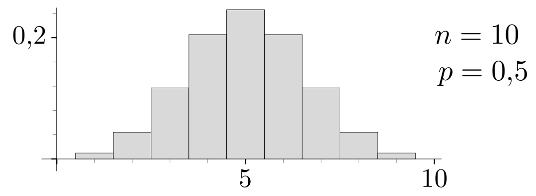
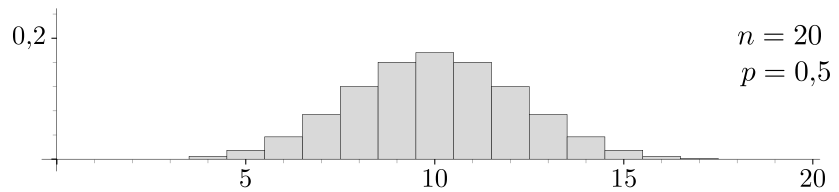
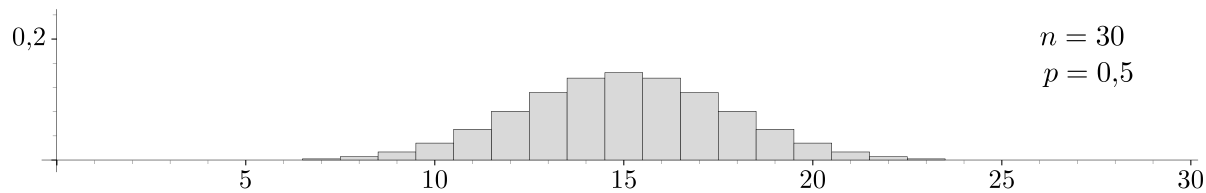
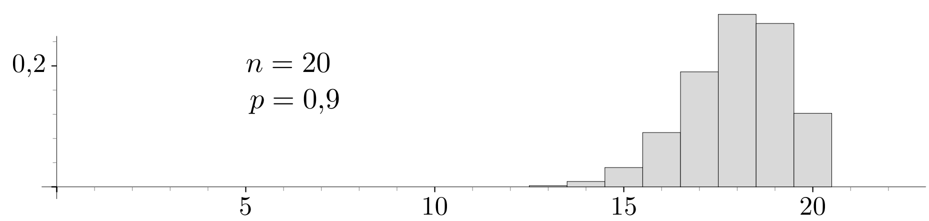
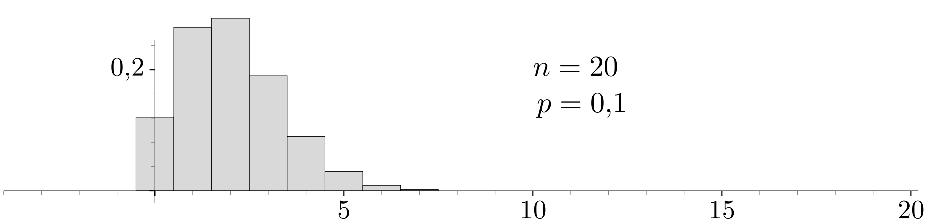
Histogramm einer Binomialverteilung





