

Abstand Punkt/Gerade

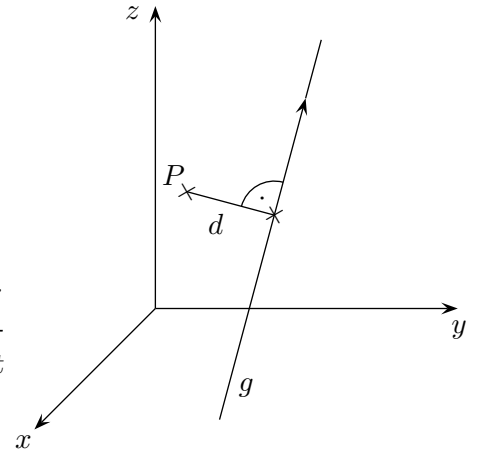
1. Berechne den Abstand d des Punktes $P(0 | 5 | 6)$ von der Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Wir legen zunächst eine Ebene durch P , die senkrecht auf g steht. Als Stützvektor nehmen wir \vec{OP} , als Normalenvektor den Richtungsvektor der Geraden g . Dann berechnen wir den Schnittpunkt F dieser Ebene mit g .

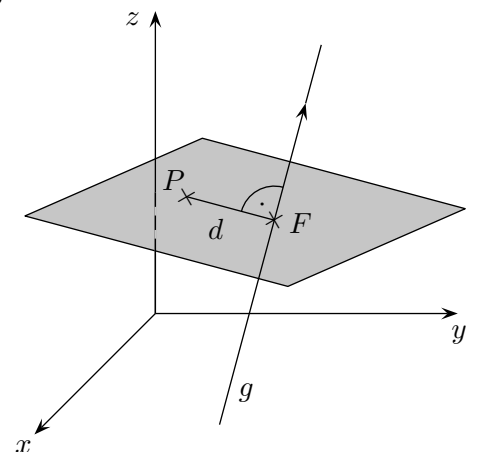
Der gesuchte Abstand d wird dann mit $d = |\vec{FP}|$ bestimmt.



$$E: \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 11 = 0$$

Schnittbedingung:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] - 11 &= 0 \\ -7 + 18\lambda - 11 &= 0 \\ 18\lambda &= 18 \\ \lambda &= 1 \end{aligned}$$



$\lambda = 1$ in die Geradengleichung eingesetzt, ergibt den Schnittpunkt $F(-2 | 1 | 2)$.

$$\vec{FP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$d = |\vec{FP}| = 6$$

2. Berechne den Abstand:

a) $P(5 | 1 | -2)$ $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $P(8 | 0 | 0)$ $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

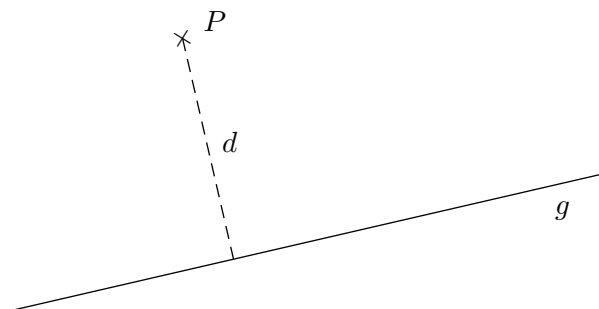
Abstand Punkt/Gerade

Ergebnisse:

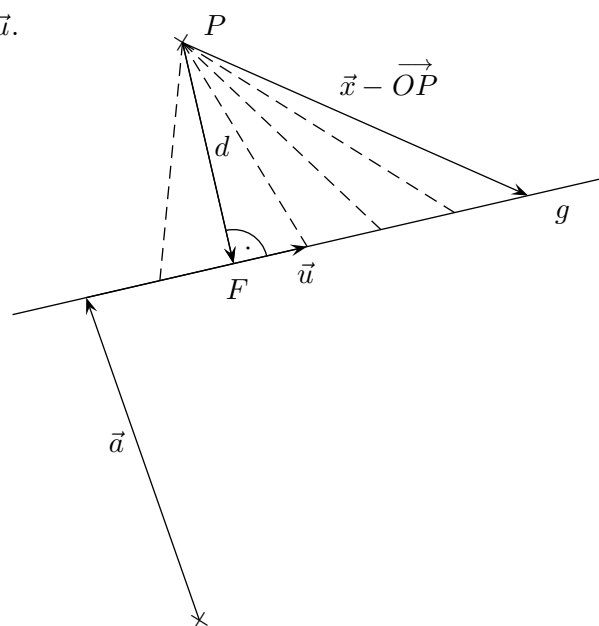
2. a) $F(4 | 2 | -4), \quad \lambda = 2, \quad d = \sqrt{6}$

b) $F(3 | -5 | 2), \quad \lambda = -2, \quad d = \sqrt{54}$

Abstand Punkt/Gerade GTR



Gegeben sind der Punkt P und die Gerade $g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{u}$.
 Gesucht ist der Abstand d von P zu g .



Um den Abstand mit dem GTR zu ermitteln, kann das Minimum der Funktion

$$d(\lambda) = | \vec{a} + \lambda \vec{u} - \vec{OP} |$$

bestimmt werden.

Empfehlenswert ist, die Vektoren \vec{a} und \vec{OP} zusammenzufassen. Der Betrag wird wie üblich mit einer Wurzel aus einer Quadratsumme gebildet, $d(\lambda) = \sqrt{(\dots + \lambda u_1)^2 + (\dots + \lambda u_2)^2 + (\dots + \lambda u_3)^2}$

Berechne den Fußpunkt und den Abstand:

a) $P(5 | 1 | -2)$ $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $P(8 | 0 | 0)$ $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Abstand Punkt/Gerade GTR

Ergebnisse:

a) $F(4 | 2 | -4)$, $\lambda = 2$, $d = \sqrt{6}$

b) $F(3 | -5 | 2)$, $\lambda = -2$, $d = \sqrt{54}$