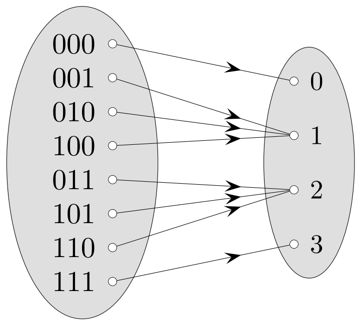
Erwartungswert

Bei einem Glücksspiel wird (häufig) jedem Elementarereignis ein Reingewinn zugeordnet.

Eine Funktion, die jedem Elementarereignis eine Zahl zuordnet, heißt Zufallsvariable.
Sie wird mit einem großen Buchstaben wie X, Y, Z bezeichnet.

Betrachten wir hierzu ein einfaches Beispiel:

Eine Münze mit den Seiten 0 und 1 wird 3mal geworfen. Die Anzahl der Einsen sei mein Gewinn. Die Menge der Elementarereignisse besteht aus 8 Elementen: $\Omega = \{000, 001, \ldots, 111\}$. Sei X die Anzahl der Einsen für ein Elementarereignis, z.B. $X(011) = 2$, $X(010) = 1$, $X(000) = 0$. Mein Gewinn X ist eine Funktion auf Ω.
Das Diagramm veranschaulicht die Funktion.



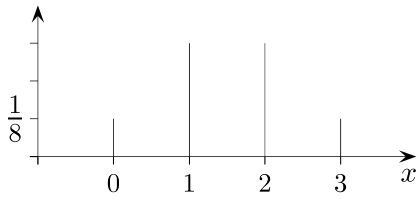
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mein Gewinn 0 (1, 2, 3) beträgt?

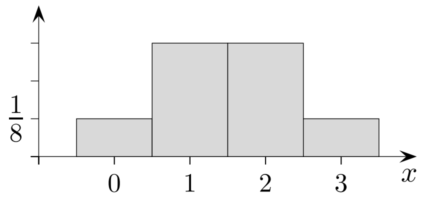
Da die Elementarereignisse alle die Wahrscheinlichkeit 1/8 haben,
kann die Tabelle leicht aufgestellt werden:

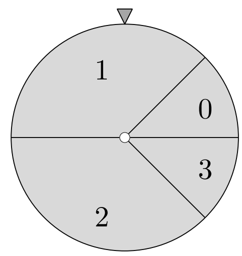
Gewinn	0	1	2	3
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Diese Tabelle heißt *Verteilung* der Zufallsvariablen X.

Die Verteilung einer Zufallsvariablen ist die Liste ihrer Werte mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten, sie kann durch ein Streckendiagramm, ein Histogramm oder ein Glücksrad veranschaulicht werden.







Mit welchem Durchschnittsgewinn ist nun je Versuchswiederholung zu rechnen?
Dieser wichtige Wert heißt *Erwartungswert der Zufallsvariablen X.*

Nehmen wir an, es werden n Spiele gespielt. Nach der Häufigkeitsdeutung der Wahrscheinlichkeit wird der Gewinn 0 etwa $\frac{1}{8} \cdot n$, der Gewinn 1 etwa $\frac{3}{8} \cdot n$ eintreten.

Der Gesamtgewinn ist ungefähr $\frac{1}{8} \cdot n \cdot 0 + \frac{3}{8} \cdot n \cdot 1 + \frac{3}{8} \cdot n \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot n \cdot 3$

und daher ist der Durchschnittsgewinn pro Spiel: $\frac{1}{8} \cdot 0 + \frac{3}{8} \cdot 1 + \frac{3}{8} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 3$

Nimmt eine Zufallsvariable X die Werte x_1, x_2, ... , x_n mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2, ... , p_n an, so ist der Erwartungswert: $E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n$.

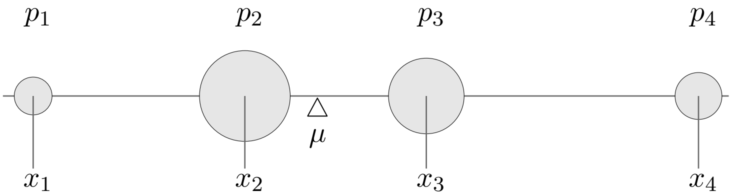
Zwei Würfel werden geworfen. X sei die geworfene Augensumme. Geben Sie die Verteilung der Zufallsvariablen X an, zeichnen Sie ein Streckendiagramm und berechnen Sie den Erwartungswert.

Erwartungswert

Sei X eine Zufallsvariable mit der Verteilung:

x_1	x_2	x_3	x_4
p_1	p_2	p_3	p_4

Die Verteilung kann immer als Massenverteilung gedeutet werden.
Die Gesamtmasse 1 wird auf die Punkte x_i verteilt. Dabei wird dem Punkt x_i die Masse p_i zugewiesen.
Der Schwerpunkt μ charakterisiert die Massenverteilung.
Nach dem Hebelgesetz müssen die links- und rechtsdrehenden Momente gleich sein.



$$(\mu - x_1)p_1 + (\mu - x_2)p_2 \;=\; (x_3 - \mu)p_3 + (x_4 - \mu)p_4$$

Durch Auflösen nach μ und unter Berücksichtigung von $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$ folgt:

$$\mu \;=\; x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4$$

Zeitschriftenverkauf

Ein Zeitschriftenladen bezieht pro Woche 3 Exemplare einer wenig verlangten Fahrradzeitschrift.
Pro Exemplar bezahlt der Besitzer 1,30 € und verkauft es für 2,70 €. Unverkaufte Fahrradzeitschriften entsorgt er, sobald er die neuen Exemplare erhält. Aus Erfahrung weiß er:

Nachfragen pro Woche	0	1	2	3	mehr als 3
Wahrscheinlichkeit	0,2	0,3	0,3	0,1	0,1

Lohnt sich der Verkauf der Fahrradzeitschrift auf lange Sicht?

