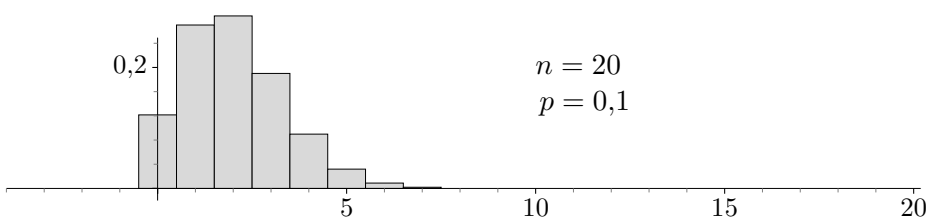
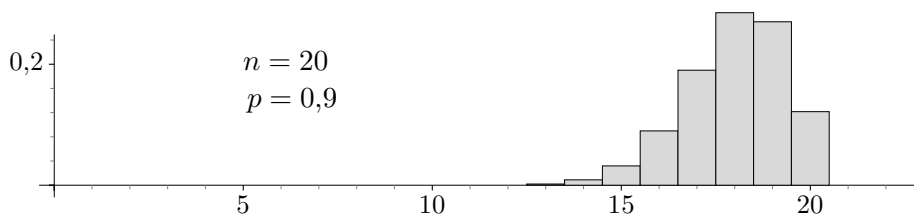
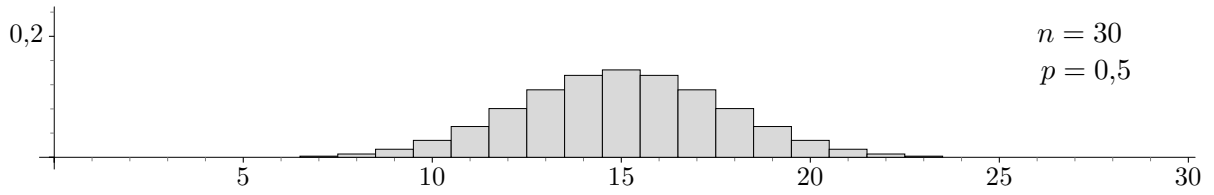
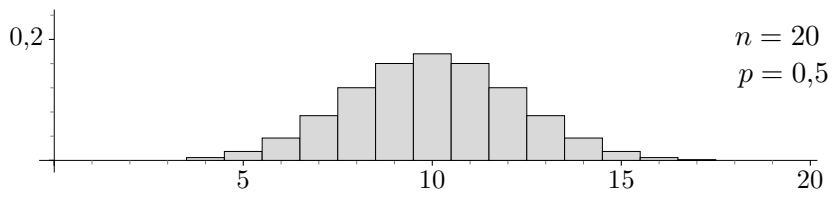
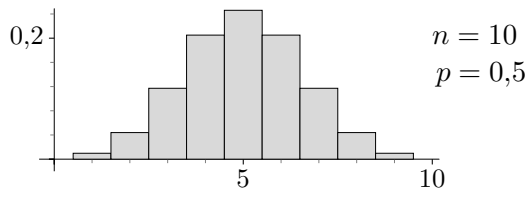
