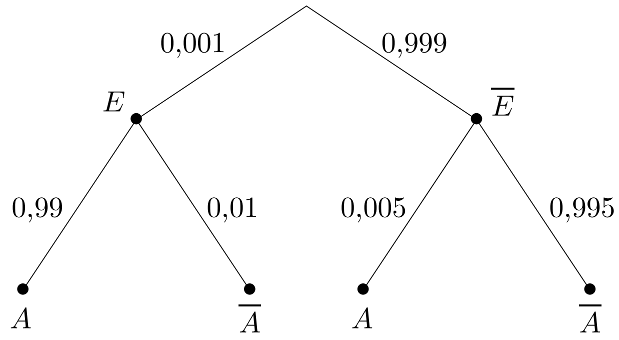
Bedingte Wahrscheinlichkeit

In einem Laden ist eine Alarmanlage eingebaut. Bei Einbruch gibt sie mit 99 %-iger Wahrscheinlichkeit Alarm. Wenn in einer bestimmten Nacht kein Einbruch stattfindet, gibt sie falschen Alarm mit Wahrscheinlichkeit 0,005 (Eine Maus berührt die Anlage oder ähnliches). Die Einbruchswahrscheinlichkeit für eine Nacht sei 0,001. Die Anlage hat gerade Alarm gegeben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass gerade ein Einbruch stattfindet?

Wir stellen den zugehörigen Baum auf:

Es bedeuten:

E	Einbruch
$\overline{E}$	kein Einbruch
A	Alarm
$\overline{A}$	kein Alarm



Die Menge aller Elementarereignisse beinhaltet alle Pfade.

$\Omega \;=\; \{\,(E,\overline{A});\; (E,A);\; (\overline{E},A);\; (\overline{E},\overline{A})\,\}$

Da wir aber davon ausgehen, dass ein Alarm vorliegt, sind nur die Pfade (E, A) und $(\overline{E}, A)$ zu berücksichtigen. Um die Wahrscheinlichkeit für einen Einbruch zu bestimmen, falls Alarm vorliegt, müssen wir uns fragen, wie groß bei n-maliger Wiederholung des Versuchs die Anzahl des Pfads (E, A) im Verhältnis zur Summe der Anzahlen der Pfade (E, A) und $(\overline{E}, A)$ ist.

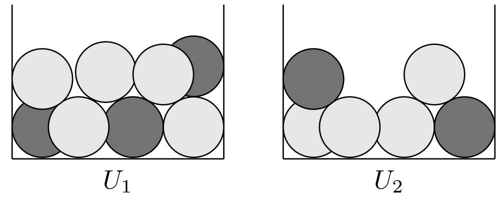
Die Pfade (E, A) und $(\overline{E}, A)$ werden mit der Häufigkeit $0{,}001 \cdot 0{,}99n + 0{,}999 \cdot 0{,}005n$ eingeschlagen, der Pfad (E, A) nur $0{,}001 \cdot 0{,}99n$ mal.

Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich $\quad P \;=\; \dfrac{0{,}001 \cdot 0{,}99}{0{,}001 \cdot 0{,}99 + 0{,}999 \cdot 0{,}005} \;=\; 0{,}1654$ (n gekürzt)

Diese Wahrscheinlichkeit heißt *bedingte Wahrscheinlichkeit von E unter der Bedingung A,*
wir schreiben hierfür: $P(E \mid A)$.

1. Ein Angler pflegt sonntagsmorgens einen von drei Seen A, B und C zufällig auszuwählen, um eine Stunde zu angeln. Die Wahrscheinlichkeit, dass er etwas fängt, beträgt bei A $2/3$, bei B $3/4$ und bei C $4/5$. In der Nähe des Sees B ist eine Gastwirtschaft mit einer attraktiven Wirtin. Darum sieht es die Ehefrau des Anglers nicht gern, wenn er in diesem See angelt. Eines Sonntagsmorgen ruft der Angler seine Frau an und berichtet, dass er etwas gefangen hat. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er in B geangelt hat?

2. Eine der Urnen U_1, U_2 wird ausgelost und aus der gewählten Urne wird eine Kugel gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel zu ziehen? Angenommen, eine gezogene Kugel ist schwarz. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt sie aus U_1?



