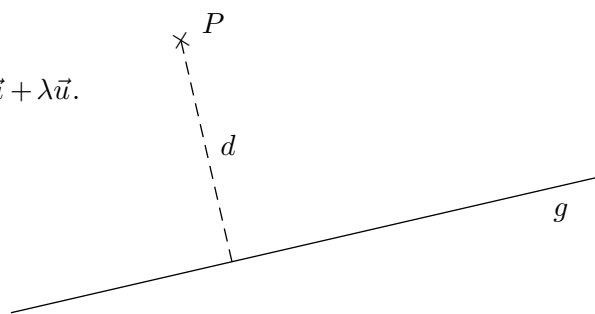


Abstand Punkt/Gerade

1. Gegeben sind der Punkt P und die Gerade $g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$.
Gesucht ist der Abstand d von P zu g .



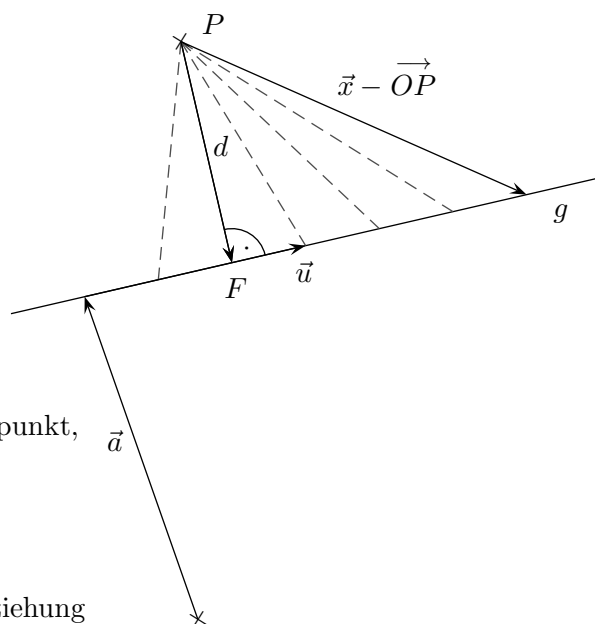
2. Für ein λ gilt: $\vec{a} + \lambda\vec{u} - \vec{OP} \perp \vec{u}$, d. h.

$$(\vec{a} + \lambda\vec{u} - \vec{OP}) \cdot \vec{u} = 0$$

Hieraus lässt sich λ berechnen, allgemein:

$$\lambda = \frac{(\vec{OP} - \vec{a}) \cdot \vec{u}}{\vec{u}^2}$$

λ eingesetzt in die Geradengleichung ergibt den Fußpunkt, genauer \vec{OF} und schließlich gilt: $d = |\vec{OF} - \vec{OP}|$.



Empfehlung:

In Klausuren sollte von der (sich zu merkenden) Beziehung

$$(\vec{a} + \lambda\vec{u} - \vec{OP}) \cdot \vec{u} = 0$$

ausgegangen werden, um zunächst λ zu bestimmen.

Um den Abstand mit dem GTR zu ermitteln, kann das Minimum der Funktion

$$d(\lambda) = |\vec{a} + \lambda\vec{u} - \vec{OP}|$$

bestimmt werden.

Empfehlenswert ist, die Vektoren \vec{a} und \vec{OP} zusammenzufassen.

Der Betrag wird wie üblich mit einer Wurzel aus einer Quadratsumme gebildet.

3. Berechne den Fußpunkt und den Abstand:

a) $P(0 | 0 | 20)$ $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -30 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $P(5 | 5 | 10)$ $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 30 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Abstand Punkt/Gerade

Berechne den Fußpunkt und den Abstand:

$$\text{a) } P(0 \mid 0 \mid 20) \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -30 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } P(5 \mid 5 \mid 10) \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 30 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösungen:

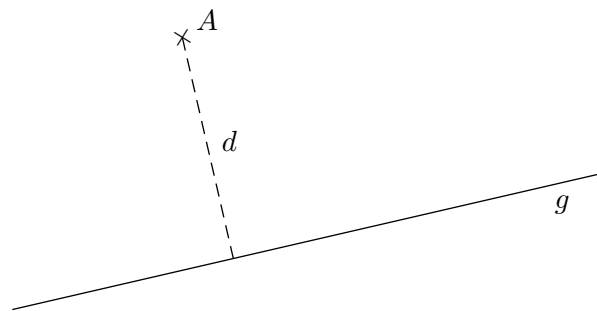
$$\text{a) } F(3 \mid 9 \mid 0), \quad \lambda = \frac{9}{10}, \quad d = 7\sqrt{10}$$

$$\text{b) } F(14 \mid 5 \mid -8), \quad \lambda = -8, \quad d = 9\sqrt{5}$$

Abstand Punkt/Gerade Laufender Punkt

Gegeben sind der Punkt $A(-1 | 3 | 6)$ und die Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$



Gesucht ist der Abstand d von A zu g .

