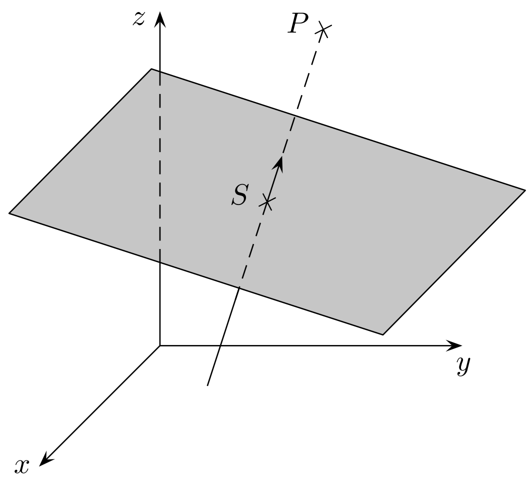
# Abstand Punkt/Ebene

1. Gegeben ist die Ebene $E$: $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 50 = 0$

   Um den Abstand des Punktes $P(20 \mid 0 \mid 0)$ zu $E$ zu berechnen, gehen wir von der Hesseschen Normalenform der Ebenengleichung aus und bringen die Ebene zum Schnitt mit der Geraden $g$.

   $E$: $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 10 = 0 \qquad g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$




   $$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \right] - 10 = 0$$

   $$\begin{aligned} 12 + \lambda - 10 &= 0 \\ \lambda &= -2 \end{aligned}$$

   Das bedeutet:
   Das $(-2)$-fache des Einheitsvektors führt zum Schnittpunkt $S$, daher muss der Abstand 2 sein.
   Eine einfache Formel für den Abstand ist zu erkennen, wenn wir den obigen Ausdruck nur teilweise ausrechnen:

   $$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda - 10 = 0$$

   $$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 10 = -\lambda$$

   Vergleiche die linke Seite mit der linken Seite der Hesseschen Normalenform von $E$!

   allgemein:

   $$\begin{aligned} E: &\quad \vec{n}^\circ\, \vec{x} - a = 0 \\ g: &\quad \vec{x} = \overrightarrow{OP} + \lambda\, \vec{n}^\circ \end{aligned}$$

   Schnitt:

   $$\begin{aligned} \vec{n}^\circ\, (\overrightarrow{OP} + \lambda\, \vec{n}^\circ) - a &= 0 \\ \vec{n}^\circ\, \overrightarrow{OP} + \lambda - a &= 0 \\ \vec{n}^\circ\, \overrightarrow{OP} - a &= -\lambda \\ |\, \vec{n}^\circ\, \overrightarrow{OP} - a \,| &= \lambda \end{aligned}$$

   *Merke:*
   *Um den Abstand eines Punktes $P$ von einer Ebene $E$ zu bestimmen, setzt man für $\vec{x}$ in die linke Seite der Hesseschen Normalenform den Vektor $\overrightarrow{OP}$ ein und nimmt den Betrag.*

2. Berechne den Abstand des Punktes von der Ebene:

   a) $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 27 = 0 \qquad P(2 \mid -4 \mid 1)$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 9 = 0 \qquad P(5 \mid 1 \mid 12)$

# Abstand Punkt/Ebene

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 27 = 0$ $\quad P(2 \,|\, -4 \,|\, 1)$ $\qquad$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 9 = 0$ $\quad P(5 \,|\, 1 \,|\, 12)$

*Ergebnisse: a) 1, b) 6*

# Abstand Punkt/Ebene  alternative Begründung

Eine zweite Begründung besteht darin, zu der Ebene

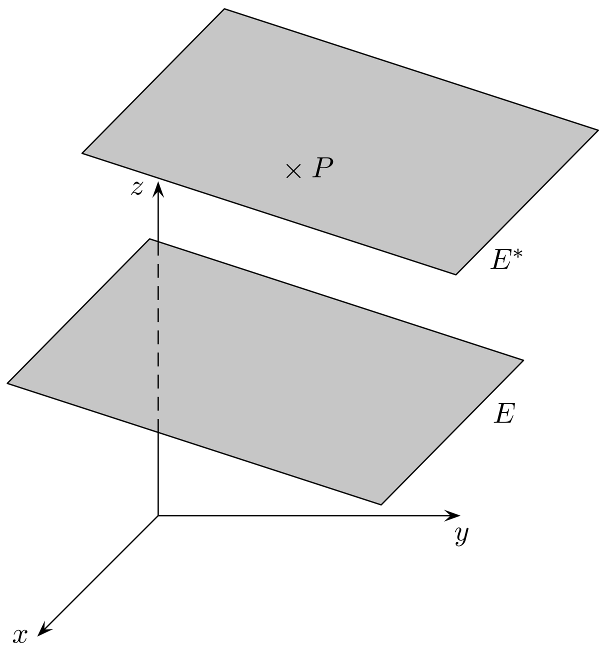
$E\colon\ \vec{n}^\circ\,\vec{x} - a = 0$

eine parallele Ebene $E^*$ durch $P$ und die Differenz der Abstände zum Ursprung zu betrachten.

