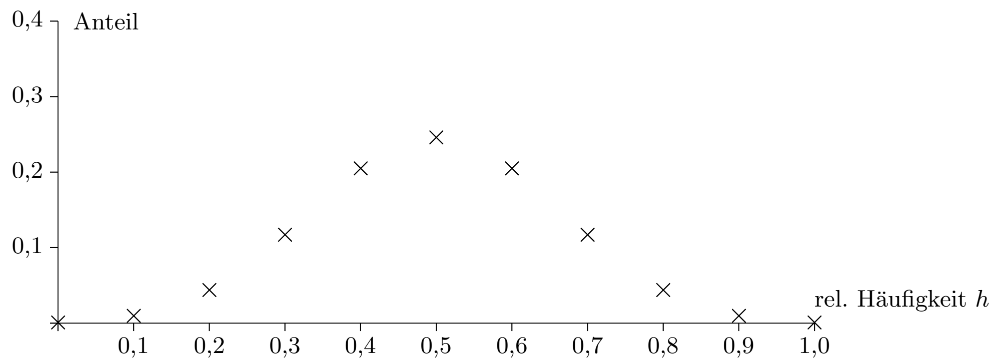
Münzwurf

Die folgenden Berechnungen zeigen, wie die Anzahl der Möglichkeiten Charakteristisches für die Wahrscheinlichkeitsrechnung hervorbringt.
Eine L-Münze (Laplace-Münze) wird n-mal geworfen. Es gibt 2^n verschiedene 0/1-Folgen.

Absolute Häufigkeiten für das Auftreten der 1 für $n = 10$:

k Anzahl der Einsen	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
abs. Häufigkeit	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1





Die absoluten Häufigkeiten können einzeln mit den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ oder mit der erzeugenden Funktion $f(x) = (1 + x)^n$ ermittelt werden, z. B.
$(1 + x)^{10} = 1 + 10x + 45x^2 + 120x^3 + 210x^4 + 252x^5 + 210x^6 + 120x^7 + 45x^8 + 10x^9 + x^{10}$

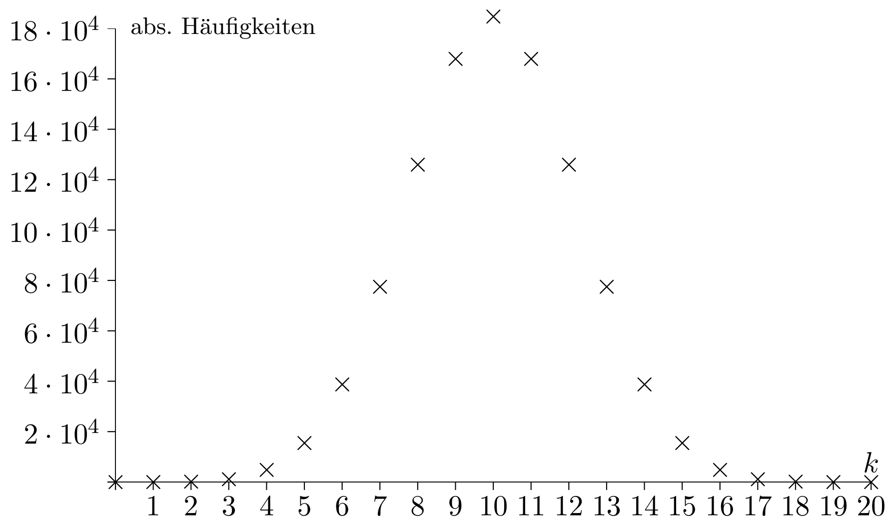
Münzwurf

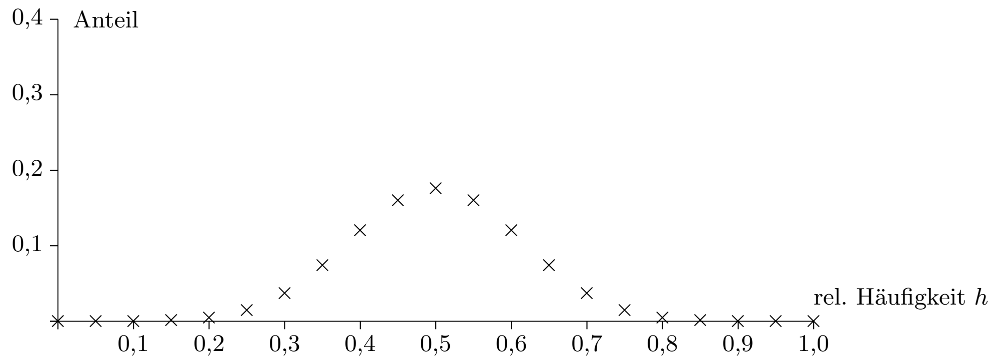
Eine L-Münze (Laplace-Münze) wird n-mal geworfen. Es gibt 2^n verschiedene 0/1-Folgen.