Die Berechnung ist recht einprägsam, wenn die Geradengleichung als laufender Punkt geschrieben wird:

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{zusammengefasst:} \quad \vec{OP} = \begin{pmatrix} 2+t \\ -1+4t \\ 2+2t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Für das t , das zum Fußpunkt F gehört, gilt: $\vec{AP} \perp \vec{u}$, d.h.

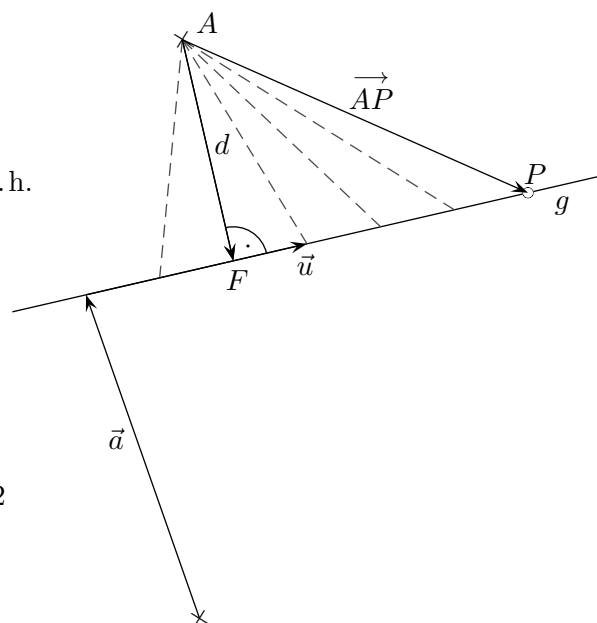
$$\vec{AP} \cdot \vec{u} = 0$$

$(\vec{OP} - \vec{OA}) \cdot \vec{u} = 0$ führt zu

$$(3+t) + (-4+4t) \cdot 4 + (-4+2t) \cdot 2 = 0 \quad \text{mit } t = 1.$$

$t = 1$ in die Geradengleichung eingesetzt ergibt

$$\text{den Fußpunkt } F(3 | 3 | 4), \quad d = |\vec{AF}| = 2\sqrt{5} = 4,472$$



Berechne den Fußpunkt und den Abstand:

a) $A(10 | 5 | 7)$ $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) $A(2 | -2 | 4)$ $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Abstand Punkt/Gerade

Berechne den Fußpunkt und den Abstand:

$$\text{a) } A(10 \mid 5 \mid 7) \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A(2 \mid -2 \mid 4) \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösungen:

$$\text{a) } F(6 \mid 3 \mid 1), \quad t = 2, \quad d = \sqrt{56} = 7,483$$

$$\text{b) } F(2 \mid -1 \mid 2), \quad t = 0, \quad d = \sqrt{5} = 2,236$$

Abstand Punkt/Gerade LK

1. Begründe:

$$d \cdot |\vec{u}| = |(\vec{OP} - \vec{a}) \times \vec{u}|$$

$$d = \frac{|(\vec{OP} - \vec{a}) \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

$$d = |(\vec{QP} - \vec{a}) \times \vec{u}^\circ|$$

$$d = |\vec{QP} \times \vec{u}^\circ|$$

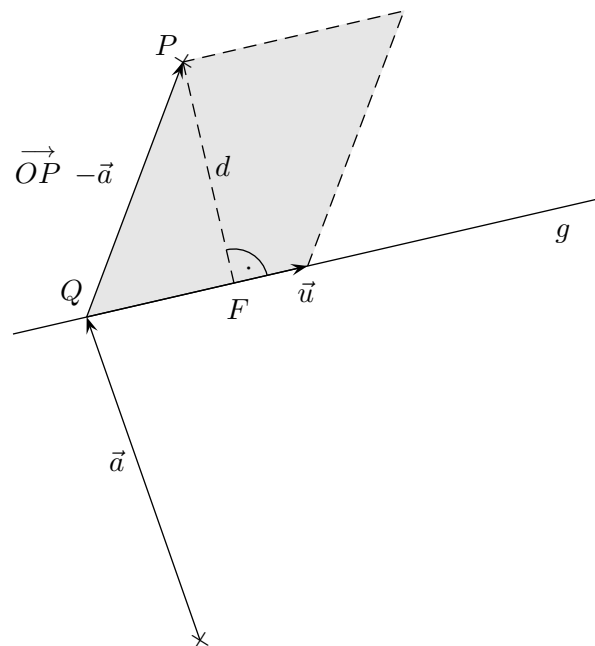
2. Begründe:

$$\lambda \vec{u} + \vec{d} = \vec{OP} - \vec{a} \quad | \cdot \vec{u}$$

...

