Bernoulli-Kette

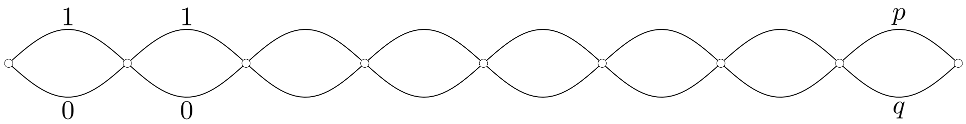
Jacob Bernoulli (1654 - 1705)

Die folgende Aufgabe bereitet spätere Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung vor, insbesondere das Erstellen von Tests zur Qualitätskontrolle von Erzeugnissen, zur Untersuchung der Wirksamkeit von Medikamenten oder zur Beantwortung biologischer Fragen wie:

Sind Ratten farbenblind?

In einer Urne befinden sich 4 schwarze und 6 weiße Kugeln. Wir mischen und entnehmen der Urne eine Kugel, notieren die Farbe und legen die Kugel wieder in die Urne zurück. Diesen Einzelversuch wiederholen wir 8mal. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den 8 Ziehungen keine (eine, zwei, ..., acht) schwarze Kugeln sind?

Ein Zufallsversuch mit zwei möglichen Ausfällen (Treffer 1, Fehlschlag 0) heißt Bernoulli-Versuch. Die Wahrscheinlichkeiten werden mit p und q bezeichnet.
Wiederholt man einen Bernoulli-Versuch n-mal, so entsteht eine Bernoulli-Kette der Länge n.



Die Menge Ω der Elementarereignisse einer Bernoulli-Kette der Länge n
besteht aus allen 0-1-Folgen der Länge n.

Für die Aufgabe ist z. B. die Wahrscheinlichkeit des Elementarereignisses $(1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1)$
$p^5 \cdot q^3$ mit $p = 0{,}4$ und $q = 1 - p = 0{,}6$.
Allgemein interessiert man sich bei einer Bernoulli-Kette für die Wahrscheinlichkeit, genau k Treffer zu erzielen. Sei X die Anzahl der Treffer für jedes Elementarereignis. Wir fragen nach der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $X = 2$.
Günstige Elementarereignisse für genau 2 Treffer sind z. B. $(1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
und $(0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0)$
Hiervon gibt es $\binom{8}{2}$ Stück, die alle jeweils die Wahrscheinlichkeit $p^2 \cdot q^6$ haben, insgesamt erhalten wir:

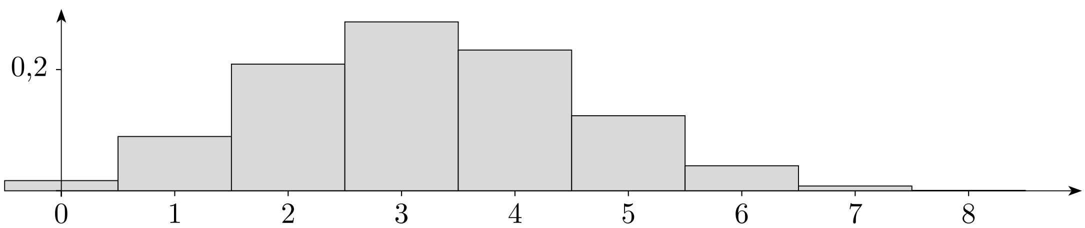
$$P(X = 2) = \binom{8}{2} \cdot p^2 \cdot q^6$$

Bei einer Bernoulli-Kette der Länge n gebe die Zufallsvariable X die Anzahl der Treffer an. Die Trefferwahrscheinlichkeit sei p. Dann ist die Wahrscheinlichkeit für k Treffer

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \qquad , \; q = 1 - p$$

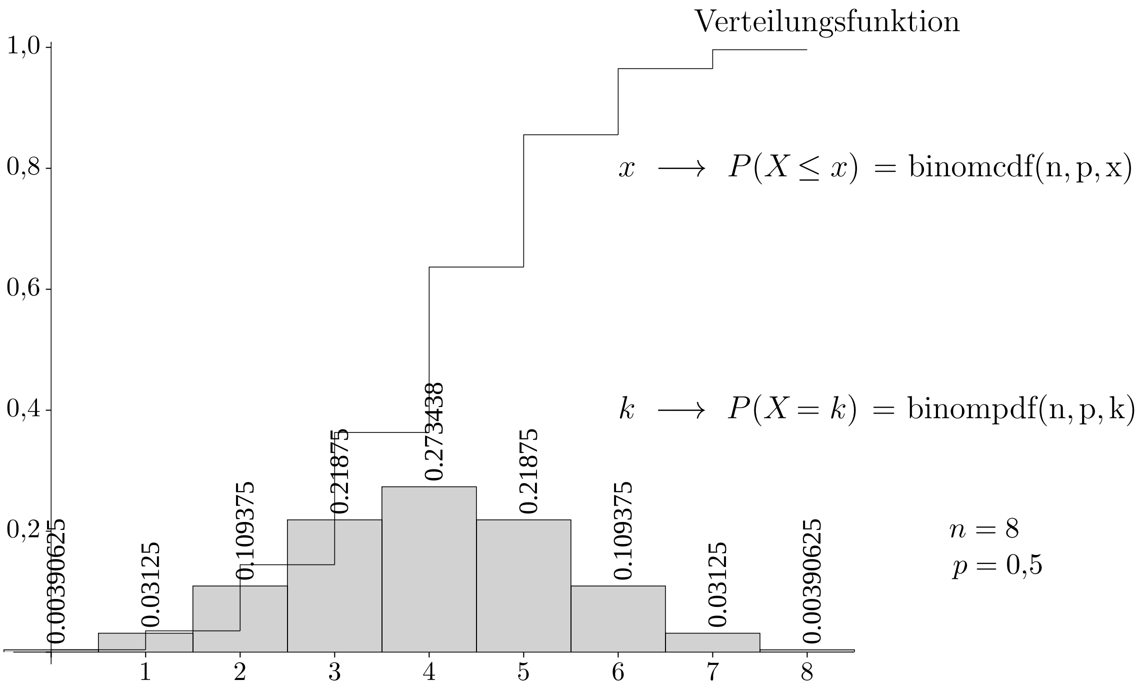
Die Zufallsvariable X heißt binomialverteilt.

k	$P(X = k)$
0	0,017
1	0,090
2	0,209
3	0,279
4	0,232
5	0,124
6	0,041
7	0,008
8	0,000



Bernoulli-Kette

Siehe auch (Sek I): Bernoulli-Kette, Galton-Brett



Bernoulli-Kette

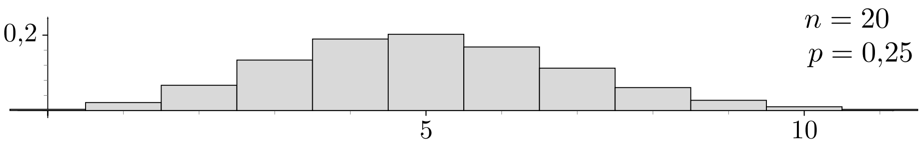
In einer Lieferung Äpfel sind 25 % wurmstichig.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter 20 zufällig ausgewählten Äpfeln

a) genau 8
b) höchstens 8
c) mindestens 8 wurmstichige Äpfel sind?
d) die Anzahl der wurmstichigen Äpfel im Bereich $[4; 6]$ liegt?
e) unter den ersten und letzten 10 Äpfeln jeweils genau 4 wurmstichige sind?
f) die Anzahl der Äpfel ohne Wurm im Bereich $[13; 17]$ liegt?