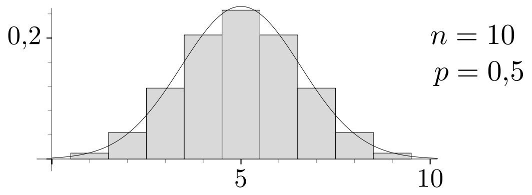


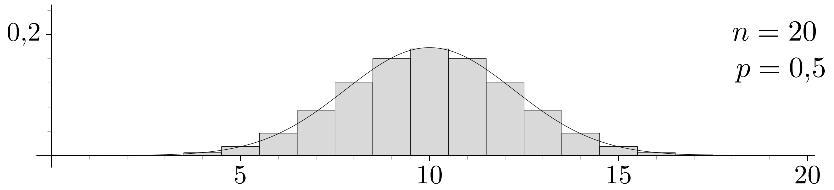


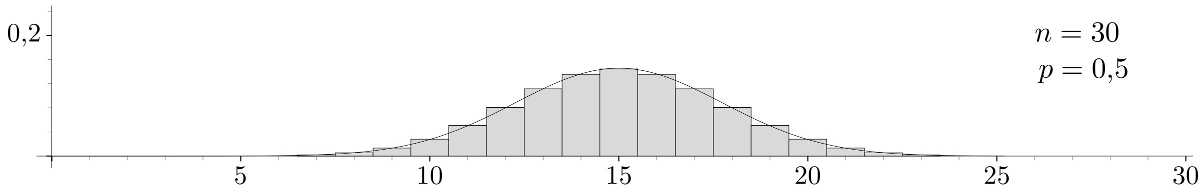


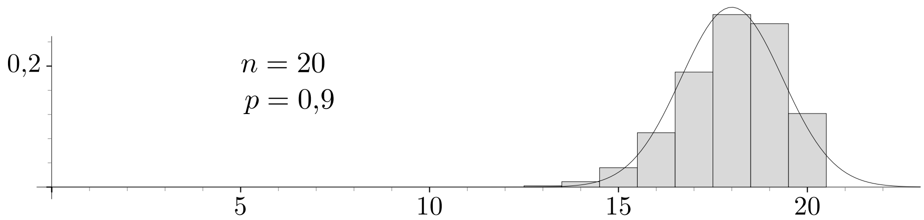
© Roolfs

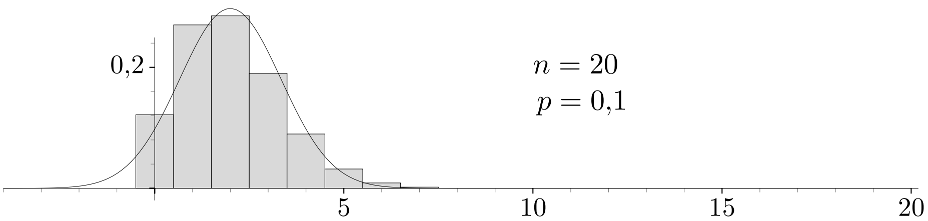
Normalverteilung







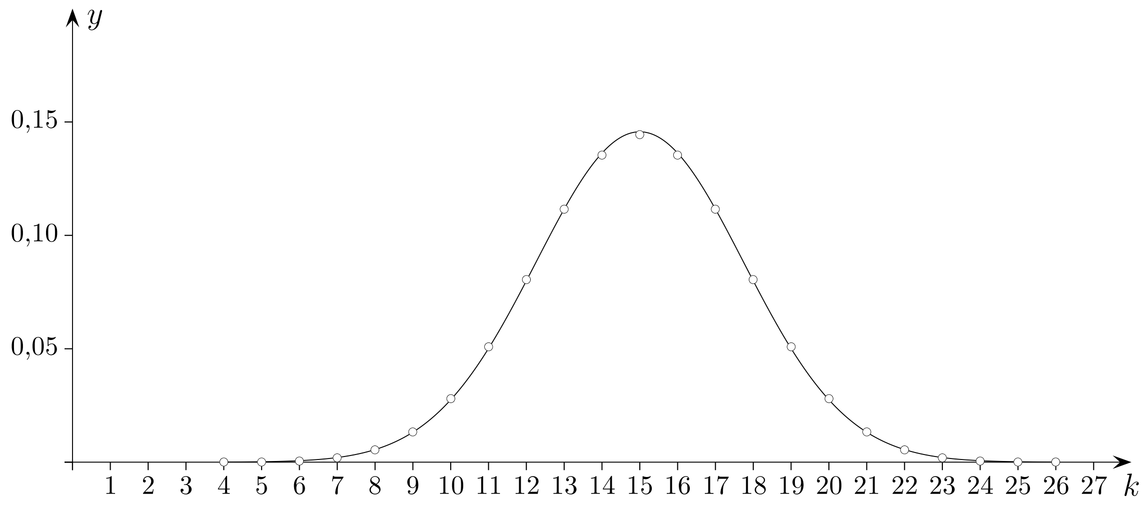




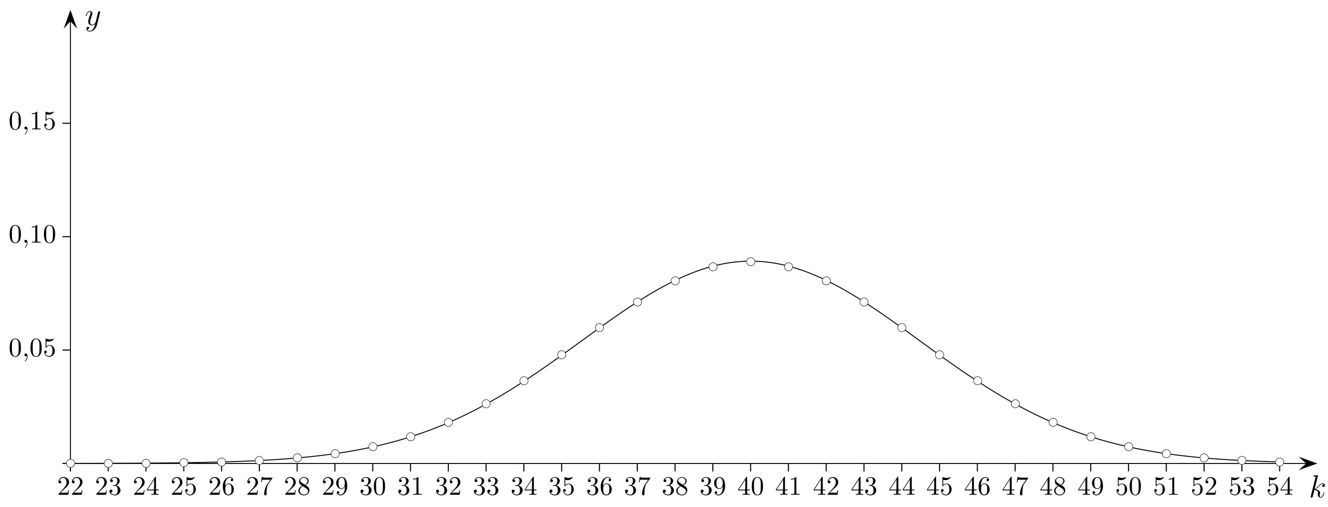
Binomialkoeffizienten

Die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ \dots\ , \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}$

sind (bei festem n) für die Form der Histogramme bestimmend.



In der 1. Grafik sind alle Binomialkoeffizienten für $n = 30$ dargestellt.
Sie wurden durch ihre Summe dividiert. Überdies enthält die Grafik die Ausgleichskurve.



So verlaufen die Binomialkoeffizienten, dividiert durch ihre Summe, für $n = 80$.

© Roolfs

Binomialkoeffizienten

Aus

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{n}b^n \qquad \text{folgt mit} \quad a = b = 1$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

(= Anzahl aller Teilmengen einer n-elementigen Menge
oder Anzahl aller 0/1-Folgen der Länge n.
Dies ist auch direkt einsehbar mit:
Element enthalten 1, nicht enthalten 0.)

Die Binomialkoeffizienten wurden durch ihre Summe, also 2^n, dividiert.

Für eine Bernoulli-Kette der Länge n gilt:

$$P(k \text{ Treffer}) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \quad q = 1 - p$$

und für $p = \frac{1}{2}$ dann

$$P(k \text{ Treffer}) = \binom{n}{k}\left(\tfrac{1}{2}\right)^n$$

Nun ist zu erkennen, dass die Grafen und die Histogramme einer Bernoulli-Kette für $p = \frac{1}{2}$ (entsprechendes n) sich nur in der Art der Darstellung unterscheiden.

1730 gelang es de Moivre, die Ausgleichskurve zu ermitteln,

$$P^n_{1/2}(X = k) = \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{2^n} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot \frac{n}{2}}} \cdot e^{-\frac{2}{n}\left(k - \frac{2}{n}\right)^2}$$

Laplace konnte 1812 das Ergebnis verallgemeinern:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad \text{mit} \;\; \mu = n \cdot p, \;\; \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$$

© Roolfs