$$\lambda = \frac{(\vec{OP} - \vec{a}) \cdot \vec{u}}{\vec{u}^2}$$

$$\lambda = \frac{\vec{QP} \cdot \vec{u}}{\vec{u}^2}$$



3. Berechne den Fußpunkt und den Abstand:

a) $P(5 | 1 | -2)$ $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $P(8 | 0 | 0)$ $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lösungen:

3. a) $F(4 | 2 | -4), \lambda = 2, d = \sqrt{6}$

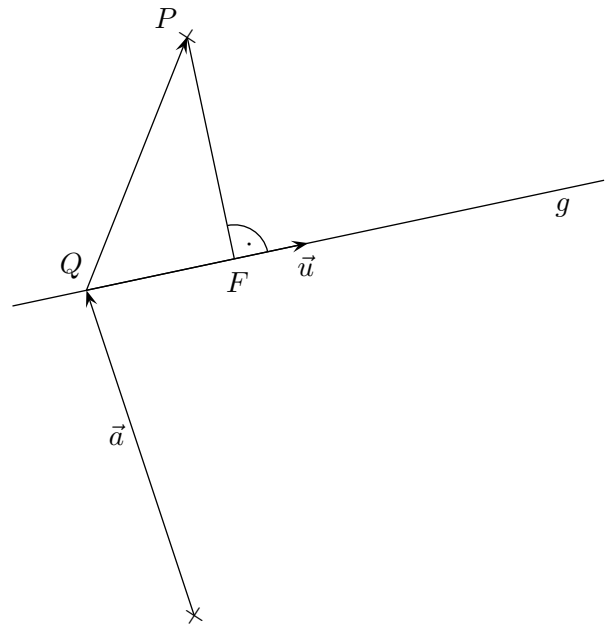
b) $F(3 | -5 | 2), \lambda = -2, d = \sqrt{54}$

Zum Lotfußpunkt F

Gegeben sind der Punkt P und die Gerade $g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{u}$.

$$\lambda = \frac{\vec{QP} \cdot \vec{u}}{\vec{u}^2}$$

führt zum Lotfußpunkt F .