Absolute Häufigkeiten für das Auftreten der 1 für $n = 20$:

k Anzahl der Einsen	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
abs. Häufigkeit	1	20	190	1140	4845	15504	38760	77520	125970	167960	184756

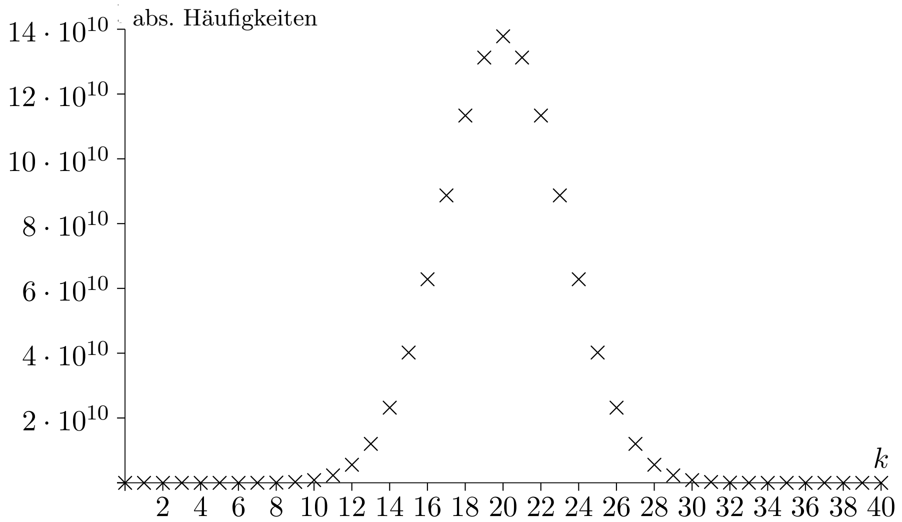
k Anzahl der Einsen	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
abs. Häufigkeit	167960	125970	77520	38760	15504	4845	1140	190	20	1