Bernoulli-Kette

In einer Lieferung Äpfel sind 25 % wurmstichig.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter 20 zufällig ausgewählten Äpfeln

a) genau 8
b) höchstens 8
c) mindestens 8 wurmstichige Äpfel sind?
d) die Anzahl der wurmstichigen Äpfel im Bereich $[4; 6]$ liegt?
e) unter den ersten und letzten 10 Äpfeln jeweils genau 4 wurmstichige sind?
f) die Anzahl der Äpfel ohne Wurm im Bereich $[13; 17]$ liegt?



a) $P(X = 8) = 6{,}1\,\%$
b) $P(X \leq 8) = 95{,}9\,\%$
c) $P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7) = 10{,}2\,\%$
d) $P(4 \leq X \leq 6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 3) = 56{,}1\,\%$
e) $n = 10,\ P(X = 4)^2 = 2{,}1\,\%$
f) $p = 0{,}75,\ P(13 \leq X \leq 17) = 80{,}7\,\%$

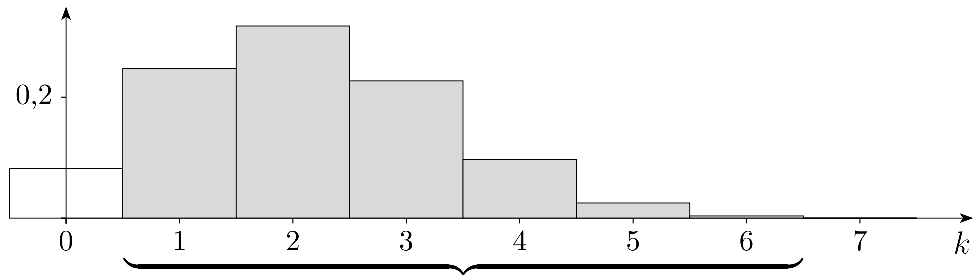
Bernoulli-Kette “mindestens ein Treffer“-Aufgabe

Eine häufige Fragestellung lautet:

Ab welchem n liegt mit mindestens 90 %-iger Wahrscheinlichkeit wenigstens ein Treffer vor, gegeben $p = 0{,}3$?

Lösung:

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \geq 0{,}9 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 - 0{,}7^n \geq 0{,}9 \quad \Longrightarrow \quad n \geq 6{,}5 \quad$ mindestens $n = 7$



1. 95 % aller Fahrgäste haben einen gültigen Fahrausweis.
   Wie viele Fahrgäste muss ein Kontrolleur mindestens überprüfen,
   damit er mit mindestens 90 %iger Wahrscheinlichkeit auf einen Schwarzfahrer trifft?

2. Die Trefferwahrscheinlichkeit beim (einmaligen) Drehen eines Glücksrads sei 25 %.
   Ab welchem n lohnt es sich, darauf zu wetten, dass mindestens ein Treffer erzielt wird?
   (Abitur Bayern 1981)

3. Wie hoch muss der Anteil der Schwarzfahrer an allen Fahrgästen mindestens sein,
   damit mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 99 % unter 100 Fahrgästen mindestens ein Schwarzfahrer ist?

4. Bei einer laufenden Produktion entsteht erfahrungsgemäß 8,5 % Ausschuss.
   Welche Ereignisse (Stichproben) A, B und C haben die angegebenen Wahrscheinlichkeiten?

   $$P(A) = \binom{30}{3} \cdot 0,085^3 \cdot 0{,}915^{27} \qquad P(B) = 0{,}085 \cdot 0{,}915^{10}$$

   $$P(C) = 1 - \sum_{k=0}^{3} \binom{20}{k} \cdot 0{,}085^k \cdot 0{,}915^{20-k}$$

   Zusatzfrage zu $P(B)$:
   Wie viele Ereignisse gibt es dann, die die Wahrscheinlichkeit $P(B)$ haben?

1. 95 % aller Fahrgäste haben einen gültigen Fahrausweis.
   Wie viele Fahrgäste muss ein Kontrolleur mindestens überprüfen,
   damit er mit mindestens 90 %iger Wahrscheinlichkeit auf einen Schwarzfahrer trifft?

   $n = 45$

2. Die Trefferwahrscheinlichkeit beim (einmaligen) Drehen eines Glücksrads sei 25 %.
   Ab welchem n lohnt es sich, darauf zu wetten, dass mindestens ein Treffer erzielt wird?
   (Abitur Bayern 1981)

   $$P(X \geq 1) > 0{,}5$$

   $$\iff \quad n > 2{,}4 \qquad \text{ab } n = 3$$

3. Wie hoch muss der Anteil der Schwarzfahrer an allen Fahrgästen mindestens sein,
   damit mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 99 % unter 100 Fahrgästen mindestens
   ein Schwarzfahrer ist?

   $(1-p)^{100} \leq 0{,}01 \qquad 4{,}5\,\%$

4. Bei einer laufenden Produktion entsteht erfahrungsgemäß 8,5 % Ausschuss.
   Welche Ereignisse (Stichproben) A, B und C haben die angegebenen Wahrscheinlichkeiten?

   $$P(A) = \binom{30}{3} \cdot 0,085^3 \cdot 0{,}915^{27} \qquad P(B) = 0{,}085 \cdot 0{,}915^{10}$$

   $$P(C) = 1 - \sum_{k=0}^{3} \binom{20}{k} \cdot 0{,}085^k \cdot 0{,}915^{20-k}$$

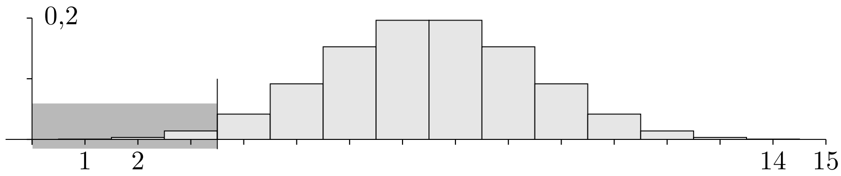
   Zusatzfrage zu $P(B)$:
   Wie viele Ereignisse gibt es dann, die die Wahrscheinlichkeit $P(B)$ haben?

   A: Stichprobe der Länge $n = 30$ mit genau $k = 3$ Ausschussstücken,

   B: Stichprobe der Länge $n = 11$ mit genau einem Ausschussstück an vorgegebener Stelle,
   hiervon gibt es 11 Möglichkeiten,

   C: Stichprobe der Länge $n = 20$ mit mindestens 4 Ausschussstücken,
   $1 - P(X \leq 3) = P(X \geq 4)$

Betrachtung eines Ereignisses unter verschiedenen Wahrscheinlichkeiten

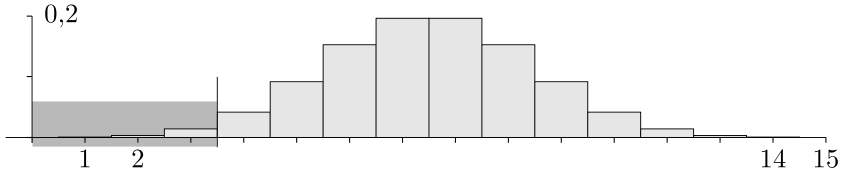


Wir werfen eine (0/1)-Münze $n = 15$ mal und betrachten das Ereignis $X \leq 3$, X Anzahl der Einsen.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses unter der Annahme (Hypothese), dass $p = 0{,}5$ ($p = 0{,}4$) (Wahrscheinlichkeit für das Werfen einer 1) ist.

b) Unter welcher Trefferwahrscheinlichkeit p gilt $P(X \leq 3) = 0{,}05$?

