Aufgaben Ebenen (Normalenform) und Schnitte

1. Untersuchen Sie, ob die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

   zu einer der Seitengeraden des Dreiecks $A(2\,|\,5\,|\,0)$ $B(6\,|\,3\,|\,3)$ $C(6\,|\,1\,|\,4)$ parallel oder sogar mit ihr gleich ist.

2. Wo durchstößt die Gerade h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -4{,}5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

   die durch die drei Punkte $A(0\,|\,0\,|\,-1)$, $B(1\,|\,0\,|\,1)$, $C(0\,|\,1\,|\,0)$ festgelegte Ebene?

3. Untersuchen Sie die folgenden Ebenen auf Parallelität und Gleichheit:

   E_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ E_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

4. Liegt der Ursprung in der Ebene, die durch die Punkte $A(0\,|\,-4\,|\,2)$, $B(4\,|\,1\,|\,-3)$, $C(0\,|\,2\,|\,-1)$ festgelegt ist?

5. Berechnen Sie den Schnittpunkt von Gerade und Ebene:

   a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ E: $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 0$

   b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\qquad$ E: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 0$

6. Berechnen Sie den Schnittpunkt von Gerade und Ebene:

   a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ E: $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 4 = 0$

   b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ E: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 5 = 0$

7. Gegeben ist die Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   a) Prüfen Sie, ob der Punkt $A(5\,|\,-2\,|\,1)$ in der Ebene liegt.

   b) Geben Sie eine Gleichung der Geraden an, die durch A und senkrecht zu E verläuft.

8. Gegeben ist die Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -16 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 15 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ 21 \\ 2 \end{pmatrix}$

   Die Gerade g verläuft durch $P(9 \,|\, -15 \,|\, 7)$ und $Q(-3 \,|\, -11 \,|\, 1)$.

   a) Wie lautet der Schnittpunkt von g und E?

   b) Zeigen Sie, dass g senkrecht zu E verläuft.

Vektorrechnung Ergebnisse

1. Die Gerade g ist parallel zur Seitengeraden $\vec{x} = \overrightarrow{OC} + \lambda\,(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC})$, sie sind jedoch nicht gleich. Um dies zu zeigen, wird nachgewiesen, dass <u>ein</u> Punkt der einen Geraden nicht auf der anderen liegt.

2. Eine Normalenform der Ebene lautet:

$$E\colon \quad \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + 1 = 0$$

   Mit $\lambda = 2$ erhalten wir den Schnittpunkt $S(3{,}5 \mid -2 \mid 4)$.

3. Die Normalenvektoren (Vektorprodukt) von E_1 und E_2 lauten: $\begin{pmatrix} -12 \\ 15 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -8 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$,

   die Normalenvektoren sind kollinear, daher sind die Ebenen parallel.

   Die Normalenform von E_1 lautet: $\begin{pmatrix} -12 \\ 15 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + 42 = 0$, durch Einsetzen kann nun leicht bestätigt werden, dass der Stützvektor $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ von E_2 zu einem Punkt von E_1 führt. Die Ebenen sind gleich.

4. Die Normalenform der Ebene lautet: $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 0$. Wie zu sehen ist, liegt der Ursprung O$(0 \mid 0 \mid 0)$ auf der Ebene.

5. a) $\lambda = 2$, $S(7 \mid 0 \mid 1)$ b) $\lambda = -3$, $S(-11 \mid 22 \mid -15)$

6. a) $\lambda = 2$, $S(6 \mid -3 \mid 1)$ b) $\lambda = 4$, $S(33 \mid -9 \mid 7)$

7. a) Die Normalenform von E lautet: $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 1 = 0$. Durch Einsetzen kann nun leicht bestätigt werden, dass der Punkt $A(5 \mid -2 \mid 1)$ auf der Ebene liegt.

   b) Eine Geradengleichung lautet: $g\colon \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

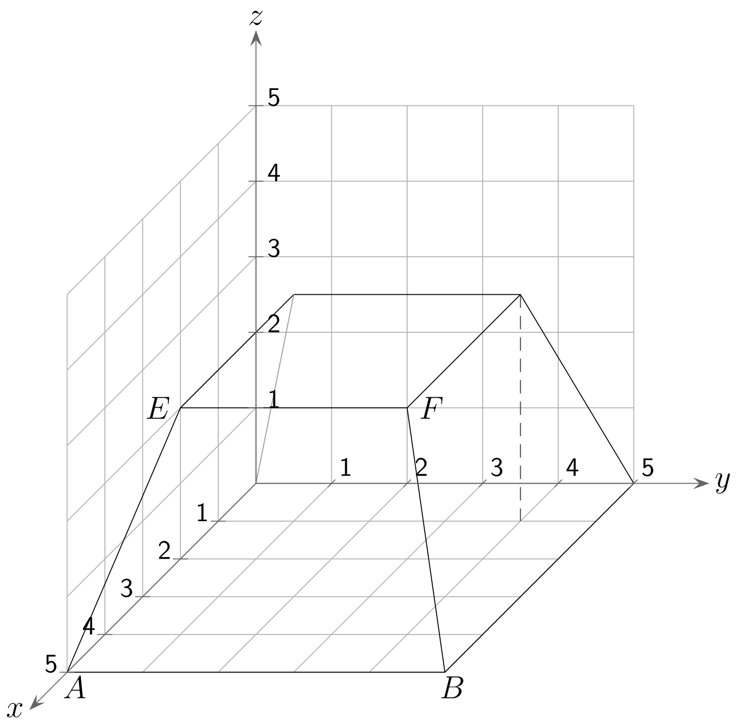
8. a) Die Normalenform von E lautet: $\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + 56 = 0$