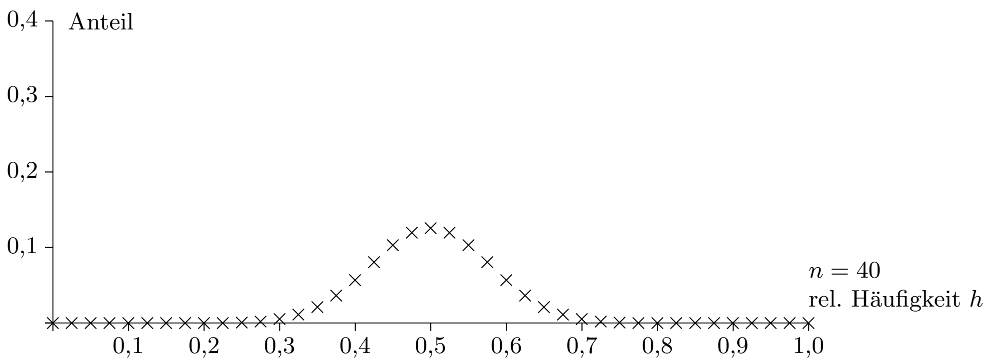


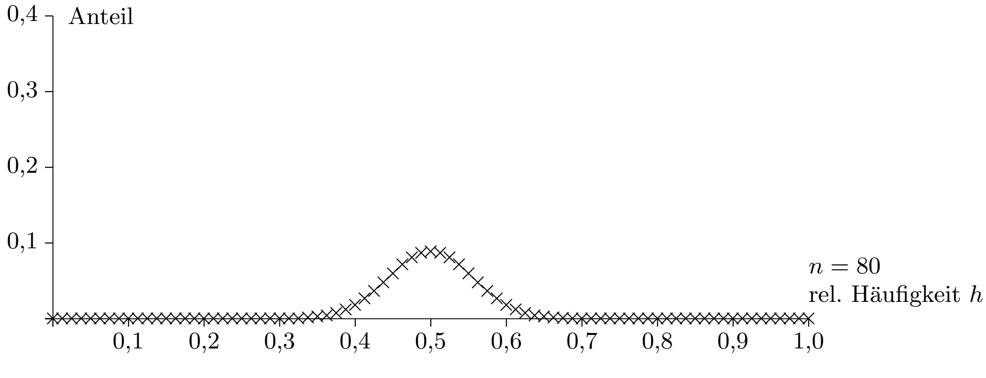


Münzwurf

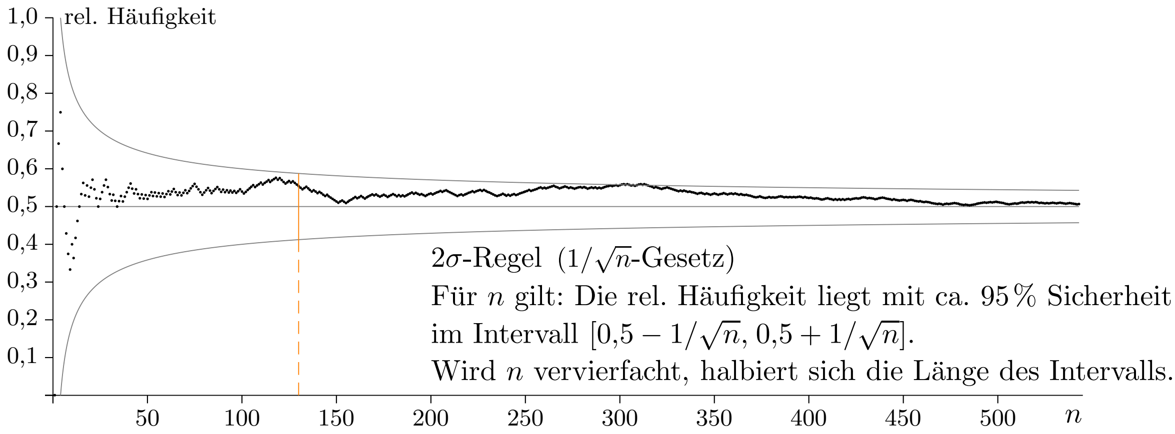
$n = 40$

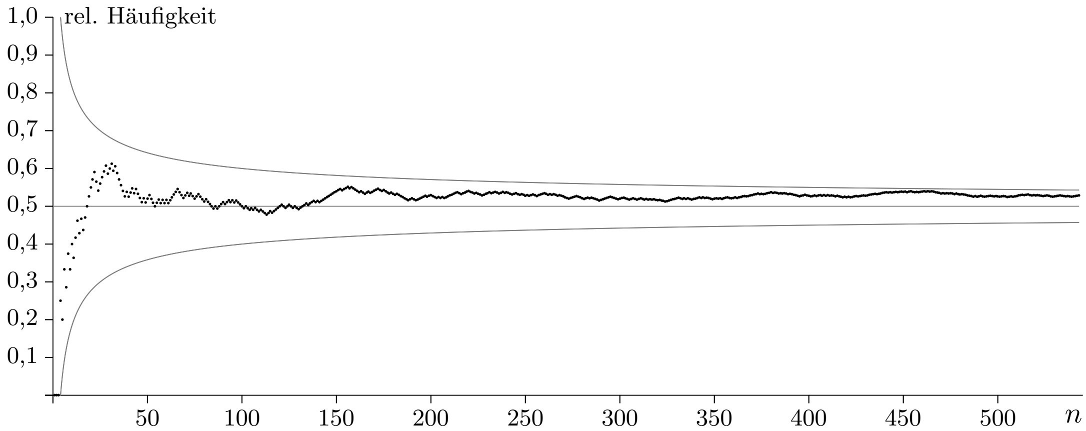


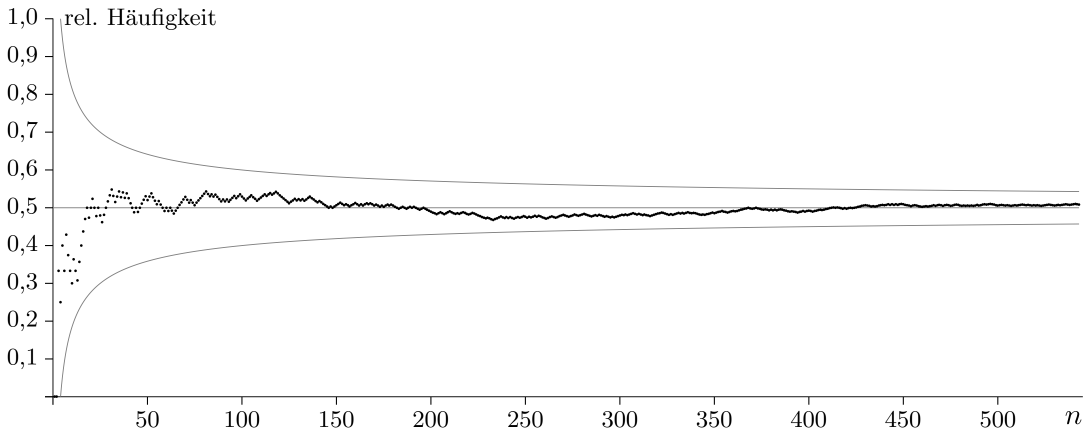




Simulationen mit einer L-Münze







Subjektive Wahrscheinlichkeit

Die Begriffe *wahrscheinlich* und *Wahrscheinlichkeit* beschreiben in der Umgangssprache die persönliche Bewertung, in welchem Maße ein bestimmtes, häufig nicht wiederholbares Ereignis eintritt oder ein ungewisser Tatbestand vermutet wird. Neue Informationen können zu einer veränderten Beurteilung führen. Wir gehen mal davon aus, dass keine Vorurteile diesen Prozess blockieren.
Auf diese Weise versuchen Menschen alltäglich, mit unsicheren Situationen umzugehen.
Sie bemessen die Chance, über einen Graben springen zu können, bzw. bewerten das Risiko, die Aktion nicht trocken zu bewältigen. Unterschiedliche Einschätzungen tragen zur Vielfalt des Lebens bei.

In der Behauptung „Wir werden uns wahrscheinlich nicht wiedersehen.“
wird *wahrscheinlich* im Sinne von mutmaßlich, fast sicher verwendet.
Wenn ein Arzt Ihnen sagt: „Bei dieser Operation beträgt die Wahrscheinlichkeit zu Überleben 90 %.“