Betrachtung eines Ereignisses unter verschiedenen Wahrscheinlichkeiten



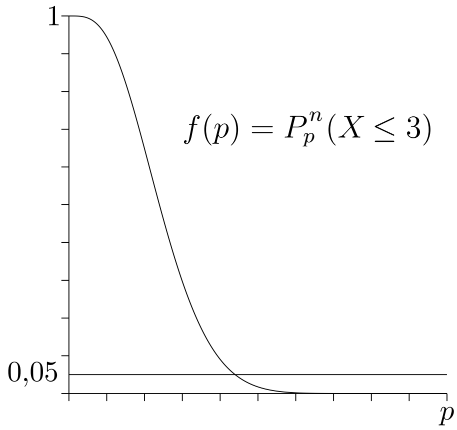
Wir werfen eine (0/1)-Münze $n = 15$ mal und betrachten das Ereignis $X \leq 3$, X Anzahl der Einsen.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses unter der Annahme (Hypothese), dass $p = 0{,}5$ ($p = 0{,}4$) (Wahrscheinlichkeit für das Werfen einer 1) ist.

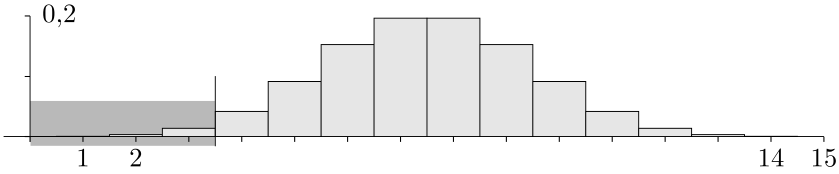
$$P_{0,5}^{n}(X \leq 3) = 0{,}018$$

$$P_{0,4}^{n}(X \leq 3) = 0{,}091$$

b) Unter welcher Trefferwahrscheinlichkeit p gilt $P_p^{15}(X \leq 3) = 0{,}05$? $p = 0{,}44$



Nullhypothese und p-Wert



Unter den Hypothesen (vermutete Wahrscheinlichkeiten) tritt $p = 0{,}5$ hervor.
Beim Würfel ist es $p = 1/6$ für das Werfen z. B. einer 6.
Wir gehen also davon aus, dass die Münze unverfälscht ist.
Diese Hypothese (denke an eine Unschuldsvermutung) wird als Nullhypothese bezeichnet.

In einer Stichprobe vom Unfang $n = 15$ sei $X = 3$. Wir können uns überlegen, wie wahrscheinlich dieses Ergebnis $X = 3$ zusammen mit allen unwahrscheinlicheren Ergebnissen $X = 0, 1, 2$ ist:

$$p = P_{0{,}5}^{n}(X \leq 3) = 0{,}018$$

Diese Wahrscheinlichkeit heißt p-Wert von 3.
Hier wäre ein Verdacht begründet, dass die Münze manipuliert ist.
Man würde sie genauer untersuchen.

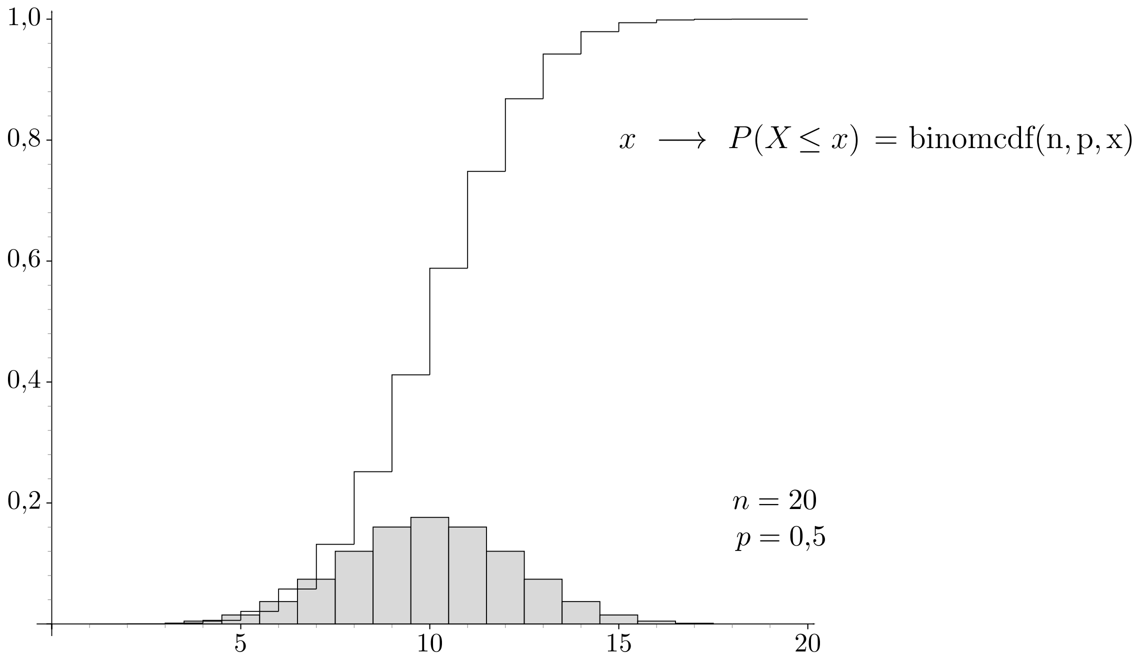
Ein kleiner p-Wert kann ein beobachtetes Stichprobenergebnis vom Zufall statistisch abgrenzen, vorbehaltlich eines Irrtums.

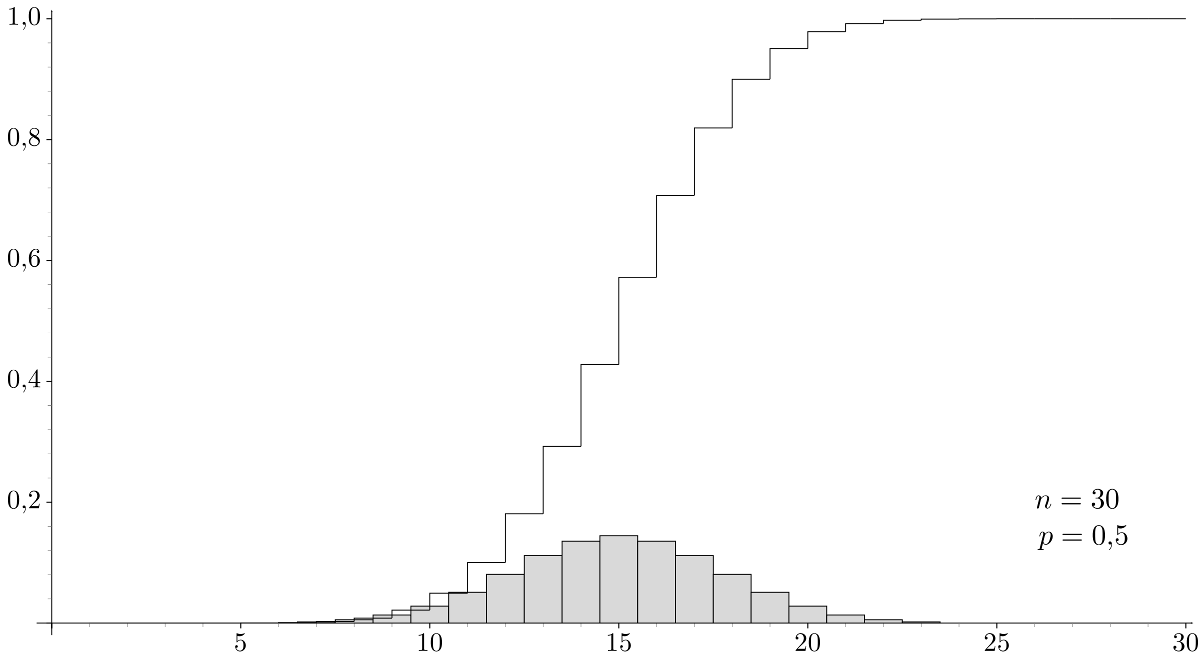
Semmelweis' Vermutung zum Kindbettfieber