3. Angenommen, es gibt einen sehr zuverlässigen Test zur Krebsdiagnose. Dieser Test ist mit 96 %-Sicherheit positiv, falls eine Krebserkrankung vorliegt; falls keine vorliegt, ist der Test mit 94 %-Sicherheit negativ. Ich unterziehe mich dem Test und der Test ist positiv. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ich Krebs habe (1/145 aller Personen meines Alters haben Krebs)?

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Medizinische Tests sind grundsätzlich mit zwei Fehlern behaftet:

1. Erkrankte werden als gesund,
2. Gesunde als krank eingestuft.

Der 1. Fehler wird üblicherweise (nicht nur von Test-Entwicklern) in der Angabe versteckt, dass der Test z. B. mit 80 %-iger Sicherheit die Krankheit bei Erkrankten erkennt. Bei Gesunden versagt der Test z. B. mit 2 %-iger Wahrscheinlichkeit, d. h. 2 % der Gesunden werden vom Test irrtümlich als krank eingestuft.

Von besonderer Bedeutung ist nun die Frage:

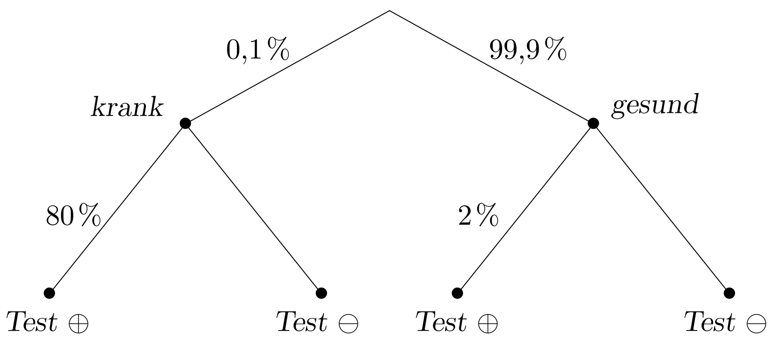
Angenommen, eine Person wird getestet und das Ergebnis ist positiv (das ist eine etwas gewöhnungsbedürftige Sprechweise, dass der Test auf eine Krankheit hinweist, wenn z. B. ein Virus entdeckt wurde). Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die getestete Person nun tatsächlich erkrankt?

Um diese Frage beantworten zu können, ist es erforderlich zu wissen, wie groß der Anteil der Erkrankten in der Bevölkerung ist. Nehmen wir daher an, es seien 0,1 %, die erkrankt sind.

Um uns die Situation vor Augen zu führen, betrachten wir statt relativer Häufigkeiten konkrete Anzahlen und gehen daher von einer Bevölkerungszahl von 100 000 aus. Die absoluten Häufigkeiten können übersichtlich in eine Vier-Felder-Tafel eingetragen werden.

	krank	*gesund*	
Test ⊕	80	1998	2078
Test ⊖	20	97 902	97 922
	100	99 900	100 000

Der Anteil der Erkrankten unter den Test-Positiven beträgt lediglich: $\frac{80}{2078} = 3{,}8\,\%$.



Mit dem Pfaddiagramm ergibt sich: $P(krank \mid \oplus) = \dfrac{0{,}1\,\% \cdot 80\,\%}{0{,}1\,\% \cdot 80\,\% \; + \; 99{,}9\,\% \cdot 2\,\%} = 3{,}8\,\%$

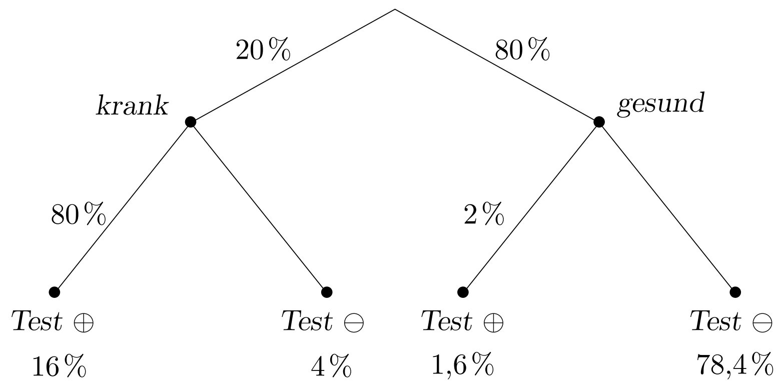
Bedingte Wahrscheinlichkeit

Nehmen wir an, dass die zu testende Person einer Risikogruppe angehört (z. B. wegen ungesunder Ernährung, Alter über 50), in der die Wahrscheinlichkeit zu erkranken 20 % (15 %, 10 %, 5 %, 1 %) beträgt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die getestete Person nun tatsächlich erkrankt, falls das Testergebnis positiv ist?

