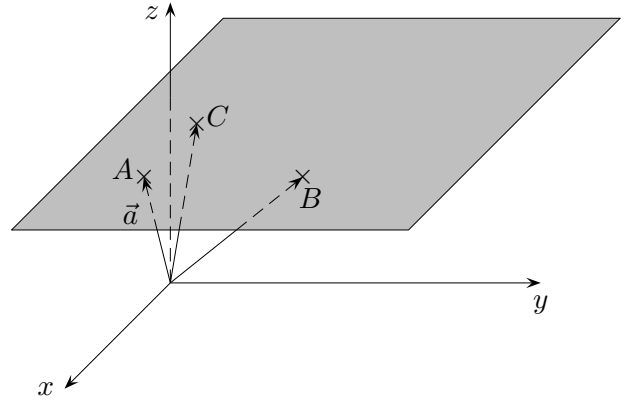


Parameterform der Ebene

Wie lautet die Gleichung der Ebene, in der die Punkte $A(2 | 1 | -3)$, $B(1 | 5 | 0)$ und $C(4 | -1 | 2)$ liegen?



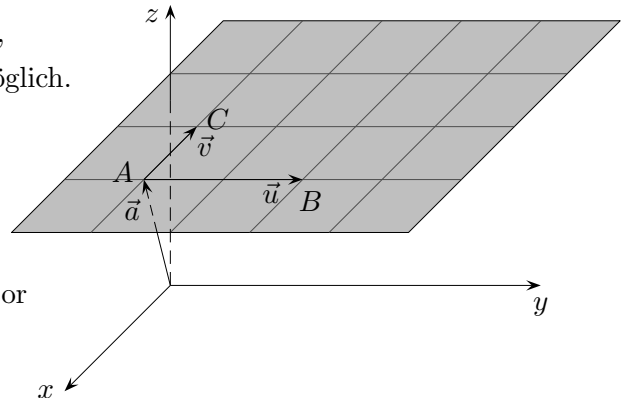
Die Richtung der Ebene kann durch die beiden Richtungsvektoren $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ erfasst werden.

Zur Lagebestimmung ist dann nur noch ein Stützvektor, z.B. $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, notwendig, \overrightarrow{OB} oder \overrightarrow{OC} wären auch möglich.

Damit erhalten wir die *Parameterform* der Ebenengleichung:

$$\vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$$

Wenn λ und μ alle Zahlen durchlaufen, erreicht der Vektor \vec{x} jeden Punkt der Ebene.



Für das Beispiel gilt:

$$\vec{u} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Die Ebenengleichung lautet:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

1. Wie lautet die Gleichung der Ebene, in der die Punkte $C(3 | -3 | 1)$, $D(4 | 2 | 0)$ und $E(-1 | 1 | 2)$ liegen?

2. Wie lautet die Gleichung der Ebene, die den Punkt $A(2 | 2 | 3)$

und die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ enthält?

Ebene Aufgaben

1. Wie lautet die Gleichung der Ebene, in der die Punkte $C(3 | -3 | 1)$, $D(4 | 2 | 0)$ und $E(-1 | 1 | 2)$ liegen?
2. Wie lautet die Gleichung der Ebene, die den Punkt $A(2 | 2 | 3)$ und die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ enthält?

Lösungen

1. $\vec{x} = \vec{OC} + \lambda \vec{CD} + \mu \vec{CE}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder z.B.}$$

$$\vec{x} = \vec{OD} + \lambda \vec{DC} + \mu \vec{ED}$$

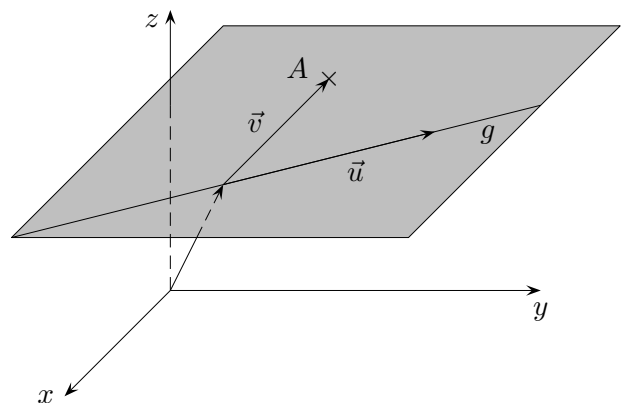
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2. Von der Geraden können der Stütz- und der Richtungsvektor für die Ebenengleichung übernommen werden. Als zweiten Richtungsvektor nehmen wir:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

