

Abstand Punkt/Ebene

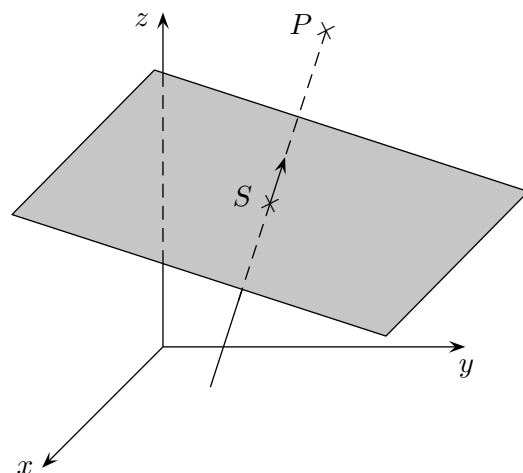
1. Gegeben ist die Ebene E : $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 50 = 0$

Um den Abstand des Punktes $P(20 | 0 | 0)$ zu E zu berechnen, gehen wir von der Hesseschen Normalenform der Ebenengleichung aus und bringen die Ebene zum Schnitt mit der Geraden g .

$$E: \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 10 = 0 \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \right] - 10 = 0$$

$$\begin{aligned} 12 + \lambda - 10 &= 0 \\ \lambda &= -2 \end{aligned}$$



Das bedeutet:

Das (-2) -fache des Einheitsvektors führt zum Schnittpunkt S , daher muss der Abstand 2 sein. Eine einfache Formel für den Abstand ist zu erkennen, wenn wir den obigen Ausdruck nur teilweise ausrechnen:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda - 10 = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 10 = -\lambda$$

allgemein:

$$E: \vec{n}^\circ \cdot \vec{x} - a = 0$$

$$g: \vec{x} = \vec{OP} + \lambda \vec{n}^\circ$$

Schnitt:

$$\vec{n}^\circ \cdot (\vec{OP} + \lambda \vec{n}^\circ) - a = 0$$

$$\vec{n}^\circ \cdot \vec{OP} + \lambda - a = 0$$

$$\vec{n}^\circ \cdot \vec{OP} - a = -\lambda$$

$$|\vec{n}^\circ \cdot \vec{OP} - a| = \lambda$$

Vergleiche die linke Seite mit der linken Seite der Hesseschen Normalenform von E !

Merke:

Um den Abstand eines Punktes P von einer Ebene E zu bestimmen, setzt man für \vec{x} in die linke Seite der Hesseschen Normalenform den Vektor \vec{OP} ein und nimmt den Betrag.

2. Berechne den Abstand des Punktes von der Ebene:

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 27 = 0 \quad P(2 | -4 | 1)$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 9 = 0 \quad P(5 | 1 | 12)$

Abstand Punkt/Ebene

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 27 = 0 \quad P(2 \mid -4 \mid 1) \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 9 = 0 \quad P(5 \mid 1 \mid 12)$$

Ergebnisse: a) 1, b) 6

Abstand Punkt/Ebene alternative Begründung

Eine zweite Begründung besteht darin, zu der Ebene

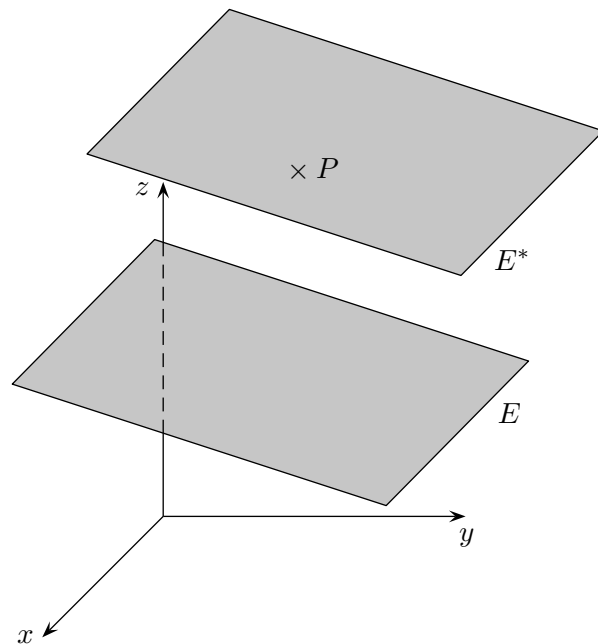
$$E: \vec{n}^\circ \vec{x} - a = 0$$

eine parallele Ebene E^* durch P und die Differenz der Abstände zum Ursprung zu betrachten.

