

Binomialkoeffizient

Für ein Experiment werden 3 von 5 Tieren ausgewählt.

Auf wie viele Arten kann diese Auswahl erfolgen?

Erinnern wir uns an ein entsprechendes Problem: Wenn für 5 Autos nur 3 Parkplätze zur Verfügung stehen, haben wir $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ Möglichkeiten gefunden. Jedoch ist die Analogie nicht vollkommen. Im Parkproblem waren die 3 Parkplätze unterscheidbar. In unserem Problem ist die Reihenfolge, in der wir die Tiere anordnen, irrelevant. Bezeichnen wir die 3 geparkten Wagen mit a , b und c ; dann unterscheiden wir zwischen den Anordnungen (a, b, c) , (a, c, b) , (b, a, c) , (b, c, a) , (c, a, b) , (c, b, a) . Unabhängig von der anfänglichen Auswahl der 3 Wagen zählen wir jede Auswahl sechsfach. Wenn wir umgekehrt nicht an der Reihenfolge der Autos (oder Tiere) interessiert sind, müssen wir 60 durch 6 dividieren.

Die gleiche Überlegung kann zur Herleitung eines allgemeinen Resultats verwendet werden.

Auf wie viele Arten können wir aus n Kugeln k auswählen?

Wenn die Reihenfolge von Bedeutung ist, wird das Resultat durch $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$ angegeben, andernfalls müssen wir die $k!$ Permutationen der k ausgewählten Kugeln rückgängig machen, d.h. wir fassen jeweils $k!$ Permutationen zu einer Teilmenge zusammen. Für die ungeordnete Auswahl gibt es also

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} \quad \text{Möglichkeiten.}$$

Dieser Term (Binomialkoeffizient) wird gewöhnlich mit $\binom{n}{k}$ abgekürzt. Man liest "n über k".

Bei einer Urne mit n nummerierten Kugeln gibt es $\binom{n}{k}$ ungeordnete Stichproben vom Umfang k (k -elementige Teilmengen).

Auf wie viele Arten können 3 von 5 Tieren ausgewählt werden?

Lösung:

$$\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$$

Die Menge der Tiere sei $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$

Dann gibt es die 10 Möglichkeiten:

$$\begin{array}{cccccc} \{a, b, c\} & \{a, b, d\} & \{a, b, e\} & \{a, c, d\} & \{a, c, e\} \\ \{a, d, e\} & \{b, c, d\} & \{b, c, e\} & \{b, d, e\} & \{c, d, e\} \end{array}$$

- In einem Käfig sind 20 mit den Nummern 1 bis 20 versehene Mäuse. 5 Mäuse werden zufällig ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für
 - eine ganz bestimmte Auswahl,
 - eine Auswahl von Mäusen, deren Nummern nicht größer als 10 sind?
- Ein Test besteht aus 6 Fragen. Zu jeder Frage sind 4 Antworten vorgegeben, von denen genau eine richtig ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit rät man zufällig 6 richtige Antworten?
- Vor einem Entscheidungsrennen lassen sich die 8 teilnehmenden Skiläufer fotografieren. Auf einer Aufnahme sind immer 3 Läufer. Wie viele Bilder müssen mindestens gemacht werden, um garantiert die späteren drei Sieger auf einem Bild zu haben?
- Bei einer Tombola gibt es unter 100 Losen 4 Gewinne. Der erste Käufer erwirbt 10 Lose. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist mindestens ein Gewinnlos dabei?
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, beim Lotto "6 aus 49" mit einer Tippreihe
 - genau 4 Richtige,
 - mindestens 4 Richtige zu haben.

Binomialkoeffizient Aufgaben Lösungen

1. In einem Käfig sind 20 mit den Nummern 1 bis 20 versehene Mäuse. 5 Mäuse werden zufällig ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für

a) eine ganz bestimmte Auswahl, $\frac{1}{\binom{20}{5}}$

b) eine Auswahl von Mäusen, deren Nummern nicht größer als 10 sind? $\frac{\binom{10}{5}}{\binom{20}{5}} = 1,6\%$

2. Ein Test besteht aus 6 Fragen. Zu jeder Frage sind 4 Antworten vorgegeben, von denen genau eine richtig ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit rät man zufällig 6 richtige Antworten?

$$\frac{1}{4^6}$$

3. Vor einem Entscheidungsrennen lassen sich die 8 teilnehmenden Skiläufer fotografieren. Auf einer Aufnahme sind immer 3 Läufer. Wie viele Bilder müssen mindestens gemacht werden, um garantiert die späteren drei Sieger auf einem Bild zu haben?

$$\binom{8}{3}$$

4. Bei einer Tombola gibt es unter 100 Losen 4 Gewinne. Der erste Käufer erwirbt 10 Lose. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist mindestens ein Gewinnlos dabei?

$$1 - \frac{\binom{96}{10}}{\binom{100}{10}} = 34,8\%$$

5. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, beim Lotto "6 aus 49" mit einer Tippreihe

a) genau 4 Richtige, $\frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} = 0,000969$

b) mindestens 4 Richtige zu haben.

$$\frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} + \frac{\binom{6}{5} \cdot \binom{43}{1}}{\binom{49}{6}} + \frac{\binom{6}{6} \cdot \binom{43}{0}}{\binom{49}{6}} =$$

$$\frac{13545}{13983816} + \frac{258}{13983816} + \frac{1}{13983816} = 0,001$$