Für eine Gruppengröße von 500 ergibt dies:

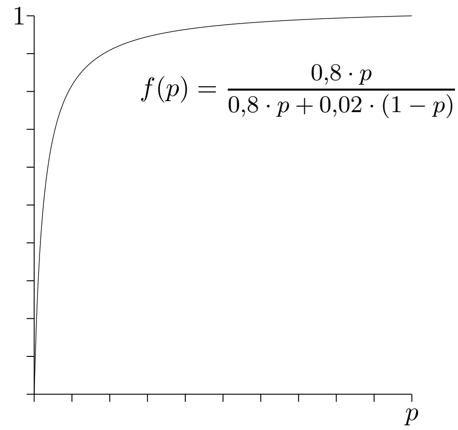
	krank	*gesund*	
Test $\oplus$	80	8	88
Test $\ominus$	20	392	412
	100	400	500

Der Anteil der Erkrankten unter den Test-Positiven erhöht sich auf: $\frac{80}{88} = 90{,}9\,\%$.



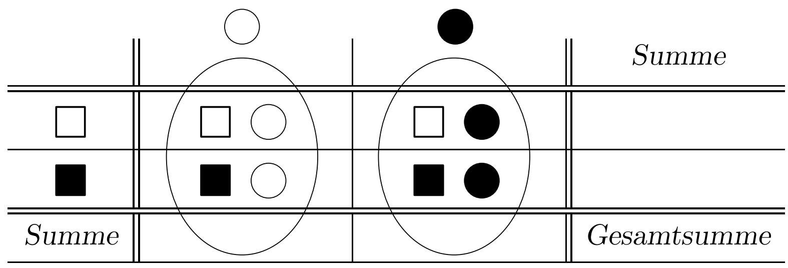
Mit dem Pfaddiagramm erhalten wir: $P(\mathit{krank} \mid \oplus) = \dfrac{20\,\% \cdot 80\,\%}{20\,\% \cdot 80\,\% \;+\; 80\,\% \cdot 2\,\%} = 90{,}9\,\%$

Interpretiere die Grafik:

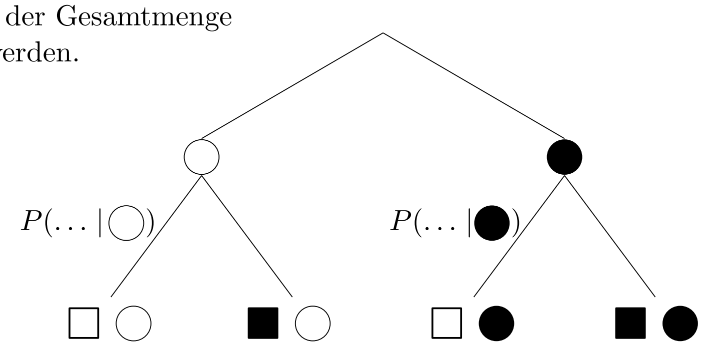


Baumdiagramm Umkehrung

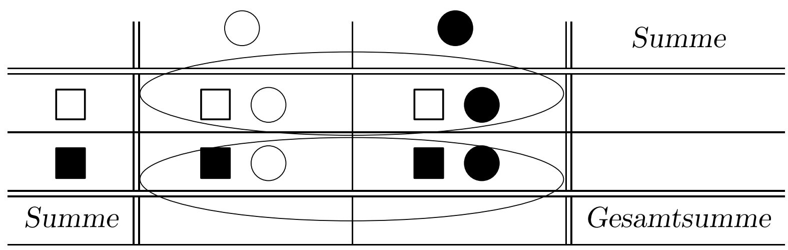
Bei 2 Merkmalen mit jeweils 2 Ausprägungen gibt es 4 Kombinationsmöglichkeiten für die absoluten bzw. relativen Häufigkeiten.