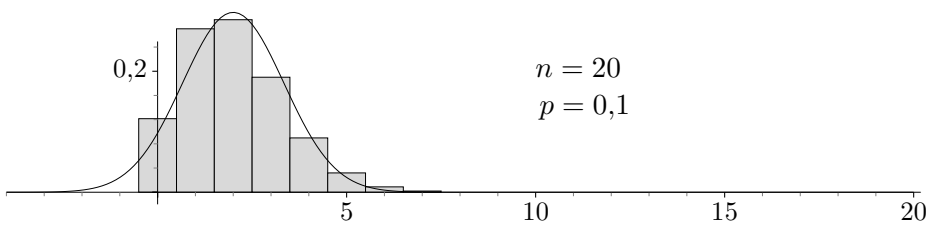
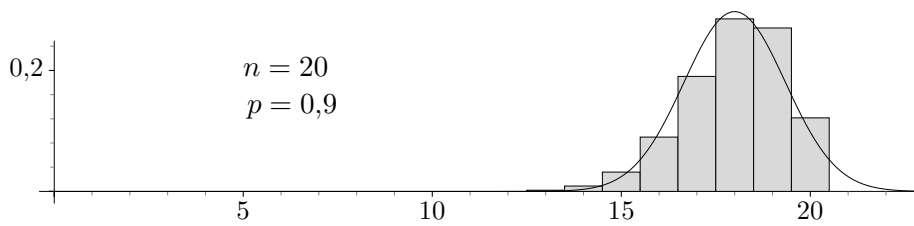
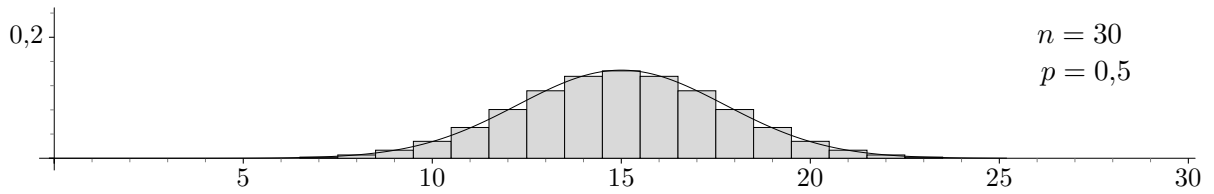
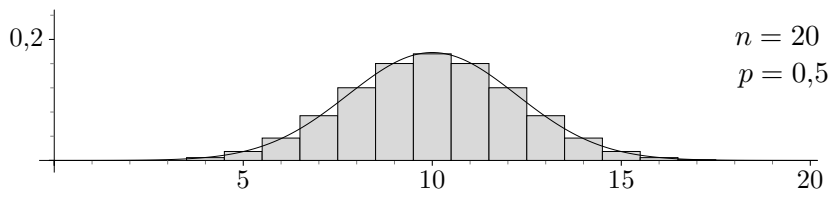
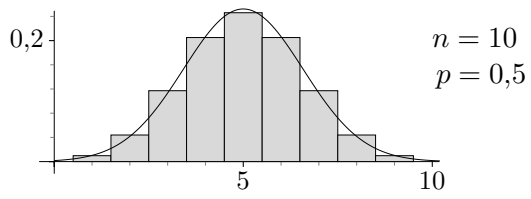