Ein Zeitschriftenladen bezieht pro Woche 3 Exemplare einer wenig verlangten Fahrradzeitschrift. Pro Exemplar bezahlt der Besitzer 1,30 € und verkauft es für 2,70 €. Unverkaufte Fahrradzeitschriften entsorgt er, sobald er die neuen Exemplare erhält. Aus Erfahrung weiß er:

Nachfragen pro Woche	0	1	2	3	mehr als 3
Wahrscheinlichkeit	0,2	0,3	0,3	0,1	0,1

Lohnt sich der Verkauf der Fahrradzeitschrift auf lange Sicht?

Nachfragen pro Woche	0	1	2	3	mehr als 3
Wahrscheinlichkeit	0,2	0,3	0,3	0,1	0,1
Gewinn/Verlust in €	−3,90	−1,20	1,50	4,20	4,20

z. B. für eine Nachfrage: $-3 \cdot 1{,}30\,€ + 1 \cdot 2{,}70\,€ = -1{,}20\,€$

Der Erwartungswert für den Gewinn des Händlers beträgt: 0,15 €

Fahrzeiten

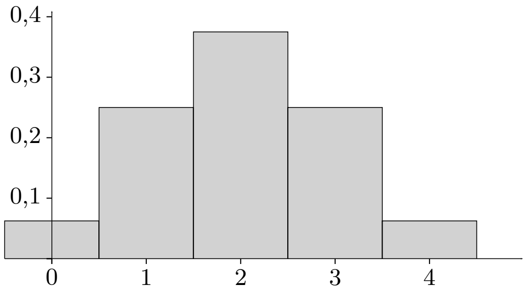
Herr A trifft auf seinem Weg zur Arbeit auf 4 unabhängig voneinander geschaltete Ampeln.
Die Rot- und Grünphasen dauern jeweils 2,4 Minuten, die Gelbphase bleibt unberücksichtigt.
Wenn er stets auf eine grüne Ampel trifft, benötigt er 15 Minuten zur Arbeit.
Ermittle die Wahrscheinlichkeiten der durchschnittlichen Fahrzeiten, falls Herr A entweder auf 1, 2, 3 oder 4 rote Ampeln trifft.
Welche Fahrzeit benötigt er im Schnitt?

Variation

Die Rotphase dauert 4 Minuten, die Grünphase 2 Minuten.

Fahrzeiten

Herr A trifft auf seinem Weg zur Arbeit auf 4 unabhängig voneinander geschaltete Ampeln.
Die Rot- und Grünphasen dauern jeweils 2,4 Minuten, die Gelbphase bleibt unberücksichtigt.
Wenn er stets auf eine grüne Ampel trifft, benötigt er 15 Minuten zur Arbeit.
Ermittle die Wahrscheinlichkeiten der durchschnittlichen Fahrzeiten, falls Herr A entweder auf 1, 2, 3 oder 4 rote Ampeln trifft.
Welche Fahrzeit benötigt er im Schnitt?



$k \longrightarrow P(X=k) = \text{binompdf}(\text{n}, \text{p}, \text{k})$

$n = 4$ (Ampeln)

$p = \frac{1}{2}$

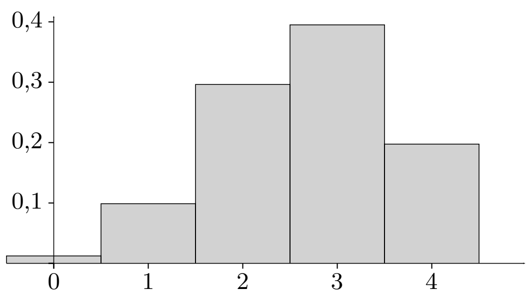
k (Anz. Ampeln)	P	Wartezeit (min)	Fahrzeit (min)
0	0,0625	0	15
1	0,2500	1,2	16,2
2	0,3750	2,4	17,4
3	0,2500	3,6	18,6
4	0,0625	4,8	19,8

durchschnittliche Fahrzeit: $0{,}25 \cdot 1{,}2 + 0{,}375 \cdot 2{,}4 + 0{,}25 \cdot 3{,}6 + 0{,}0625 \cdot 4{,}8 + 15 = 2{,}4 + 15 = 17{,}4$ (min)
$(= 4 \cdot 1/2 \cdot 1{,}2 + 15)$

Variation

Die Rotphase dauert 4 Minuten, die Grünphase 2 Minuten.

k	P	Wartezeit (min)	Fahrzeit (min)
0	0,0123	0	15
1	0,0988	2	17
2	0,2963	4	19
3	0,3951	6	21
4	0,1975	8	23



Mit der Wahrscheinlichkeit $p = 2/3$ ist eine Ampel rot.

durchschnittliche Fahrzeit: $0{,}0988 \cdot 2 + 0{,}2963 \cdot 4 + 0{,}3951 \cdot 6 + 0{,}1975 \cdot 8 + 15 = 5{,}33 + 15 = 20{,}3$ (min)
$(= 4 \cdot 2/3 \cdot 2 + 15)$

Siehe auch (Sek I): Erwartungswert, Aufgaben

Startseite