$$E^*: \vec{n}^\circ (\vec{x} - \vec{OP}) = 0$$

$$E^*: \vec{n}^\circ \vec{x} - \vec{n}^\circ \vec{OP} = 0$$

$$d(P, E) = |\vec{n}^\circ \vec{OP} - a|$$



$\vec{n}^\circ \vec{OP} - a$ ist positiv, wenn P und der Ursprung auf verschiedenen Seiten der Ebene E liegen, negativ, wenn sie auf derselben Seite liegen.

$$E: \vec{n}^\circ \vec{x} - a = 0 \quad a > 0, \quad \vec{n}^\circ \text{ weist zu } E$$

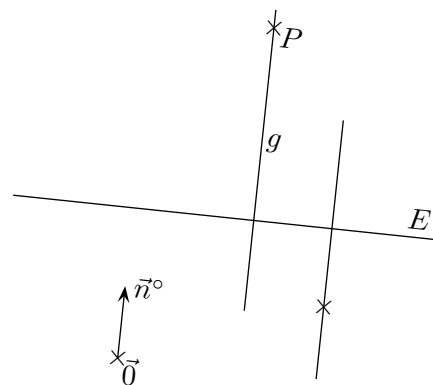
$$g: \vec{x} = \vec{OP} + \lambda \vec{n}^\circ$$

Schnitt:

$$\vec{n}^\circ (\vec{OP} + \lambda \vec{n}^\circ) - a = 0$$

$$\vec{n}^\circ \vec{OP} + \lambda - a = 0$$

$$\lambda = -(\vec{n}^\circ \vec{OP} - a)$$



P und der Ursprung liegen

auf derselben Seite von $E \implies \lambda > 0 \implies \vec{n}^\circ \vec{OP} - a < 0$ (zum Merken setze $\vec{0}$ ein)

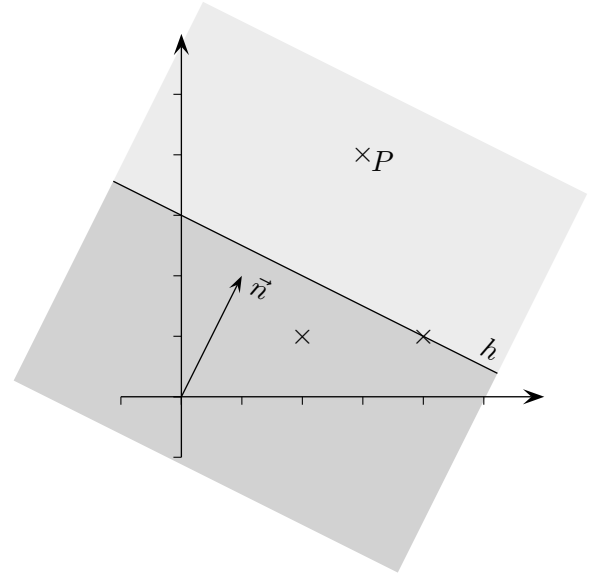
auf verschiedenen Seiten $\implies \lambda < 0 \implies \vec{n}^\circ \vec{OP} - a > 0$

Über oder unter der Geraden/Ebene

Beachte, nur im \mathbb{R}^2 gibt es für eine Gerade eine Normalenform.
 Im \mathbb{R}^2 gilt (im \mathbb{R}^3 statt Gerade dann Ebene):

$$h: \vec{n}\vec{x} - a = 0, \quad a > 0, \quad \vec{n} \text{ weist zu } h$$

$\vec{n}\vec{OP} - a$ ist positiv, wenn P und der Ursprung auf verschiedenen Seiten der Gerade h liegen, negativ, wenn sie auf derselben Seite liegen.



Wir betrachten den Term $\vec{n}\vec{OP} - a$ für verschiedene P .