b) Eine Geradengleichung von g lautet: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -15 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\lambda = -\frac{1}{2}$ ergibt den Schnittpunkt $S(3 \mid -13 \mid 4)$.

c) Der Richtungsvektor von g und der Normalenvektor von E sind kollinear.

Verschattung



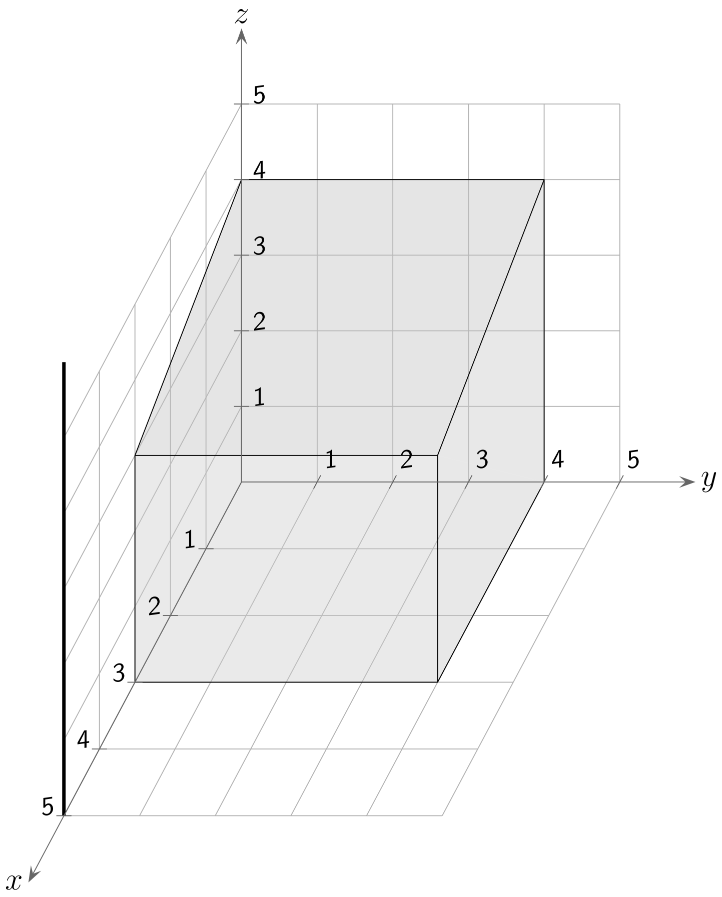
1. Der Sockel ist symmetrisch und hat die Höhe $h = 3$.
   Wir betrachten Schatten in der xy-Ebene.

   a) Welche Richtung müsste das (parallel) einfallende Sonnenlicht haben, damit es senkrecht auf die Fläche $ABFE$ trifft?

   b) Welche Richtung müsste das (parallel) einfallende Sonnenlicht haben, damit der Schattenpunkt von E B wäre?
   Berechne die übrigen Schattenpunkte und zeichne den Schatten.

   c) Sonnenlicht fällt nun in der Richtung $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ auf den Sockel.
   Berechne den Inhalt des Schattens.

Verschattung



2. Sonnenlicht fällt in der Richtung $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

   Berechne die Länge des Schattens, den der Mast (Länge $6\,m$) auf den Anbau wirft.
   Zeichne den Schatten.