Im Jahr 1847 entdeckte der ungarische Arzt Ignaz Semmelweis die Ursache des Kindbettfiebers, einer tödlichen Erkrankung vieler Frauen nach einer Entbindung. Er bemerkte, dass in zurückliegenden Jahren in einer Wiener Klinik, wo Ärzte die Entbindungen vornahmen, beinahe 10 % der Entbundenen starben (genauer von 20042 1989), in einer anderen Klinik, wo Hebammen entbanden, weniger als 4 % (von 56104 1883). Überdies stieg im Jahr 1823, in dem zum Studium der Anatomie das Sezieren von Leichen eingeführt wurde, die Sterberate sprunghaft an.
Als ein mit ihm befreundete Gerichtsmediziner während einer Leichensektion von einem Studenten mit dem Skalpell verletzt wurde und wenige Tage später an einer Blutvergiftung verstarb - einer Krankheit, die einen ähnlichen Verlauf zeigte wie das Kindbettfieber -, vermutete Semmelweis, dass Ärzte sich bei Obduktionen mit einem „Leichengift" infizierten, das sie dann bei einer Entbindung übertrugen. Die Übertragung von Bakterien war noch unbekannt.
Semmelweis bemühte sich, das Desinfizieren der Hände einzuführen. Doch die meisten Ärzte, unter ihnen sämtliche Autoritäten der Zeit, stritten jeden Zusammenhang zwischen ihren Waschgewohnheiten und den Sterbefällen ab. Semmelweis wurde verleumdet und lächerlich gemacht. Die Ergebnisse wurden jahrzehntelang als Zufall abgetan. Aufgrund seiner psychischen Veränderung - Unbeherrschtheit, Verwirrtheit, Vergesslichkeit - wurde er 1865 in eine Irrenanstalt eingewiesen. Kurz darauf starb er mit 47 Jahren, möglicherweise wurde er von Pflegern erschlagen.
Zu Semmelweis' Zeiten gab es kein Verfahren, das es erlaubt hätte, von der Stichprobe auf die Gesamtheit zu schließen.

Welche statistische Aussage ist dir heute möglich?

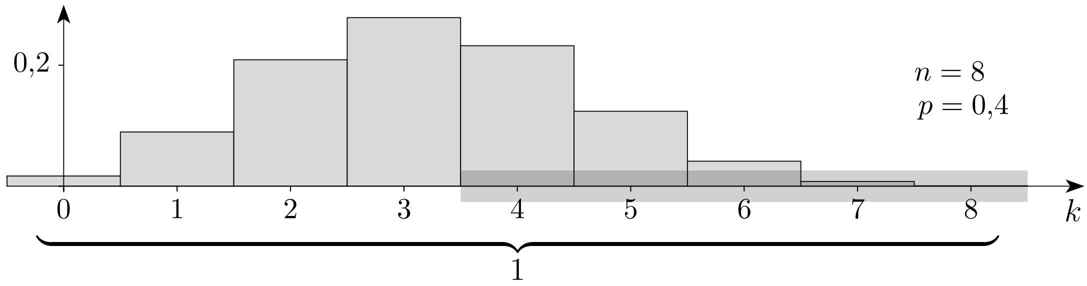
Verteilungsfunktion der Binomialverteilung



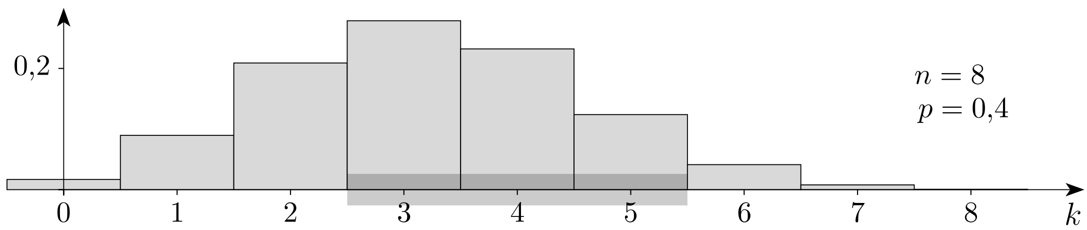


Es ist nicht erforderlich, für x in $\mathrm{binomcdf(n, p, x)}$ explizit mit iPart(x) den ganzzahligen Anteil zu nehmen.

Binomialverteilung



$P(X \geq 4) \; = \; 1 - P(X \leq 3) = 0{,}4059$



$P(3 \leq X \leq 5) \; = \; P(X \leq 5) - P(X \leq 2) = 0{,}6348$

$P_{0,4}^{8}(X = 3) \; = \; P_{0,6}^{8}(X = 5)$

$P_{0,4}^{8}(X \leq 3) \; = \; P_{0,6}^{8}(X \geq 5) = 1 - P_{0,6}^{8}(X \leq 4)$

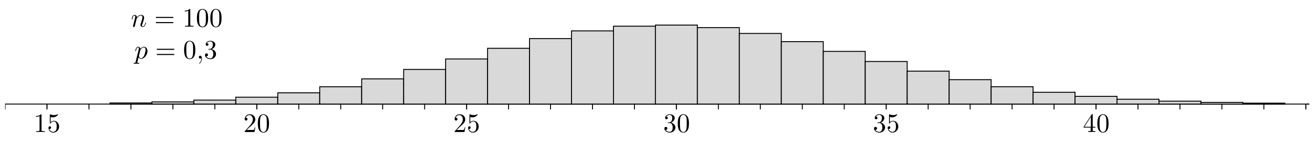
$P_{p}^{n}(X = k) \; = \; P_{q}^{n}(X = n - k)$

$P_{p}^{n}(X \leq k) \; = \; 1 - P_{q}^{n}(X \leq n - k - 1)$

Tabellarische Lösung

Binomialverteilung
Gegeben: $n = 100,\ p = 0{,}3,\ \alpha = 0{,}05$
Gesucht ist

a) das größte k für das gilt: $P(X \leq k) \leq \alpha$
b) das kleinste k für das gilt: $P(k \leq X) \leq \alpha$



Tabellarische Lösung

Binomialverteilung $n = 100$, $p = 0{,}3$

k	$P(X \leq k)$	k	$P(X \leq k)$
0	0,0000	26	0,2244
1	0,0000	27	0,2964
2	0,0000	28	0,3768
3	0,0000	29	0,4623
4	0,0000	30	0,5491
5	0,0000	31	0,6331
6	0,0000	32	0,7107
7	0,0000	33	0,7793
8	0,0000	34	0,8371
9	0,0000	35	0,8839
10	0,0000	36	0,9201
11	0,0000	37	0,9470
12	0,0000	38	0,9660
13	0,0001	39	0,9790
14	0,0002	40	0,9875
15	0,0004	41	0,9928
16	0,0010	42	0,9960
17	0,0022	43	0,9979
18	0,0045	44	0,9989
19	0,0089	45	0,9995
20	0,0165	46	0,9997
21	0,0288	47	0,9999
22	0,0479	48	0,9999
23	0,0755	49	1,0000
24	0,1136	50	1,0000
25	0,1631	51	1,0000