Histogramm einer Binomialverteilung

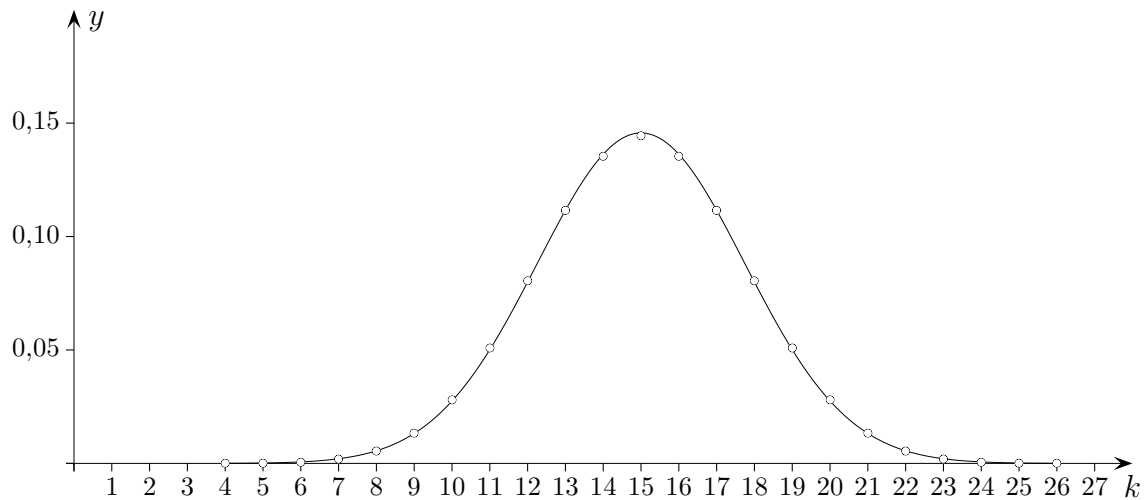


Normalverteilung

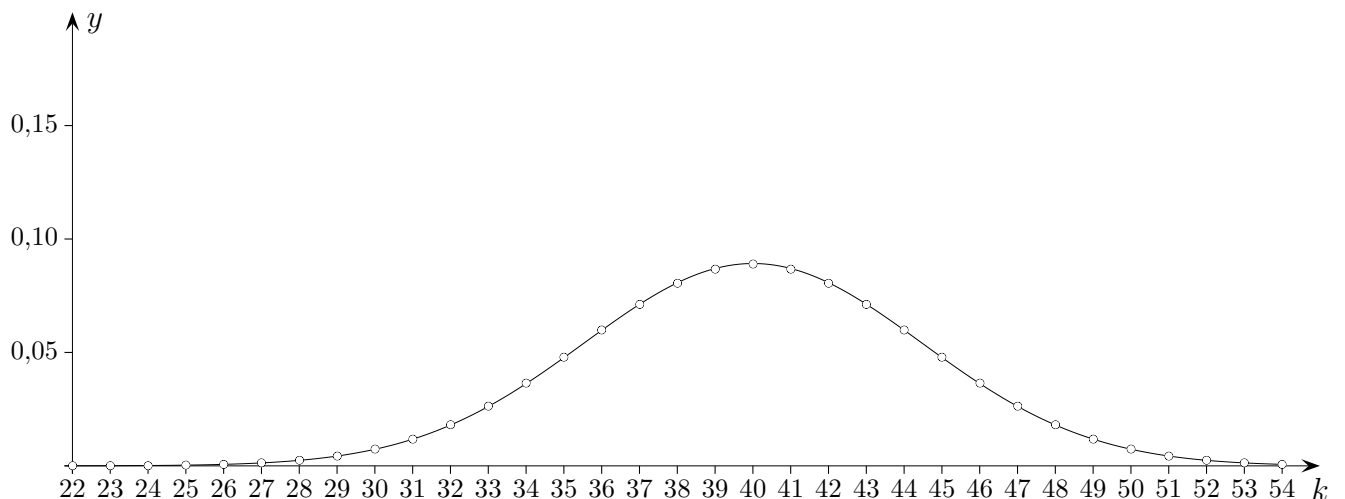


Binomialkoeffizienten

Die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}$ sind (bei festem n) für die Form der Histogramme bestimmend.



In der 1. Grafik sind alle Binomialkoeffizienten für $n = 30$ dargestellt. Sie wurden durch ihre Summe dividiert. Überdies enthält die Grafik die Ausgleichskurve.



So verlaufen die Binomialkoeffizienten, dividiert durch ihre Summe, für $n = 80$.

Binomialkoeffizienten

Aus

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{n} b^n \quad \text{folgt mit } a = b = 1$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n \quad \begin{array}{l} (= \text{Anzahl aller Teilmengen einer } n\text{-elementigen Menge} \\ \text{oder Anzahl aller 0/1-Folgen der Länge } n. \\ \text{Dies ist auch direkt einsehbar mit:} \\ \text{Element enthalten 1, nicht enthalten 0.}) \end{array}$$

Die Binomialkoeffizienten wurden durch ihre Summe, also 2^n , dividiert.

Für eine Bernoulli-Kette der Länge n gilt:

$$P(k \text{ Treffer}) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \quad q = 1 - p$$

und für $p = \frac{1}{2}$ dann

$$P(k \text{ Treffer}) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Nun ist zu erkennen, dass die Grafen und die Histogramme einer Bernoulli-Kette für $p = \frac{1}{2}$ (entsprechendes n) sich nur in der Art der Darstellung unterscheiden.

1730 gelang es de Moivre, die Ausgleichskurve zu ermitteln,

$$P_{1/2}^n(X = k) = \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{2^n} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot \frac{n}{2}}} \cdot e^{-\frac{2}{n} \left(k - \frac{n}{2}\right)^2}$$

Laplace konnte 1812 das Ergebnis verallgemeinern:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad \text{mit } \mu = n \cdot p, \quad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$$