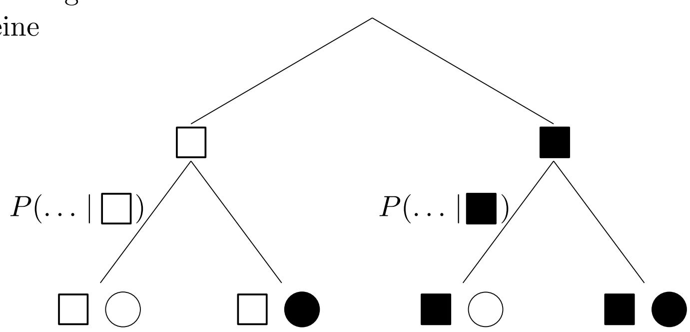
Mit einer Vier-Felder-Tafel können Anteile an der Gesamtmenge auf Anteile an einer Teilmenge umgerechnet werden.



Vorgegebene Anteile an einer bestimmten Ausprägungsmenge wie z. B. $P(\ldots \mid \bigcirc)$ können direkt in ein Baumdiagramm übernommen werden.



Bei der bedingten Wahrscheinlichkeit wird der Bezug zur Ausprägungsmenge gewechselt. Es erfolgt eine sogenannte Umkehrung des Baumdiagramms.



Ein Gymnasium hat einen 60 %igen Jungenanteil.
Unter den Schülerinnen rauchen 15 %, insgesamt rauchen von den Schülern und Schülerinnen 10 %.

a) Wie groß ist der Anteil rauchender Mädchen an der Schule?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine beliebig herausgegriffene

   i) rauchende Person weiblich,

   ii) rauchende Person männlich,

   iii) männliche Person ein Raucher?

a) 6 %

b) i) 60 %

   ii) 40 %

   iii) 6,7 %

In der Bundesrepublik wurden in den Jahren um 2000 jährlich etwa 480000 Rinder geschlachtet. Jährlich gab es 500 BSE-Fälle. Alle geschlachteten Rinder werden mit einem Schnelltest untersucht. Dieser Schnelltest identifiziert mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % die erkrankten Rinder korrekt, er gibt aber auch in 3 % der Fälle gesunde Rinder als BSE-erkrankt aus.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Rind, das positiv getestet wurde, auch wirklich krank ist.

b) Sei nun der Anteil p der an BSE erkrankten Rinder variabel.
Stellen Sie die Wahrscheinlichkeit $f(p)$, dass ein Rind, das positiv getestet wurde, auch wirklich krank ist, grafisch dar.

c) Ermitteln Sie p^* für $f(p^*) = 0{,}4$ und erläutern Sie dies im Sachzusammenhang.

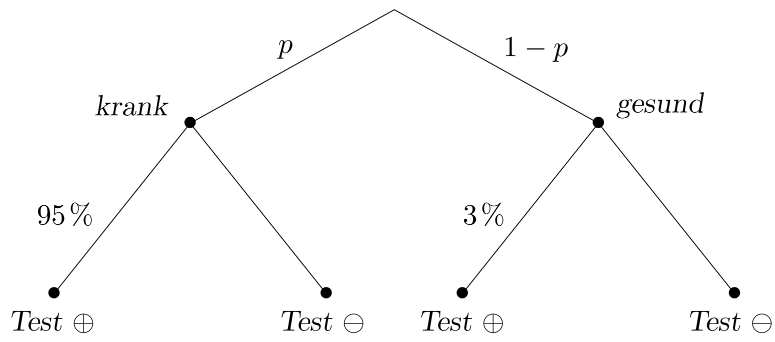
d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 10000 Rindern mit einem BSE-Anteil von $\frac{1}{960}$ höchstens 12 und mindestens 8 Krankheitsfälle vorliegen?