Binomialverteilung
Gegeben: $n = 100,\ p = 0{,}3,\ \alpha = 0{,}05$
Gesucht ist

a) das größte k für das gilt: $P(X \leq k) \leq \alpha$
b) das kleinste k für das gilt: $P(k \leq X) \leq \alpha$

Mit dem GTR kann die Tabelle erzeugt werden:

Y1 = binomcdf(100, 0.3, X) (Y-Editor)
2nd TBLSET
Anfangswert: TblStart, hier z. B. 10,
Schrittweite: $\triangle$ Tbl = 1
2nd TABLE

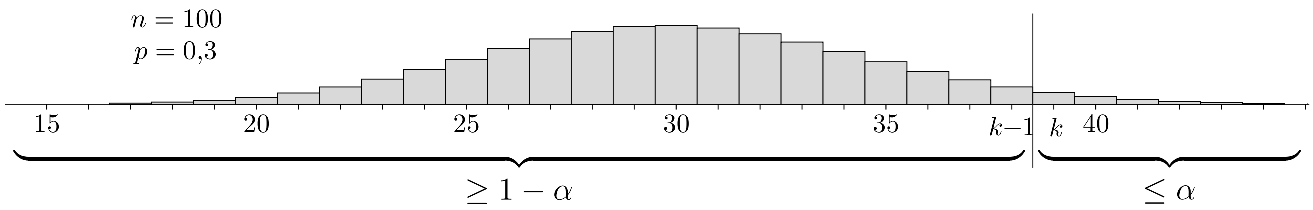
Lösung:

a) $k_{\text{max}} = 22$

b) $k_{\text{min}} = 39$

Suche das kleinste k mit $P(X \leq k-1) \geq 1 - \alpha$.

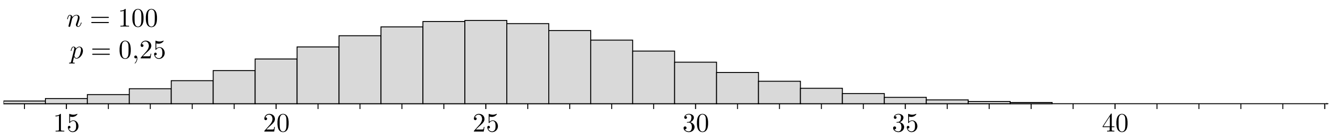
$1 - \alpha = 0{,}95$



Tabellarische Lösung

Binomialverteilung
Gegeben: $n = 100,\ p = 0{,}25,\ \alpha = 0{,}05$
Gesucht ist

a) das größte k für das gilt: $P(X \leq k) \leq \alpha$
b) das kleinste k für das gilt: $P(k \leq X) \leq \alpha$



Tabellarische Lösung

Binomialverteilung
Gegeben: $n = 100,\ p = 0{,}25,\ \alpha = 0{,}05$
Gesucht ist

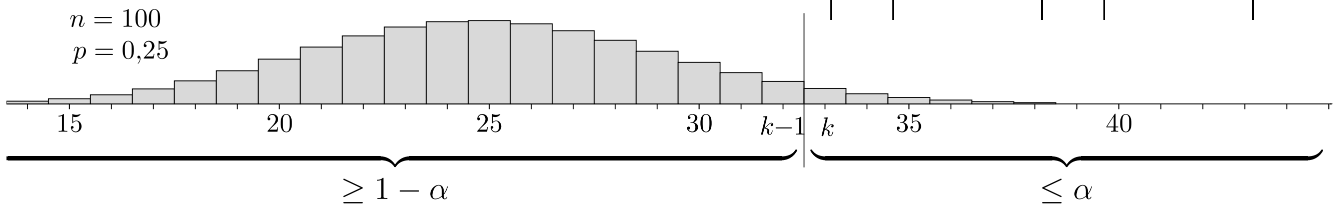
a) das größte k für das gilt: $P(X \leq k) \leq \alpha$
b) das kleinste k für das gilt: $P(k \leq X) \leq \alpha$

Lösung:

a) $k_{\text{max}} = 17$
b) $k_{\text{min}} = 33$

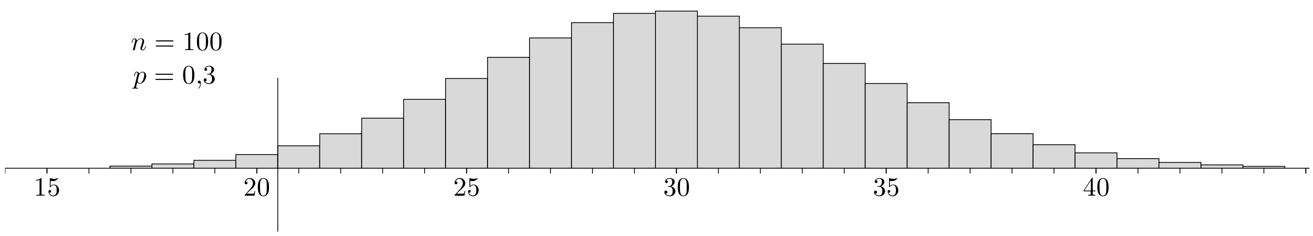
Binomialverteilung $n = 100,\ p = 0{,}25$

k	$P(X \leq k)$	k	$P(X \leq k)$
0	0,0000	26	0,6417
1	0,0000	27	0,7224
2	0,0000	28	0,7925
3	0,0000	29	0,8505
4	0,0000	30	0,8962
5	0,0000	31	0,9307
6	0,0000	32	0,9554
7	0,0000	33	0,9724
8	0,0000	34	0,9836
9	0,0000	35	0,9906
10	0,0001	36	0,9948
11	0,0004	37	0,9973
12	0,0010	38	0,9986
13	0,0025	39	0,9993
14	0,0054	40	0,9997
15	0,0111	41	0,9999
16	0,0211	42	0,9999
17	0,0376	43	1,0000
18	0,0630	44	1,0000
19	0,0995	45	1,0000
20	0,1488	46	1,0000
21	0,2114	47	1,0000
22	0,2864	48	1,0000
23	0,3711	49	1,0000
24	0,4617	50	1,0000
25	0,5535	51	1,0000



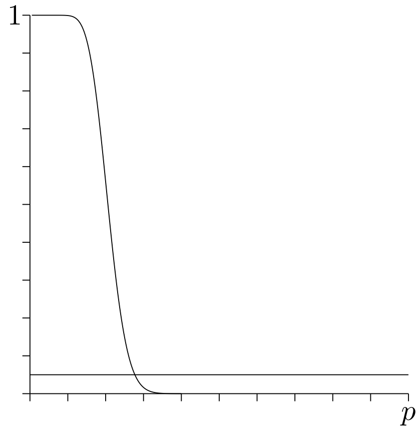
Grafische Lösung

Binomialverteilung
Gegeben: $n = 100$
Gesucht sind alle Trefferwahrscheinlichkeiten p,
für die $P(X \leq 20) \leq 0{,}05$ gelten.



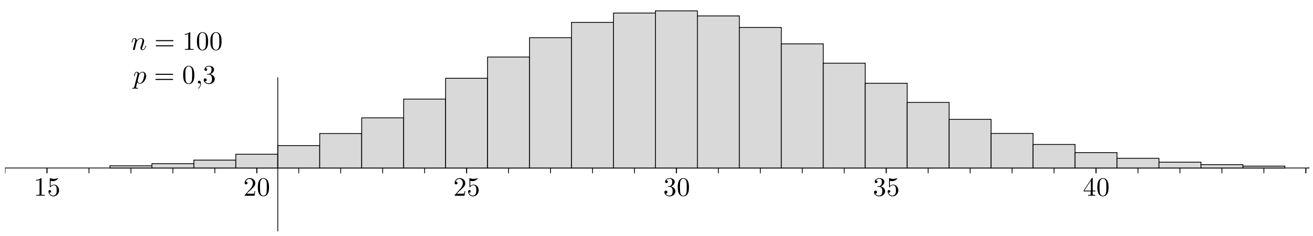
Grafische Lösung

Binomialverteilung
Gegeben: $n = 100$
Gesucht sind alle Trefferwahrscheinlichkeiten p,
für die $P(X \leq 20) \leq 0{,}05$ gelten.