so kann das heißen, dass 90 % der auf diese Weise Behandelten nach der Medizinstatistik überleben, es kann aber auch den Grad der Überzeugung angesichts der eigenen Fähigkeiten und des Krankheitsbildes ausdrücken. Ein anderer Arzt käme möglicherweise zu einer anderen Einschätzung.
Subjektive Wahrscheinlichkeiten scheinen nicht quantifizierbar zu sein.
Sie spielen jedoch bei vielen Entscheidungsprozessen, z. B. wirtschaftlichen (Wie groß wird der Absatz für das neue Produkt sein?) eine große Rolle.
In der Bayes-Statistik wird untersucht, wie sich eine vermutete Wahrscheinlichkeitsverteilung unter Berücksichtigung weiterer Beobachtungen (erhobener Daten) verändert.
Die Güte von Vorhersagen wie „Für Hannover beträgt die Regenwahrscheinlichkeit für den morgigen Tag 80 %.“ lässt sich im Nachhinein überprüfen. Von 100 Ankündigungen dieser Art erwarten wir im Schnitt 80 Tage mit Regen.
Subjektive Wahrscheinlichkeiten sind von den Modell-Wahrscheinlichkeiten, die an relative Häufigkeiten gebunden sind, abzugrenzen. Einschätzungen können argumentativ vertreten werden.
In sofern wird man sie auch in der Schule antreffen.

Was ist Zufall?