Ermitteln Sie (das größte) k, so dass gilt: $P(X \leq k) \leq 90\,\%$

In der Bundesrepublik wurden in den Jahren um 2000 jährlich etwa 480000 Rinder geschlachtet. Jährlich gab es 500 BSE-Fälle. Alle geschlachteten Rinder werden mit einem Schnelltest untersucht. Dieser Schnelltest identifiziert mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % die erkrankten Rinder korrekt, er gibt aber auch in 3 % der Fälle gesunde Rinder als BSE-erkrankt aus.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Rind, das positiv getestet wurde, auch wirklich krank ist.

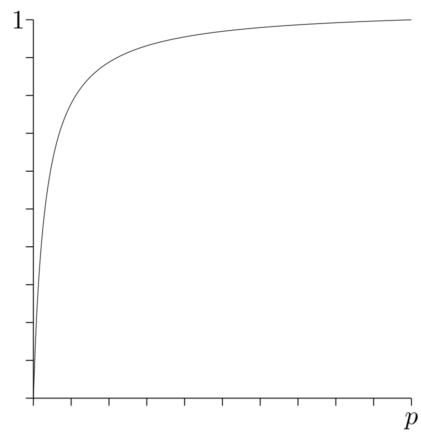
$$p = \frac{500}{480000} = \frac{1}{960}$$



$$P(krank \mid \oplus) = 3{,}2\,\%$$

b) Sei nun der Anteil p der an BSE erkrankten Rinder variabel.
Stellen Sie die Wahrscheinlichkeit $f(p)$, dass ein Rind, das positiv getestet wurde, auch wirklich krank ist, grafisch dar.

$$f(p) = \frac{0{,}95 \cdot p}{0{,}95 \cdot p + 0{,}03 \cdot (1-p)}$$



c) Ermitteln Sie p^* für $f(p^*) = 0{,}4$ und erläutern Sie dies im Sachzusammenhang. $p^* = 2{,}1\,\%$

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 10000 Rindern mit einem BSE-Anteil von $\frac{1}{960}$ höchstens 12 und mindestens 8 Krankheitsfälle vorliegen?

Binomialverteilung: $P(8 \le X \le 12) = 56{,}6\,\%$

Normalverteilung mit Stetigkeitskorrektur: $P(7{,}5 \le X \le 12{,}5) = 55{,}8\,\%$

Normalverteilung: $P(8 \le X \le 12) = 46{,}1\,\%$

Ermitteln Sie (das größte) k, so dass gilt: $P(X \le k) \le 90\,\%$ $k = 14(,5)$

Aufgaben

1. 16% der 6,63 Millionen Eintragungen im Verkehrssünder-Register in Flensburg haben den Grund Fahren unter Alkohol. 92% der Personen, die beim Fahren unter Alkohol ertappt wurden, waren Männer. Bei den übrigen Eintragungen beträgt der Anteil der Männer 80%.
   Wie groß ist der Anteil der Frauen unter den Verkehrssündern?

2. Bei einem Einstellungstermin für den Polizeidienst waren 40% der Bewerber Frauen, von denen 90% die Aufnahmeprüfung bestanden. Drei Viertel derjenigen, die scheiterten, waren männlich. Welcher Anteil der männlichen Teilnehmer hat die Aufnahmeprüfung bestanden (aus Abiturprüfung Bayern LK 2003)?

3. Auf dem Gebiet der Gemeinde Windstätt soll ein Windpark zur Stromerzeugung errichtet werden. Die Gegner des Projekts befürchten eine Beeinträchtigung des Fremdenverkehrs und sammeln Unterschriften für ein Bürgerbegehren.
   Um den Ausgang des beantragten Bürgerentscheids zu prognostizieren, führte das Windstätter Tagblatt eine Umfrage unter 1200 wahlberechtigten Bürgern durch. Dabei sprachen sich 504 gegen das Projekt aus, während die übrigen 696 für die Errichtung des Windparks waren.
   Beim schließlich durchgeführten Bürgerentscheid lag die Wahlbeteiligung bei 35%. Es stimmten 51 % gegen das Windparkprojekt, ungültige Stimmen gab es nicht. Wenn man davon ausgeht, dass die Umfrage die Mehrheitsverhältnisse in Windstätt exakt wiedergibt, kann dieses Ergebnis durch einen unterschiedlichen Mobilisierungsgrad der Gegner und Befürworter erklärt werden.
   Welcher Prozentsatz der Gegner und welcher Prozentsatz der Befürworter ist demnach zur Abstimmung gegangen (aus Abiturprüfung Bayern LK 2004)?