Lösung:

$p \in [0{,}2772; 1]$

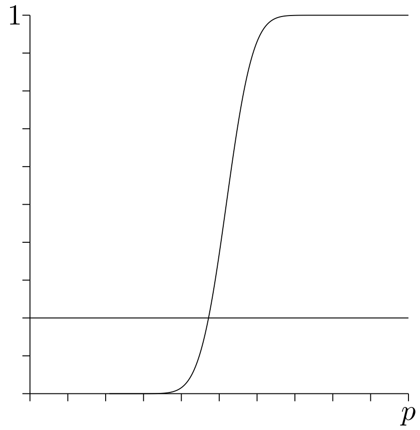


Grafische Lösung

Binomialverteilung
Gegeben: $n = 80$
Gesucht sind alle Trefferwahrscheinlichkeiten p,
für die $P(X \geq 42) > 0{,}20$ gelten.

Grafische Lösung

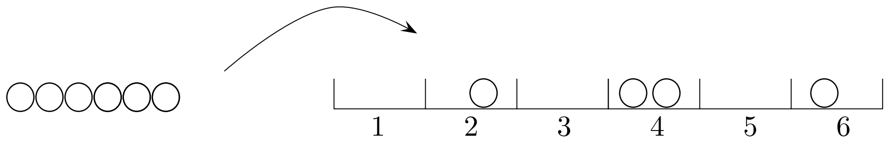
Binomialverteilung
Gegeben: $n = 80$
Gesucht sind alle Trefferwahrscheinlichkeiten p,
für die $P(X \geq 42) > 0{,}20$ gelten.



Lösung:
$p \in [0{,}4718; 1]$

Kugeln in Fächer

$n = 10$ Kugeln sollen auf $m = 6$ Fächer zufällig verteilt werden.



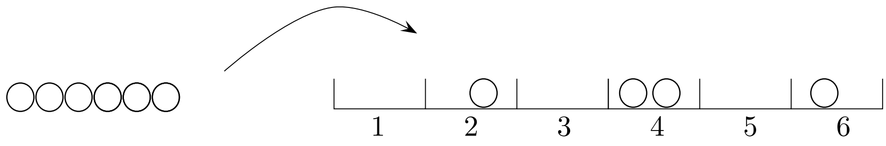
a) Untersuche, ob für ein bestimmtes Fach die Anzahl X der Kugeln binomialverteilt ist.
Tipp: Betrachte das Experiment aus Sicht des Faches. „Horch, was komm von draußen 'rein?“

b) Ermittle die Wahrscheinlichkeit P, mit der ein bestimmtes Fach leer bleibt.

c) Untersuche, ob die Anzahl Y der leeren Fächer binomialverteilt mit der Wahrscheinlichkeit P ist.

Kugeln in Fächer

$n = 10$ Kugeln sollen auf $m = 6$ Fächer zufällig verteilt werden.



a) Untersuche, ob für ein bestimmtes Fach die Anzahl X der Kugeln binomialverteilt ist.
Tipp: Betrachte das Experiment aus Sicht des Faches. „Horch, was komm von draußen 'rein?“

Jede Kugel gelangt mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ in ein bestimmtes Fach.
Der Vorgang wird 10-mal unabhängig wiederholt.

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \;\; p = \frac{1}{m}, \;\; q = 1-p$$

b) Ermittle die Wahrscheinlichkeit P, mit der ein bestimmtes Fach leer bleibt. $P = \left(\frac{5}{6}\right)^{10}$

c) Untersuche, ob die Anzahl Y der leeren Fächer binomialverteilt mit der Wahrscheinlichkeit P ist.

Y nimmt die Werte 0 bis 5 an.
Y kann nicht binomialverteilt sein,
da die zugrunde liegenden Ereignisse nicht unabhängig sind.

Wahrscheinlichkeit für 5 leere Fächer: P^5 (binomialverteilt), jedoch ist $6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{10}$ richtig.
Alle 10 Kugeln sind dann in einem bestimmten Fach.

Erwartungswert für 5 leere Fächer: $5P$ (binomialverteilt),
jedoch ist $6P$ nach der Häufigkeitsinterpretation richtig.

Wartezeiten in einer Bernoulli-Kette der Länge n

a) Erster Treffer im k-ten Versuch

b) Erster Treffer frühestens im k-ten Versuch

c) Erster Treffer spätestens im k-ten Versuch

d) i-ter Treffer im k-ten Versuch

e) i-ter Treffer frühestens im k-ten Versuch

f) i-ter Treffer spätestens im k-ten Versuch

Wartezeiten in einer Bernoulli-Kette der Länge n

a)	Erster Treffer im k-ten Versuch	$P(E) = P_p^{k-1}(X=0) \cdot p$ $P(E) = (1-p)^{k-1} \cdot p$ vorher kein Treffer, erst im k-ten Versuch
b)	Erster Treffer frühestens im k-ten Versuch	$P(E) = P^{k-1}(X=0)$ $P(E) = (1-p)^{k-1}$ vorher kein Treffer
c)	Erster Treffer spätestens im k-ten Versuch	$P(E) = 1 - P_p^{k}(X=0)$ $P(E) = 1 - (1-p)^{k}$ Gegenereignis von: Kein Treffer in k Versuchen
d)	i-ter Treffer im k-ten Versuch	$P(E) = P_p^{k-1}(X=i-1) \cdot p$ vorher $i-1$ Treffer, Treffer im k-ten Versuch
e)	i-ter Treffer frühestens im k-ten Versuch	$P(E) = P_p^{k-1}(X \leq i-1)$ höchstens $i-1$ Treffer in $k-1$ Versuchen
f)	i-ter Treffer spätestens im k-ten Versuch	$P(E) = 1 - P_p^{k}(X \leq i-1)$ Gegenereignis von: Höchstens $i-1$ Treffer in k Versuchen Beachte i-ter Treffer: Weitere sind möglich.

Wartezeiten in einer Bernoulli-Kette

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dem ersten Erfolg genau k Misserfolge vorausgehen?

2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint der erste Erfolg beim k-ten Versuch oder noch später?

3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dem 2. Erfolg genau k Versuche vorausgehen?

4. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dem m-ten Erfolg genau k Versuche vorausgehen?

5. Ein Laplace-Würfel werde solange geworfen, bis die zweite 6 erscheint. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dies

   a) beim 12. Wurf geschieht,

   b) frühestens beim 12. Wurf geschieht,

   c) spätestens beim 12. Wurf geschieht?