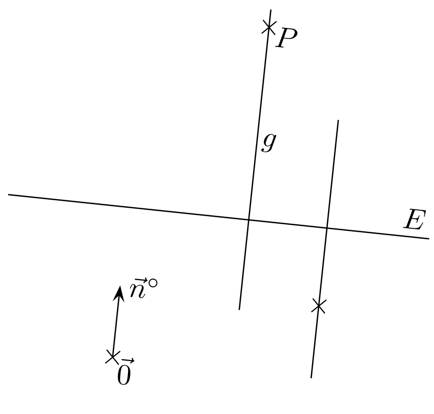
$$E^*\colon\quad \vec{n}^\circ\,(\vec{x} - \overrightarrow{OP}) = 0$$

$$E^*\colon\quad \vec{n}^\circ\,\vec{x} - \vec{n}^\circ\,\overrightarrow{OP} = 0$$

$$d(P,E) = |\ \vec{n}^\circ\,\overrightarrow{OP} - a\ |$$




$\vec{n}^\circ\,\overrightarrow{OP} - a$  ist positiv, wenn $P$ und der Ursprung auf verschiedenen Seiten der Ebene $E$ liegen, negativ, wenn sie auf derselben Seite liegen.




$E\colon\ \vec{n}^\circ\,\vec{x} - a = 0 \qquad a > 0,\quad \vec{n}^\circ$ weist zu $E$

$$g\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OP} + \lambda\,\vec{n}^\circ$$

Schnitt:

$$\vec{n}^\circ(\overrightarrow{OP} + \lambda\,\vec{n}^\circ) - a = 0$$

$$\vec{n}^\circ\,\overrightarrow{OP} + \lambda - a = 0$$

$$\lambda = -(\vec{n}^\circ\,\overrightarrow{OP} - a)$$

$P$ und der Ursprung liegen

auf derselben Seite von $E \implies \lambda > 0 \implies \vec{n}^\circ\,\overrightarrow{OP} - a < 0$  (zum Merken setze $\vec{0}$ ein)

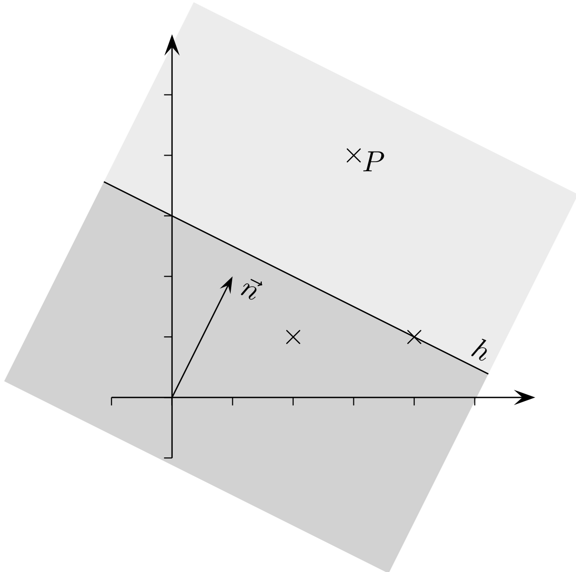
auf verschiedenen Seiten $\implies \lambda < 0 \implies \vec{n}^\circ\,\overrightarrow{OP} - a > 0$

# Über oder unter der Geraden/Ebene

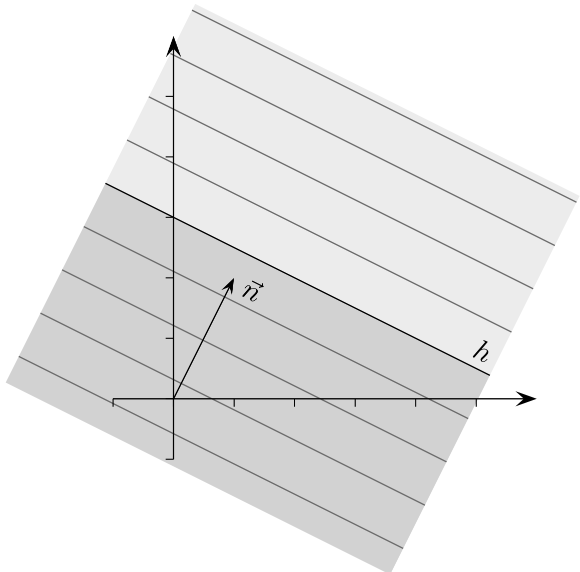
Beachte, nur im $\mathbb{R}^2$ gibt es für eine Gerade eine Normalenform.
Im $\mathbb{R}^2$ gilt (im $\mathbb{R}^3$ statt Gerade dann Ebene):

$h\colon\ \vec{n}\,\vec{x} - a \ = \ 0, \qquad a > 0, \quad \vec{n}$ weist zu $h$

$\vec{n}\,\overrightarrow{OP} - a$ ist positiv, wenn $P$ und der Ursprung auf verschiedenen Seiten der Gerade $h$ liegen, negativ, wenn sie auf derselben Seite liegen.