Lösungen:

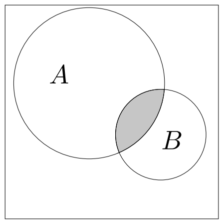
1. 18,1%
2. 80,0%
3. 42,5% der Gegner,
   29,6% der Befürworter gingen zur Abstimmung.

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Nach Laplace 1812, jedoch schon um 1700 von Jakob Bernoulli entdeckt, gilt:

$$P(A) = \frac{\textit{Anzahl der Möglichkeiten, die } A \textit{ festlegen}}{\textit{Anzahl aller Möglichkeiten}}$$

Bei geometrischen Wahrscheinlichkeiten tritt an Stelle von *Anzahl der Möglichkeiten* ein *Flächeninhalt*.



$A \cap B$

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A ändert sich (möglicherweise), falls wir voraussetzen können, dass das Ereignis B eingetreten ist:

$$P(A\,|\,B) = \frac{\textit{Anzahl der Möglichkeiten, die zu } A \textit{ und } B \textit{ gehören}}{\textit{Anzahl der Möglichkeiten, die } B \textit{ festlegen}}$$

Umgeformt:

$$P(A\,|\,B) = \frac{\dfrac{\textit{Anzahl der Möglichkeiten, die zu } A \textit{ und } B \textit{ gehören}}{\textit{Anzahl aller Möglichkeiten}}}{\dfrac{\textit{Anzahl der Möglichkeiten, die } B \textit{ festlegen}}{\textit{Anzahl aller Möglichkeiten}}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Die Ereignisse A und B sind voneinander unabhängig, falls gilt:

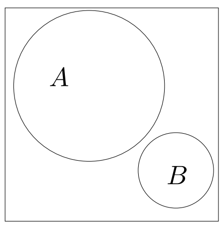
$$P(A\,|\,B) = P(A)$$

Dann folgt:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Nur im Falle disjunkter Ereignisse gilt:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



$A \cap B = \emptyset$

Schubladenschrank

In einem Schrank mit 9 Schubladen liegt mit 70 %iger Wahrscheinlichkeit eine Kugel. Ich öffne die ersten 8 Schubladen und sie sind leer. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel in der 9. Schublade liegt?

Schubladenschrank

In einem Schrank mit 9 Schubladen liegt mit 70 %iger Wahrscheinlichkeit eine Kugel. Ich öffne die ersten 8 Schubladen und sie sind leer. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel in der 9. Schublade liegt?

Wir richten unseren Blick auf die elementaren 18 Ereignisse:
Schublade n enthält die Kugel, Schublade n ist leer, $n = 1, \ldots, 9$, und ihre Wahrscheinlichkeiten:

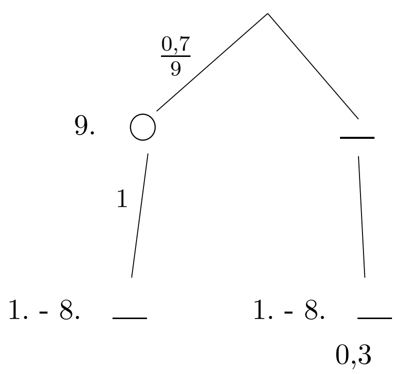
	$P = \frac{0{,}7}{9}$	$\frac{0{,}3}{9}$	
1.	○	—	
2.	○	—	
3.	○	—	
4.	○	—	
5.	○	—	A
6.	○	—	
7.	○	—	
8.	○	—	
9.	○	—	

Mit dem Wissen über die leeren Schubladen kann die Menge Ω der elementaren Ereignisse verkleinert werden, wir betrachten also die Teilmenge A des Wahrscheinlichkeitsraumes.