Wartezeiten in einer Bernoulli-Kette

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dem ersten Erfolg genau k Misserfolge vorausgehen? $$P_p^k(X=0)\cdot p=(1-p)^k\cdot p$$

2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint der erste Erfolg beim k-ten Versuch oder noch später? $$P_p^{k-1}(X=0)=(1-p)^{k-1}$$

3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dem 2. Erfolg genau k Versuche vorausgehen? $$P_p^k(X=1)\cdot p=k\cdot p\cdot(1-p)^{k-1}\cdot p$$

4. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dem m-ten Erfolg genau k Versuche vorausgehen? $$P_p^k(X=m-1)\cdot p=\binom{k}{m-1}p^{m-1}\cdot(1-p)^{k-(m-1)}\cdot p$$

5. Ein Laplace-Würfel werde solange geworfen, bis die zweite 6 erscheint. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dies

   a) beim 12. Wurf geschieht, $$P_{1/6}^{11}(X=1)\cdot\frac{1}{6}=11\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{10}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=4{,}9\,\%$$

   b) frühestens beim 12. Wurf geschieht, $$P_{1/6}^{11}(X\le 1)=43{,}1\,\%$$

   c) spätestens beim 12. Wurf geschieht? $$1-P_{1/6}^{12}(X\le 1)=61{,}9\,\%$$

Beim zehnmaligen Losen ist die Wahrscheinlichkeit mindestens einmal zu gewinnen mindestens $40\,\%$. Wie groß muss die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn beim Losen mindestens sein?

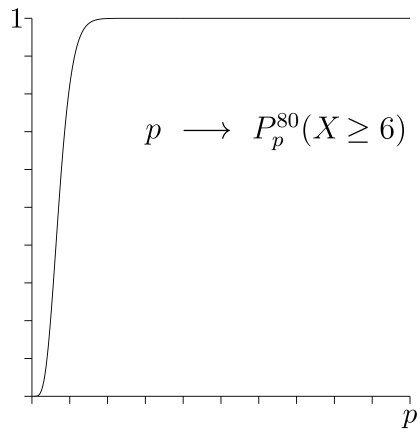
Beim zehnmaligen Losen ist die Wahrscheinlichkeit mindestens einmal zu gewinnen mindestens 40 %. Wie groß muss die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn beim Losen mindestens sein?

$$\begin{aligned} P_p^{10}(X \geq 1) &\geq 0{,}4 \\ 1 - q^{10} &\geq 0{,}4 \\ &\dots \\ p &\geq 0{,}05 \end{aligned}$$

1. Ein Hersteller von Flaschen behauptet, dass höchstens 5 % der Flaschen Farbveränderungen aufweisen. Ein Händler kontrolliert eine Flaschenlieferung mit einer Stichprobe vom Umfang 80 (klein gegenüber der Anzahl der Flaschen in der Lieferung).

   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit (höchstens) haben sechs und mehr Flaschen Farbveränderungen?

   b) Erläutern Sie die Grafik.



   c) Laut Liefervertrag dürfen Lieferungen zurückgewiesen werden, in deren Stichprobe sich mindestens k Flaschen mit Farbveränderungen befinden. Das k ist so zu wählen, dass höchstens 5 % der Lieferungen ungerechtfertigt zurückgewiesen werden können. Ermitteln Sie k.

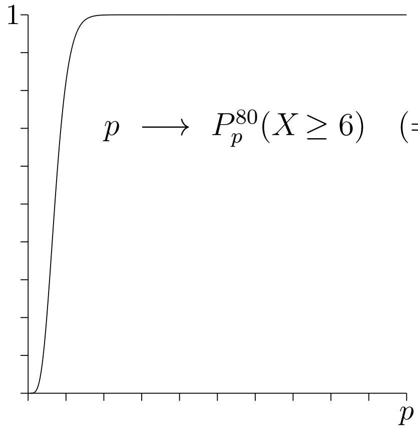
2. Eine Glühlampe, die zufällig der Produktion entnommen wird, leuchtet einwandfrei mit der unbekannten Wahrscheinlichkeit p. Jemand entnimmt zufällig 40 Glühlampen. Mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % sollen mindestens 38 Glühlampen dieser Stichprobe einwandfrei sein.
   Wie groß muss die Wahrscheinlichkeit p mindestens sein?

3. Ein Zahnarzt weiß, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einem Patienten Karies zu diagnostizieren, etwa 0,8 beträgt. Wie viele Karteikarten muss man der Patientenkartei zufällig entnehmen, wenn dabei mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % drei oder mehr Patienten mit Kariesbefund sein sollen?

1. Ein Hersteller von Flaschen behauptet, dass höchstens 5 % der Flaschen Farbveränderungen aufweisen. Ein Händler kontrolliert eine Flaschenlieferung mit einer Stichprobe vom Umfang 80 (klein gegenüber der Anzahl der Flaschen in der Lieferung).

   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit (höchstens) haben sechs und mehr Flaschen Farbveränderungen? $P_p^{80}(X \geq 6) = 21{,}1\,\%$

   b) Erläutern Sie die Grafik.



Jedem p wird die Wahrscheinlichkeit $P_p^{80}(X \geq 6)$ zugeordnet.

Der Graph steigt steil an, für $p = 0{,}1$ ist die Wahrscheinlichkeit bereits $p = 0{,}8$.

...

   c) Laut Liefervertrag dürfen Lieferungen zurückgewiesen werden, in deren Stichprobe sich mindestens k Flaschen mit Farbveränderungen befinden. Das k ist so zu wählen, dass höchstens 5 % der Lieferungen ungerechtfertigt zurückgewiesen werden können. Ermitteln Sie k.

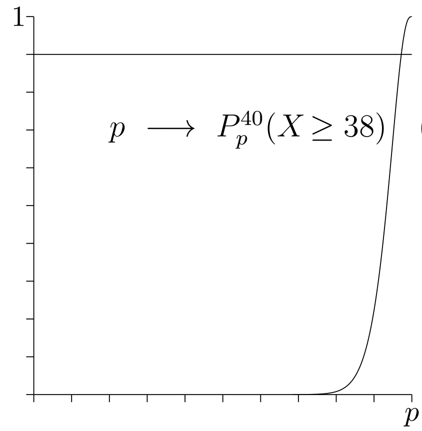
minimales k mit $P_{0{,}05}^{80}(X \geq k) \leq 5\,\%$, $k = 8$ (tabellarisch)

Y1 = 1 − binomcdf(80, 0.05, X−1)

X	Y1
7	.105
8	.047

2. Eine Glühlampe, die zufällig der Produktion entnommen wird, leuchtet einwandfrei mit der unbekannten Wahrscheinlichkeit p. Jemand entnimmt zufällig 40 Glühlampen. Mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % sollen mindestens 38 Glühlampen dieser Stichprobe einwandfrei sein.
   Wie groß muss die Wahrscheinlichkeit p mindestens sein?

minimales p mit $P_p^{40}(X \geq 38) \geq 90\,\%$, mindestens $p = 97{,}2\,\%$ (grafisch)

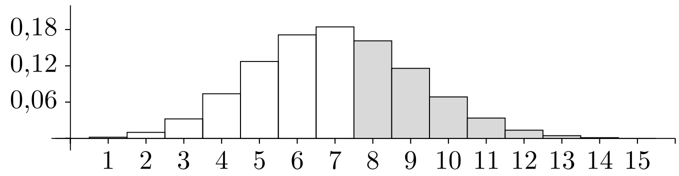


3. Ein Zahnarzt weiß, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einem Patienten Karies zu diagnostizieren, etwa 0,8 beträgt. Wie viele Karteikarten muss man der Patientenkartei mindestens zufällig entnehmen, wenn dabei mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % drei oder mehr Patienten mit Kariesbefund sein sollen?

minimales n mit $P^n_{0,8}(X \geq 3) \geq 95\,\%$, mindestens $n = 6$ (tabellarisch)

Y1 = 1 − binomcdf(X, 0.8, 2)