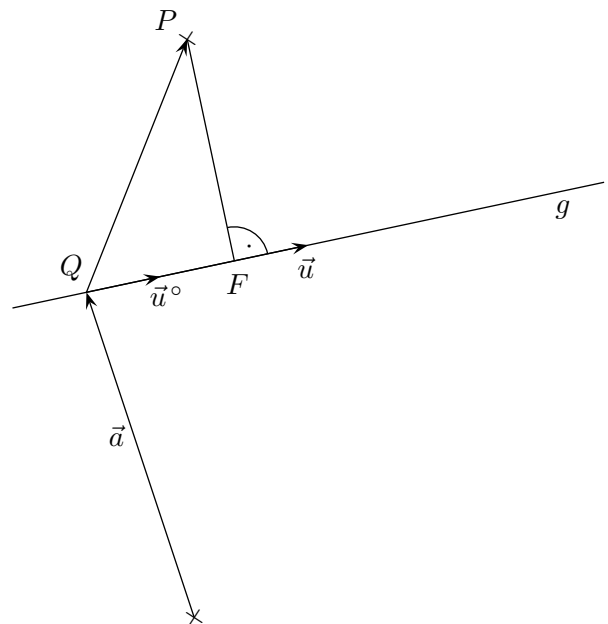


$$\vec{OF} = \vec{a} + \frac{\vec{QP} \cdot \vec{u}}{\vec{u}^2} \vec{u}$$

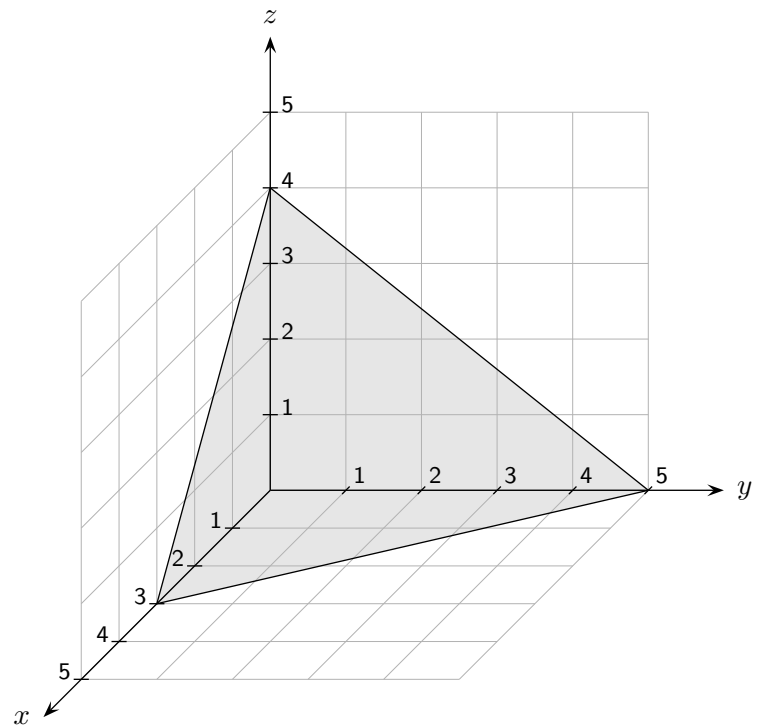
Dies kann mit wenigen Umformungen verifiziert werden.
Hierdurch wird auch der λ -Term verständlich.

$$\vec{OF} = \vec{a} + \frac{\vec{QP} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{u}|} \vec{u}$$

$$\vec{OF} = \vec{a} + \underbrace{(\vec{QP} \cdot \vec{u}^\circ)}_{|\vec{QP}| \cdot 1 \text{ (siehe Skalarprodukt)}} \vec{u}^\circ$$



Achsenabschnittsform der Ebene



$$\frac{x}{3} + \frac{y}{5} + \frac{z}{4} = 1$$

Die Gleichung der Ebene mit den Achsenabschnitten a , b und c lautet:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

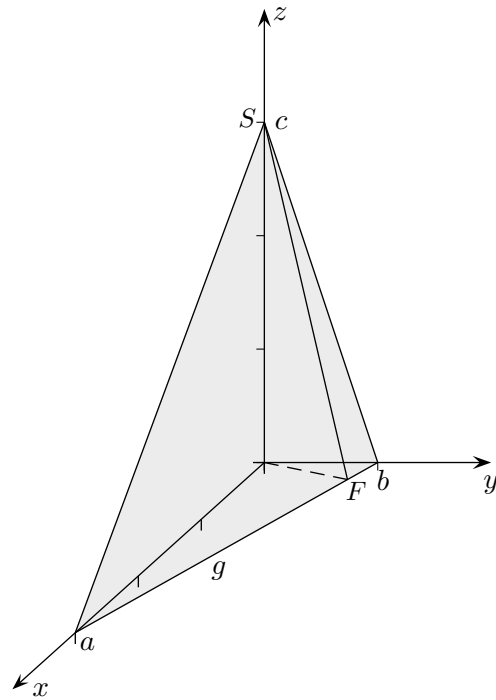
oder

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a} \\ \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 1 = 0$$

Dies kann unmittelbar mit einer Betrachtung der Achsen-Schnittpunkte bestätigt werden. Für die Schnittstelle x_0 der Ebene mit der x -Achse gilt z.B. $y = 0$ und $z = 0$, also $x_0 = a$.

Alternativ kann mit den Achsen-Schnittpunkten die Koordinatenform $bcx + acy + abz - abc = 0$ ermittelt werden.

Diese dividiert durch abc ergibt die Achsenabschnittsform.



Aufg.

Eine (punktförmige) Kugel rollt eine schräge Ebene E von S herab. Wo trifft die Kugel in der xy -Ebene auf?

Die Kugel rollt auf einer Linie SF , die senkrecht zur Spurgeraden g von E verläuft. Für den Fußpunkt F gilt $\vec{SF} \perp g$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{a^2}{a^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow \vec{OF} = \frac{ab}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da λ nicht von c abhängt, ist auch $\vec{OF} \perp g$.

Für weitere Fragestellungen siehe Abituraufgaben GK Bayern 2001.

Ergänzung (der Gradient ist kein verpflichtender Inhalt)

Die Ebene schließt mit der xy -Ebene den Winkel

$$\alpha = \arctan \frac{c}{|\vec{OF}|} = \arctan \frac{c\sqrt{a^2 + b^2}}{ab}$$

ein.

Für $z = c - \frac{c}{a}x - \frac{c}{b}y$ gilt dann:

$$\alpha = \arctan \frac{c\sqrt{a^2 + b^2}}{ab} = \arctan \left| \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \right|.$$

Wir erhalten: Die Steigung der Geraden des stärksten Anstiegs ist der Betrag des Gradienten.