Genau dann, wenn P auf h liegt, ist der Term null (siehe Geradengleichung von h).

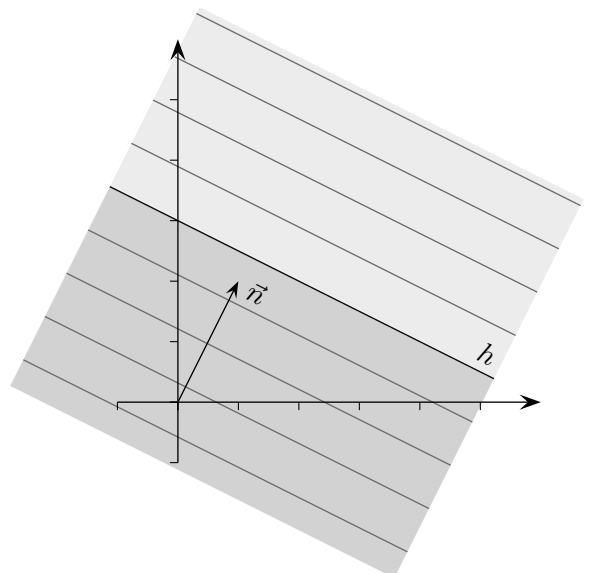
Das Vorzeichen des Terms kann positiv und negativ werden.

Auf den durch h bestimmten Halbebenen bleibt es jeweils unverändert.

Ein Vorzeichenwechsel würde wegen der Stetigkeit einen Nullterm auf der Halbebene zur Folge haben.

Der Term wird jedoch nur auf h null. Für den Ursprung ist der Term negativ.

Daraus folgt die Behauptung.



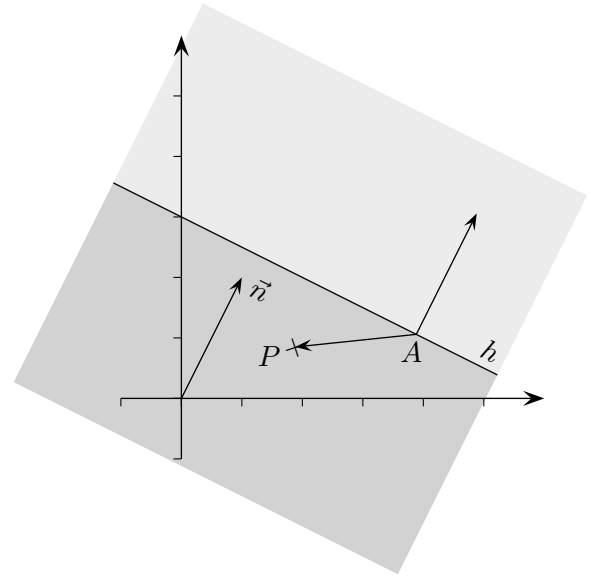
Auf den zu h parallelen Geraden nimmt der Term $\vec{n}\vec{OP} - a$ konstante Werte an,
 $d(P, h) = |\vec{n}\vec{OP} - a|$.

Halbebenentest

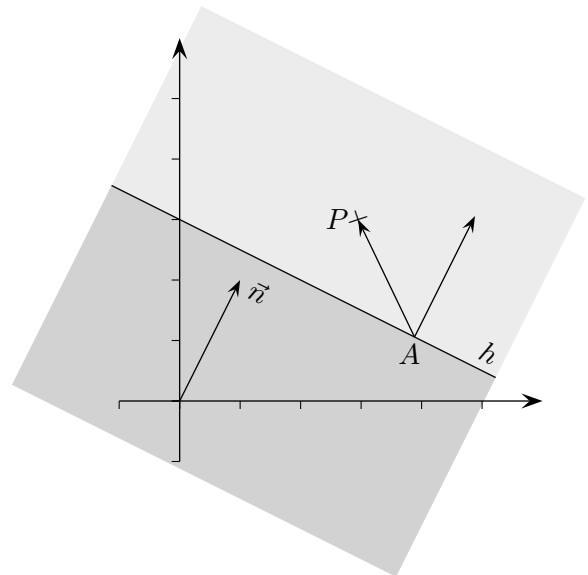
Beachte, nur im \mathbb{R}^2 gibt es für eine Gerade eine Normalenform.
Im \mathbb{R}^2 gilt (im \mathbb{R}^3 statt Gerade dann Ebene):

$$h: \vec{n}\vec{x} - a = 0, \quad a > 0, \quad \vec{n} \text{ weist zu } h$$

$\vec{n}\vec{OP} - a$ ist positiv, wenn P und der Ursprung auf verschiedenen Seiten der Geraden h liegen, negativ, wenn sie auf derselben Seite liegen.