Wir betrachten den Term $\vec{n}\,\overrightarrow{OP} - a$ für verschiedene $P$.
Genau dann, wenn $P$ auf $h$ liegt, ist der Term null (siehe Geradengleichung von $h$).
Das Vorzeichen des Terms kann positiv und negativ werden.
Auf den durch $h$ bestimmten Halbebenen bleibt es jeweils unverändert.
Ein Vorzeichenwechsel würde wegen der Stetigkeit einen Nullterm auf der Halbebene zur Folge haben.
Der Term wird jedoch nur auf $h$ null. Für den Ursprung ist der Term negativ.
Daraus folgt die Behauptung.



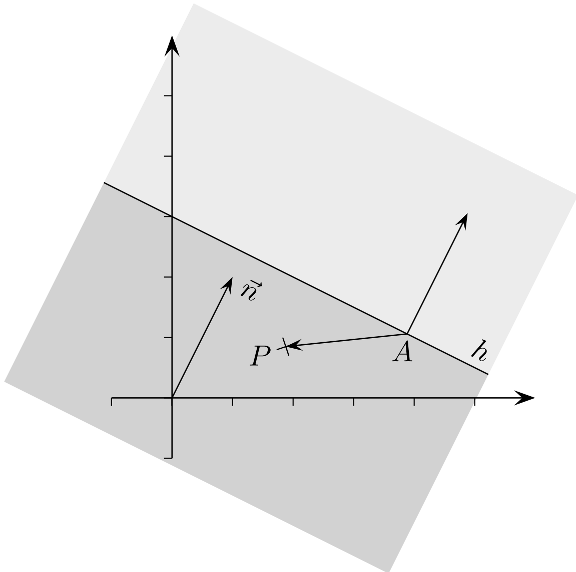

Auf den zu $h$ parallelen Geraden nimmt der Term $\vec{n}\,\overrightarrow{OP} - a$ konstante Werte an,
$d(P,h) = |\ \vec{n}\,\overrightarrow{OP} - a\ |$.

# Halbebenentest

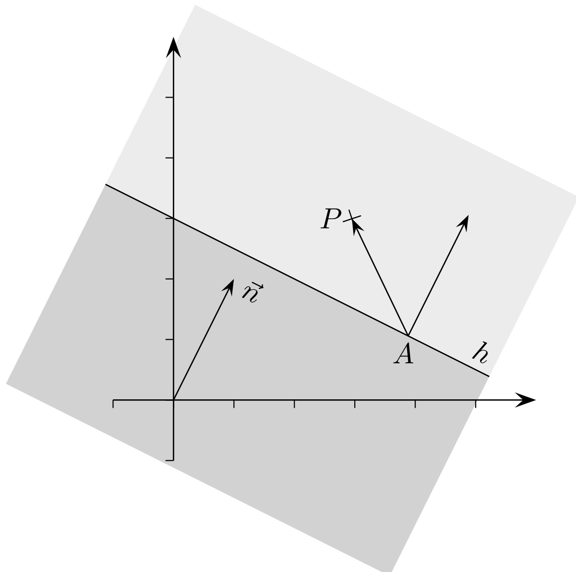
Beachte, nur im $\mathbb{R}^2$ gibt es für eine Gerade eine Normalenform.
Im $\mathbb{R}^2$ gilt (im $\mathbb{R}^3$ statt Gerade dann Ebene):

$h$: $\vec{n}\,\vec{x} - a \;=\; 0, \qquad a > 0, \quad \vec{n}$ weist zu $h$

$\vec{n}\,\overrightarrow{OP} - a$ ist positiv, wenn $P$ und der Ursprung auf verschiedenen Seiten der Gerade $h$ liegen, negativ, wenn sie auf derselben Seite liegen.




Für einen beliebigen Punkt $A$ auf der Geraden $h$ gilt: $\vec{n}\,\overrightarrow{OP} - a = \vec{n}\,(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) = \vec{n}\,\overrightarrow{AP}$.
Wenn $P$ und der Ursprung auf derselben Seite von $h$ liegen, ist der eingeschlossene Winkel der Vektoren $\vec{n}$ und $\overrightarrow{AP}$ größer als 90°. Damit ist das Skalarprodukt $\vec{n}\,\overrightarrow{AP}$ kleiner null (beachte cos).