X	Y1
5	.942
6	.983

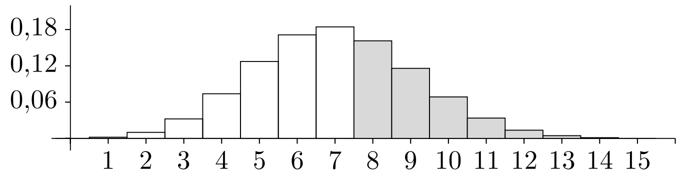


Die Abbildung zeigt das Histogramm der Binomialverteilung mit den Parametern $n = 20$ und $p = 0{,}35$.
Entscheiden Sie für jede der drei Sachsituationen, ob die Situation durch diese Verteilung modelliert werden kann und der grau gefärbte Bereich zu der Frage passt.

a) Aus Erfahrung weiß der Küchenchef, dass 35 % der Besucher einer Kantine Menü II wählen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird bei den ersten 20 Gästen 8-mal Menü II verkauft?

b) In einem Stoffbeutel mit 100 Schokoladenkugeln sind 35 mit Nougatfüllung. Auf einem Kindergeburtstag sind 20 Kinder. Nach einem Spiel darf jedes Kind der Reihe nach ohne hinzusehen eine Kugel ziehen (und aufessen). Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden mindestens 8 Nougatkugeln gezogen?

c) Peter spielt oft Darts. Er trifft den innersten Kreis der Scheibe mit einer Wahrscheinlichkeit von 35 %. Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er diesen bei 20 Würfen mindestens 8-mal?



Die Abbildung zeigt das Histogramm der Binomialverteilung mit den Parametern $n = 20$ und $p = 0{,}35$.
Entscheiden Sie für jede der drei Sachsituationen, ob die Situation durch diese Verteilung modelliert werden kann und der grau gefärbte Bereich zu der Frage passt.

a) Aus Erfahrung weiß der Küchenchef, dass 35 % der Besucher einer Kantine Menü II wählen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird bei den ersten 20 Gästen 8-mal Menü II verkauft?

Für eine Binomialverteilung ist $P_{0,35}^{20}(X = 8)$ zu ermitteln, im Diagramm wird $P_{0,35}^{20}(X \geq 8)$ veranschaulicht.

b) In einem Stoffbeutel mit 100 Schokoladenkugeln sind 35 mit Nougatfüllung. Auf einem Kindergeburtstag sind 20 Kinder. Nach einem Spiel darf jedes Kind der Reihe nach ohne hinzusehen eine Kugel ziehen (und aufessen). Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden mindestens 8 Nougatkugeln gezogen?

Es liegt eine hypergeometrische Verteilung vor, Ziehen ohne Zurücklegen. Jedoch kann eine hypergeometrische Verteilung durch eine Binomialverteilung approximiert werden, $P = 0{,}515$ hypergeometrisch, $P = 0{,}511$ binomial.

c) Peter spielt oft Darts. Er trifft den innersten Kreis der Scheibe mit einer Wahrscheinlichkeit von 35 %. Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er diesen bei 20 Würfen mindestens 8-mal?

Für eine Binomialverteilung ist $P_{0,35}^{20}(X \geq 8)$ zu ermitteln, das wird im Diagramm veranschaulicht.

Student A muss einen medizinischen Test mit 80 ja/nein-Fragen bestehen.
Hierfür sind mindestens 60 % richtig zu beantworten.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er es ausschließlich durch Raten schafft?

b) Wie wären seine Chancen, wenn er ein wenig lernen würde,
so dass er in mindestens 65 % der Fälle richtig läge?

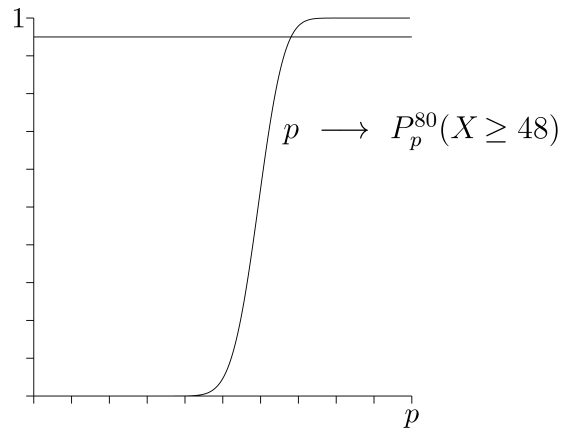
c) Wie groß müsste seine Trefferquote mindestens sein,
damit er mit mindestens 95 %iger Wahrscheinlichkeit den Test besteht?

Student A muss einen medizinischen Test mit 80 ja/nein-Fragen bestehen.
Hierfür sind mindestens 60 % richtig zu beantworten.

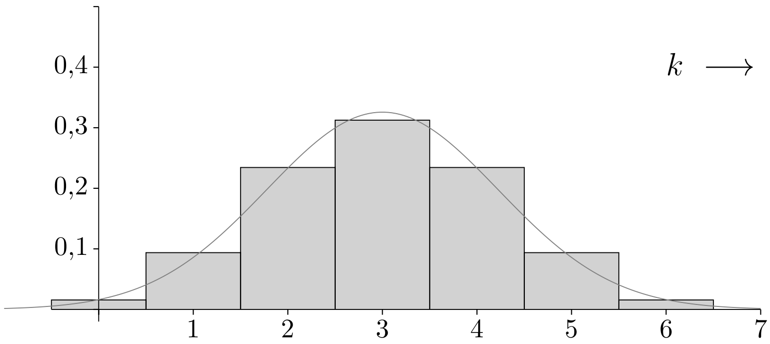
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er es ausschließlich durch Raten schafft? 4,6 %

b) Wie wären seine Chancen, wenn er ein wenig lernen würde,
so dass er in mindestens 65 % der Fälle richtig läge? 85,4 %

c) Wie groß müsste seine Trefferquote mindestens sein,
damit er mit mindestens 95 %iger Wahrscheinlichkeit den Test besteht? 68,1 %



Histogramm/Stabdiagramm

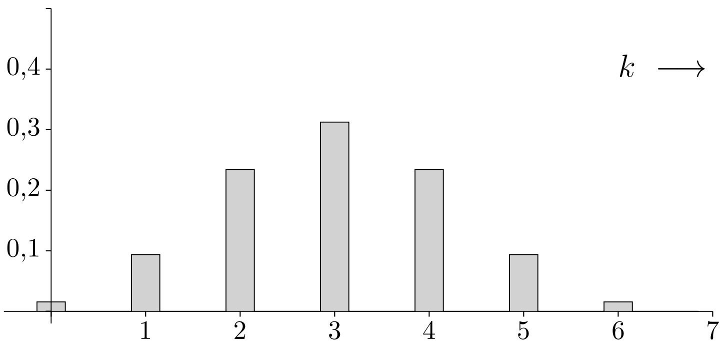


$k \longrightarrow P(X=k) = \text{binompdf(n, p, k)}$

$n = 6$

$p = \frac{1}{2}$

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer binomialverteilten Zufallsvariablen kann mit einem Histogramm veranschaulicht werden. Die Rechtecke liegen direkt nebeneinander. Diese grafische Darstellung eignet sich z. B. für Messdaten, für die eine Klasseneinteilung vorgenommen wurde. Der Übergang zur Normalverteilung erscheint naheliegend.



$k \longrightarrow P(X=k) = \text{binompdf(n, p, k)}$

$n = 6$

$p = \frac{1}{2}$

Ein Stab- bzw. Säulendiagramm für eine binomialverteilte Zufallsvariable hebt hervor, dass es sich um eine diskrete Zufallsvariable handelt. Im Gegensatz zur stetigen Zufallsvariablen werden nur endlich viele Werte angenommen. Die Stabbreite ist bedeutungslos.