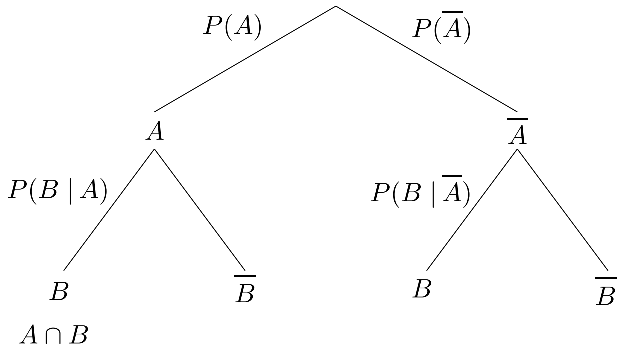
Es gilt nun $P(A) = 1$ und für jedes Ereignis B: $\quad P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$

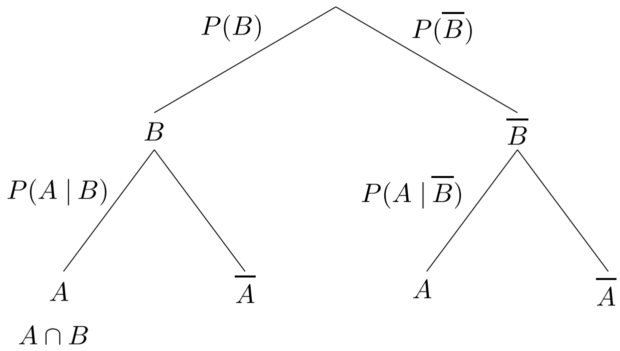
In unserem Fall daher: $\quad P = \dfrac{\frac{0{,}7}{9}}{0{,}3 + \frac{0{,}7}{9}} = 20{,}6\,\%$

Dieses Ergebnis entnehmen wir auch mit der gewohnten Rechnung für bedingte Wahrscheinlichkeiten dem reduzierten Baumdiagramm:



Bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A \mid B)$





Der zweistufige Prozess wird auch durch das umgekehrte Baumdiagramm dargestellt.

Es gilt:

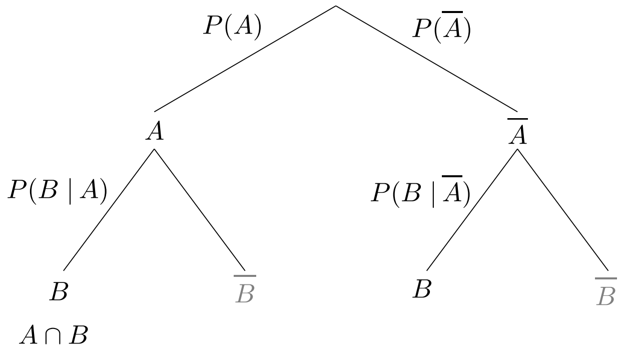
$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= \,? \\ P(A \cap B) &= \,? \\ P(B) &= \,? \end{aligned}$$

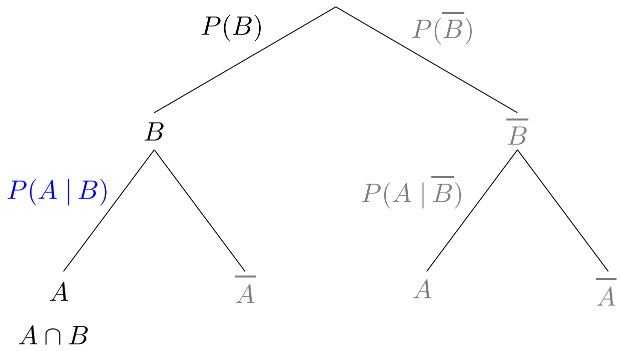
Daraus folgt:

$$P(A \mid B) = \,?$$

Die in dieser Formel benötigten Wahrscheinlichkeiten sind alle im 1. Diagramm enthalten.

Bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A \mid B)$





Der zweistufige Prozess wird auch durch das umgekehrte Baumdiagramm dargestellt.