Für diese Lage von $P$ ist das Skalarprodukt $\vec{n}\,\overrightarrow{AP} = \vec{n}\,\overrightarrow{OP} - a$ positiv.

Gegeben ist die Ebene $E$: $x - 4y + z = 8$.
Untersuche die Lage der Punkte $A(2\,|\,{-1}\,|\,4)$, $B(2\,|\,{-1}\,|\,2)$ und $C(-2\,|\,{-1}\,|\,5)$.

Gegeben ist die Ebene $E$: $x - 4y + z = 8$.
Untersuche die Lage der Punkte $A(2 \mid -1 \mid 4)$, $B(2 \mid -1 \mid 2)$ und $C(-2 \mid -1 \mid 5)$.

Normalenform, der Normalenvektor weist zur Ebene hin:

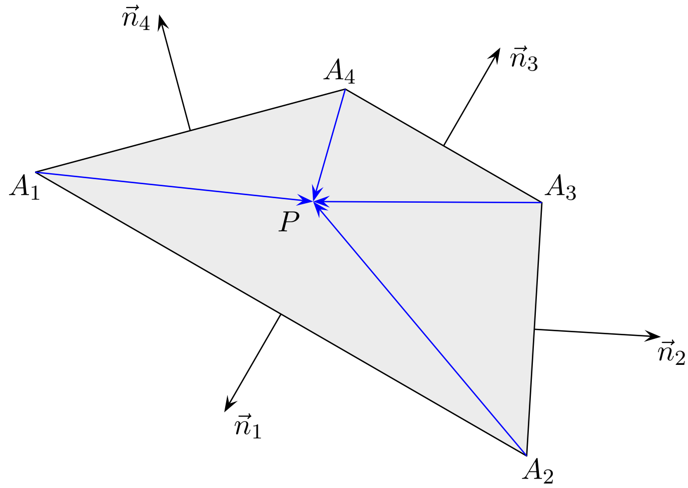
$$\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 8 = 0$$

$\overrightarrow{OA}$ in die linke Seite eingesetzt ergibt 2,
d. h. $A$ und der Ursprung liegen auf verschiedenen Seiten der Ebene.

$\overrightarrow{OB}$ in die linke Seite eingesetzt ergibt 0,
d. h. $B$ liegt auf der Ebene.

$\overrightarrow{OC}$ in die linke Seite eingesetzt ergibt $-1$,
d. h. $C$ und der Ursprung liegen auf derselben Seite der Ebene.

# Halbebenentest




Die Überlegungen können auf konvexe Vielecke (sie ergeben sich als Schnitt von Halbebenen) angewandt werden. $P$ liegt innerhalb des Vierecks, falls $\vec{n}_i\,\overrightarrow{A_iP} < 0$ für $i = 1, \ldots, 4$ ist.
Die Normalenvektoren müssen nach außen weisen.

# Abstand Punkt/Ebene alternative Begründung

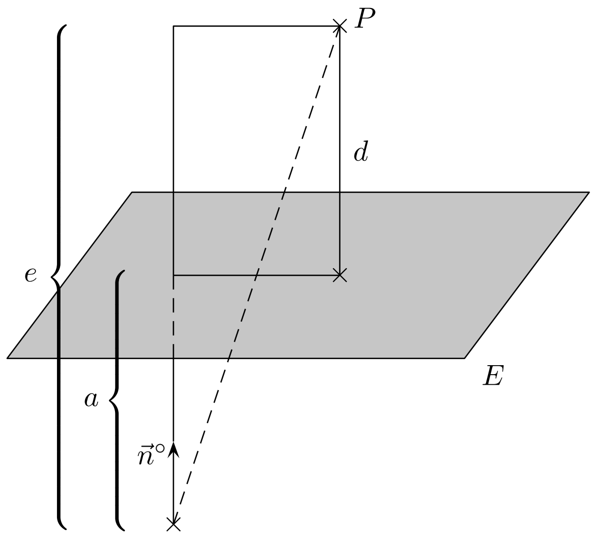
In der dritten Begründung wird eine Eigenschaft des Skalarprodukts ausgenutzt.

$E\colon\ \ \vec{n}^{\circ}\,\vec{x} - a \,=\, 0$

$d = e - a$

$\vec{n}^{\circ}\cdot\,\overrightarrow{OP} = \ldots = e$

$\Longrightarrow\quad d(P,E) = \vec{n}^{\circ}\,\overrightarrow{OP} - a$




und allgemein

$d(P,E) = |\,\vec{n}^{\circ}\,\overrightarrow{OP} - a\,|$