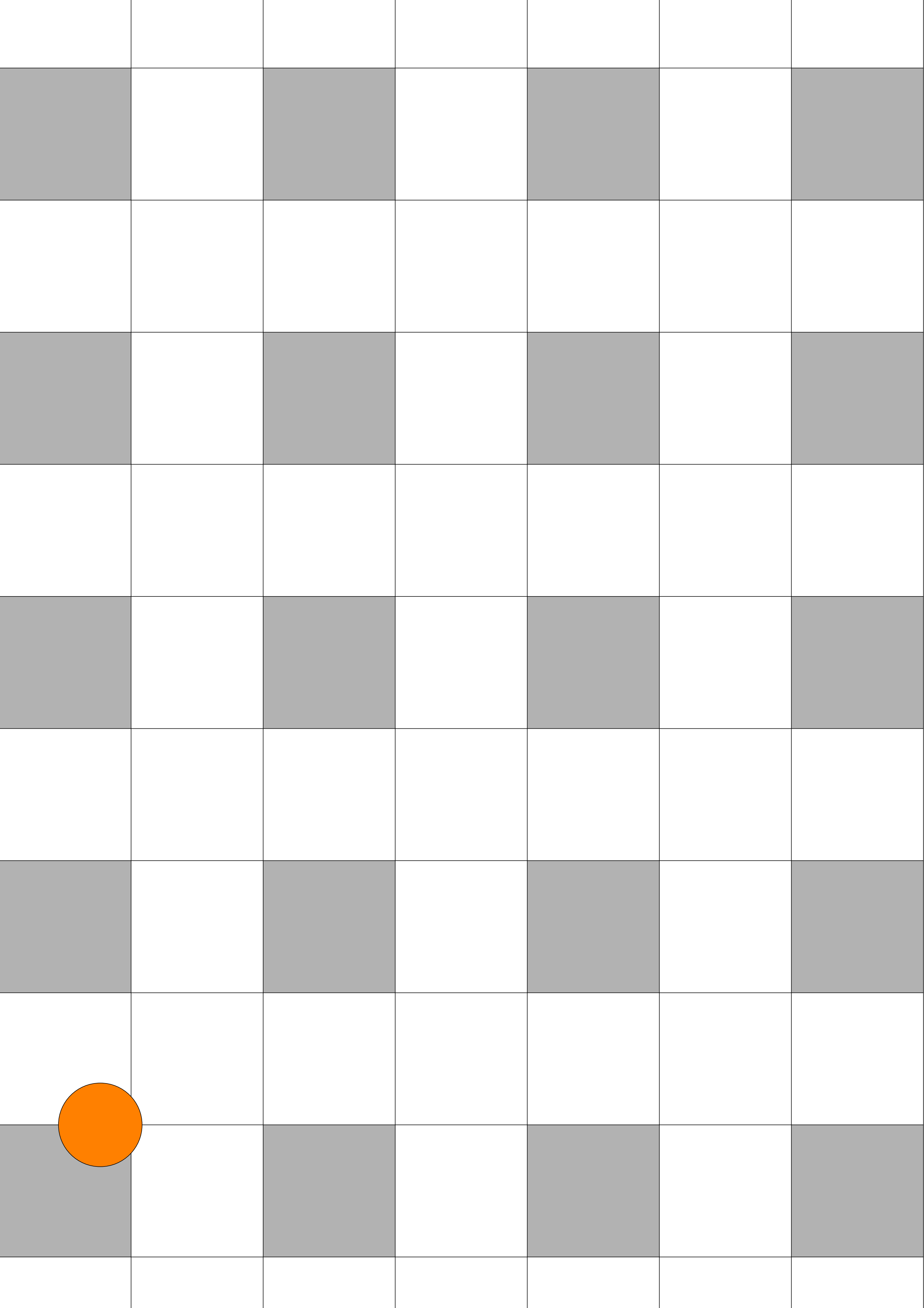
Man legt uns wiederholt Nullen und Einsen vor. Da kein System erkennbar ist, erscheint uns die Aufeinanderfolge zufällig. Sobald wir in der Lage wären, die Ergebnisse mit einer gewissen Treffsicherheit vorauszusagen, würde sich unsere Einstellung ändern. Zufall ist kein mathematischer Begriff. Wir bezeichnen ein Geschehen (für uns) als zufällig, wenn wir nicht in der Lage sind, es vorherzusagen.
Bei Zufallsexperimenten wie dem Ziehen der Lottozahlen scheint dies grundsätzlich nicht möglich zu sein. Winzigste Unterschiede in der Ausgangssituation schaukeln sich beim Aneinanderstoßen der Kugeln zu großen, nicht vorhersehbaren Unterschieden auf. Dies alles ist kein Widerspruch zu der Tatsache, dass die grundlegenden physikalischen Gesetze, die in der Lottotrommel auf die Kugeln einwirken, allesamt bekannt sind. Nur nützt uns dieses Wissen angesichts der Komplexität des Geschehens nichts. Die Vorstellung, dass man bei Kenntnis aller Informationen weiß, was passieren wird, der Ablauf also vorherbestimmt (determiniert) ist, kann gedacht werden, jedoch wird man (vermutlich) nie alles so genau wissen, dass diese Vorstellung relevant ist. Das Geschehen wird mit zufällig beschrieben.

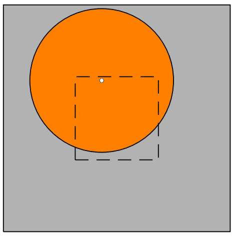
Ich biete dir folgendes Spiel an:

Du wirfst eine 2-Cent-Münze, so dass sie auf einem Raster aus Quadraten landet,
deren Seitenlänge 3 cm beträgt.

Wenn deine Münze ganz in ein Quadrat fällt, gewinnst du 50 Cent,
andernfalls bekomme ich von dir 10 Cent.

Spielst du mit?





Eine Münze mit dem Durchmesser d landet vollständig innerhalb eines Quadrats mit der Seitenlänge s, wenn ihr Mittelpunkt innerhalb eines symmetrisch liegenden, kleineren Quadrats mit der Seitenlänge $s - d$ liegt.
Die Wahrscheinlichkeit hierfür beträgt:

$$P = \frac{(s-d)^2}{s^2}$$

Bayes-Statistik
Startseite