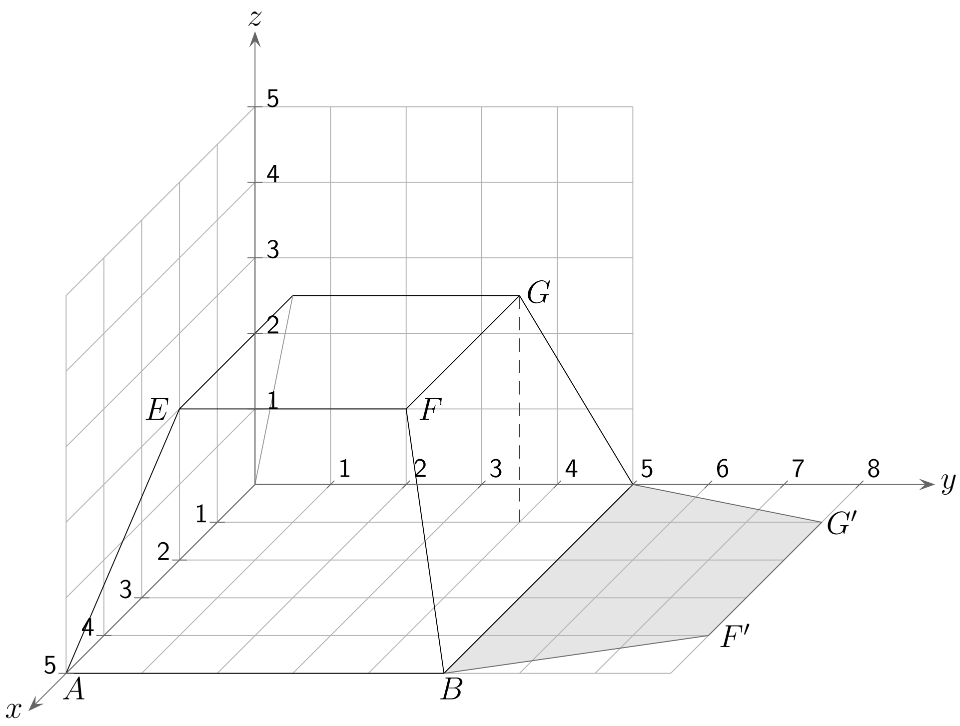
Verschattung Ergebnisse

1. a) Welche Richtung müsste das (parallel) einfallende Sonnenlicht haben, damit es senkrecht auf die Fläche $ABFE$ trifft? $3x + z = 15\,,\quad \overrightarrow{a} = -\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   b) Welche Richtung müsste das (parallel) einfallende Sonnenlicht haben, damit der Schattenpunkt von E B wäre? $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

   Berechne die übrigen Schattenpunkte und zeichne den Schatten.

   $F'(5 \mid 8 \mid 0)$
   $G'(2 \mid 8 \mid 0)$

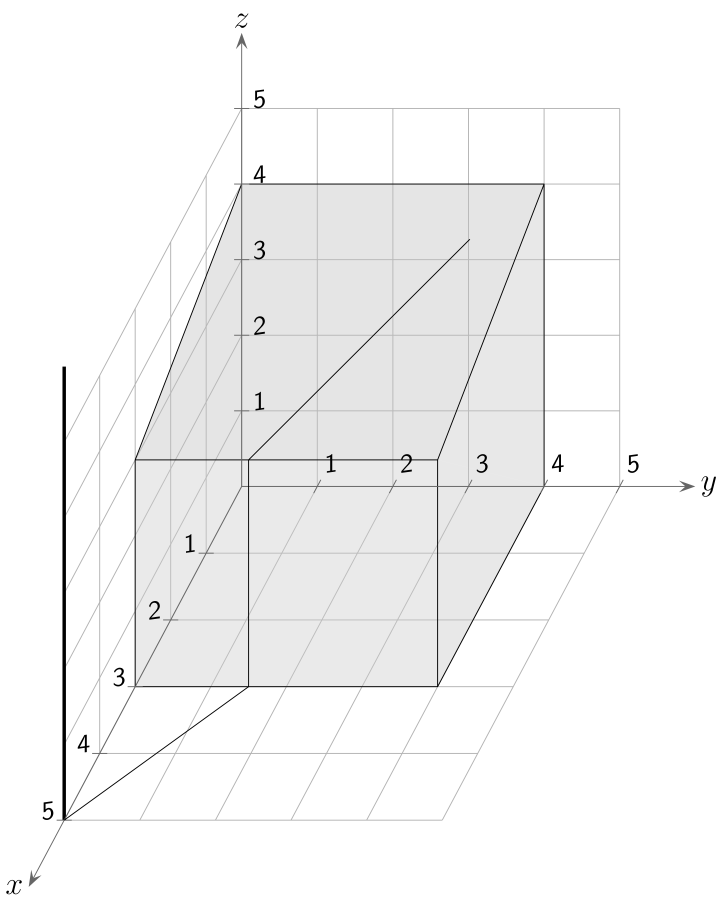


   c) Sonnenlicht fällt nun in der Richtung $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ auf den Sockel. Berechne den Inhalt des Schattens.

   $F'(4 \mid 10 \mid 0)$
   $G'(1 \mid 10 \mid 0)$

   $A_{\text{symm. Trapez}} = 20\,FE$

Verschattung Ergebnisse



2. Sonnenlicht fällt in der Richtung $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

   Berechne die Länge des Schattens, den der Mast (Länge $6\,m$) auf den Anbau wirft.
   Zeichne den Schatten.

Dachfläche $\quad x + 3z = 12$

Schattenpunkt auf dem Dach $\quad S'\left(\frac{3}{5} \mid \frac{33}{10} \mid \frac{19}{5}\right)$

Schattenpunkt auf der Dachkante $\quad D'\left(3 \mid \frac{3}{2} \mid 3\right)$

$L_{\text{Schatten}} = 6{,}105\ LE$