Es gilt:

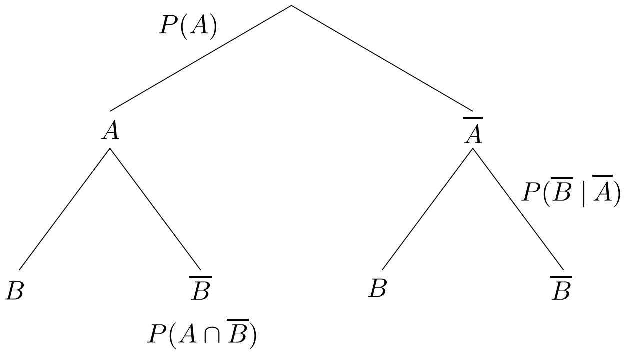
$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(B) \cdot P(A \mid B) && \text{2. Diagramm} \\ P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B \mid A) && \text{1. Diagramm} \\ P(B) &= P(A) \cdot P(B \mid A) + P(\overline{A}) \cdot P(B \mid \overline{A}) && \text{1. Diagramm} \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A) \cdot P(B \mid A)}{P(A) \cdot P(B \mid A) + P(\overline{A}) \cdot P(B \mid \overline{A})}$$

Die in dieser Formel benötigten Wahrscheinlichkeiten sind alle im 1. Diagramm enthalten.

Aufgabe



Gegeben $P(A)$

$P(A \cap \overline{B})$

$P(\overline{B} \mid \overline{A})$

Gesucht $P(A \cap B)$

$P(A \mid B)$

Erläutere die Vorgehensweise.

Wie wird die Aufgabe mit der Vier-Felder-Tafel gelöst?

	B	$\overline{B}$	
A			
$\overline{A}$			

Beachte:

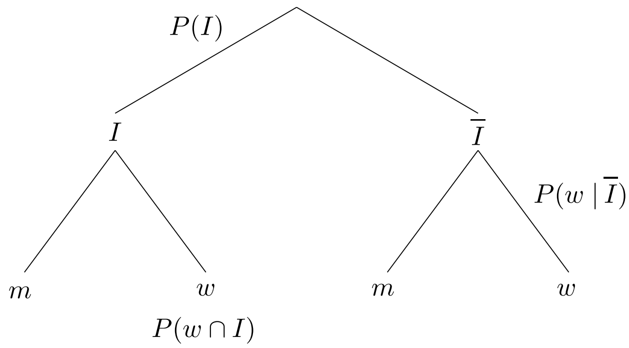
$$P(\overline{B} \mid \overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{A})} \quad \Longrightarrow \quad P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{B} \mid \overline{A}) \cdot P(\overline{A})$$

Aus einer Studie (2015) geht hervor, dass in Deutschland 25 % der Jugendlichen (I-Nutzer) das Internet überwiegend zur Informationsbeschaffung nutzen.
Der Anteil der weiblichen I-Nutzer unter den Jugendlichen beträgt 15,3 %.
Unter den Jugendlichen, die das Internet überwiegend zu anderen Zwecken nutzen, beträgt der Anteil der weiblichen Jugendlichen 47,3 %.
Ermitteln Sie den Anteil

- der männlichen I-Nutzer unter den Jugendlichen,
- der I-Nutzer unter den männlichen Jugendlichen.

Aus einer Studie (2015) geht hervor, dass in Deutschland 25 % der Jugendlichen (I-Nutzer) das Internet überwiegend zur Informationsbeschaffung nutzen.
Der Anteil der weiblichen I-Nutzer unter den Jugendlichen beträgt 15,3 %.
Unter den Jugendlichen, die das Internet überwiegend zu anderen Zwecken nutzen, beträgt der Anteil der weiblichen Jugendlichen 47,3 %.
Ermitteln Sie den Anteil

- der männlichen I-Nutzer unter den Jugendlichen,
- der I-Nutzer unter den männlichen Jugendlichen.



$P(I \cap m) = 9{,}7\,\%$

$P(I \mid m) = 19{,}7\,\%$

	m	w	
I	9,7 %		25 %
$\overline{I}$		35,5 %	

$P(w \mid \overline{I}) = 47{,}3\,\%$ (siehe Aufgabe)

$$P(w \mid \overline{I}) = \frac{P(\overline{I} \cap w)}{P(\overline{I})} \quad \Longrightarrow \quad P(\overline{I} \cap w) = P(w \mid \overline{I}) \cdot P(\overline{I}) = 35{,}5\,\%$$

Gegebene bedingte Wahrscheinlichkeiten sind für die Vier-Felder-Tafel in dieser Weise umzurechnen.

Siehe auch: Bedingte Wahrscheinlichkeit, Aufgaben Sek I
Wiederholung
Startseite