Für einen beliebigen Punkt A auf der Geraden h gilt: $\vec{n}\vec{OP} - a = \vec{n}(\vec{OP} - \vec{OA}) = \vec{n}\vec{AP}$.
Wenn P und der Ursprung auf derselben Seite von h liegen, ist der eingeschlossene Winkel der Vektoren \vec{n} und \vec{AP} größer als 90° . Damit ist das Skalarprodukt $\vec{n}\vec{AP}$ kleiner null (beachte cos).



Für diese Lage von P ist das Skalarprodukt $\vec{n}\vec{AP} = \vec{n}\vec{OP} - a$ positiv.

Gegeben ist die Ebene $E: x - 4y + z = 8$.

Untersuche die Lage der Punkte $A(2 \mid -1 \mid 4)$, $B(2 \mid -1 \mid 2)$ und $C(-2 \mid -1 \mid 5)$.

Gegeben ist die Ebene $E: x - 4y + z = 8$.

Untersuche die Lage der Punkte $A(2 | -1 | 4)$, $B(2 | -1 | 2)$ und $C(-2 | -1 | 5)$.

Normalenform, der Normalenvektor weist zur Ebene hin:

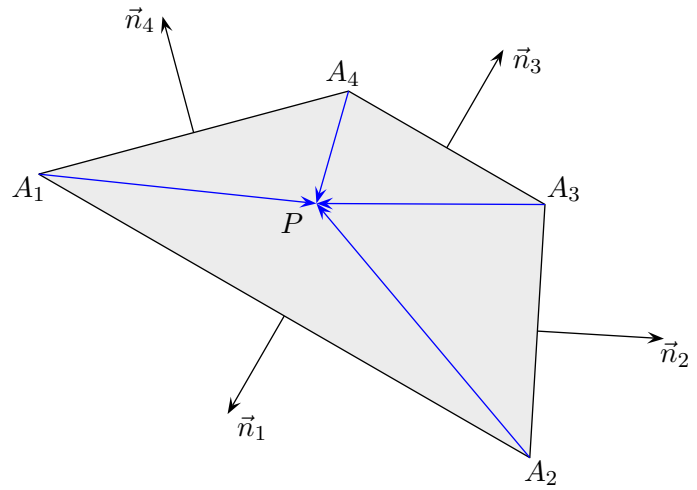
$$\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 8 = 0$$

\vec{OA} in die linke Seite eingesetzt ergibt 2,
d.h. A und der Ursprung liegen auf verschiedenen Seiten der Ebene.

\vec{OB} in die linke Seite eingesetzt ergibt 0,
d.h. B liegt auf der Ebene.

\vec{OC} in die linke Seite eingesetzt ergibt -1 ,
d.h. C und der Ursprung liegen auf derselben Seite der Ebene.

Halbebenentest



Die Überlegungen können auf konvexe Vielecke (sie ergeben sich als Schnitt von Halbebenen) angewandt werden. P liegt innerhalb des Vierecks, falls $\vec{n}_i \cdot \overrightarrow{A_i P} < 0$ für $i = 1, \dots, 4$ ist. Die Normalenvektoren müssen nach außen weisen.

Abstand Punkt/Ebene alternative Begründung

In der dritten Begründung wird eine Eigenschaft des Skalarprodukts ausgenutzt.

$$E: \vec{n}^\circ \vec{x} - a = 0$$

$$d = e - a$$

$$\vec{n}^\circ \cdot \vec{OP} = \dots = e$$

$$\implies d(P, E) = \vec{n}^\circ \vec{OP} - a$$

und allgemein

$$d(P, E) = | \vec{n}^\circ \vec{OP} - a |$$