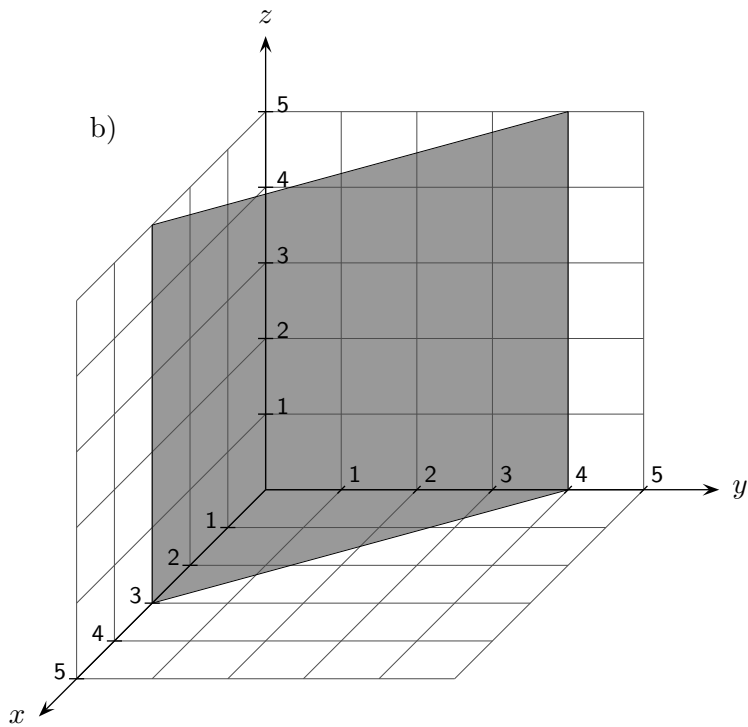
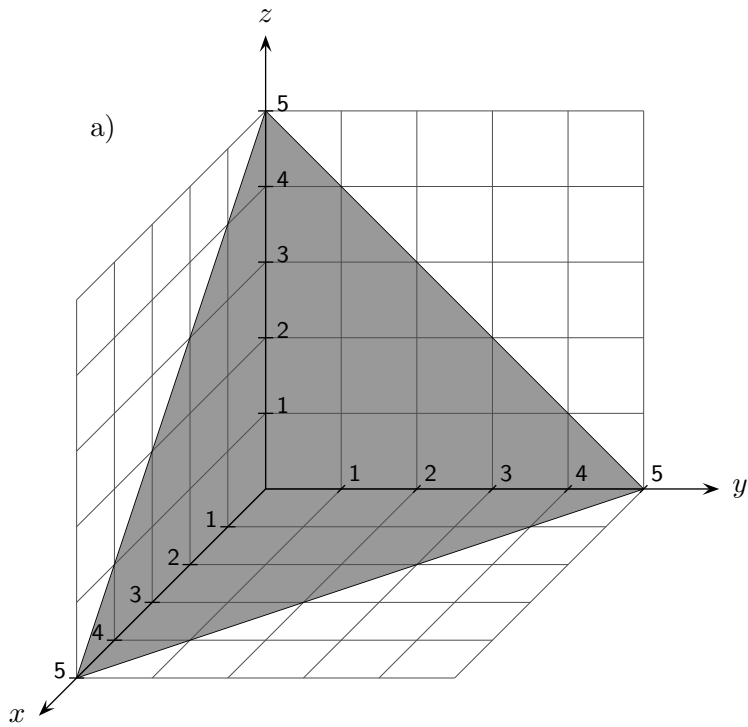
insgesamt erhalten wir:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$



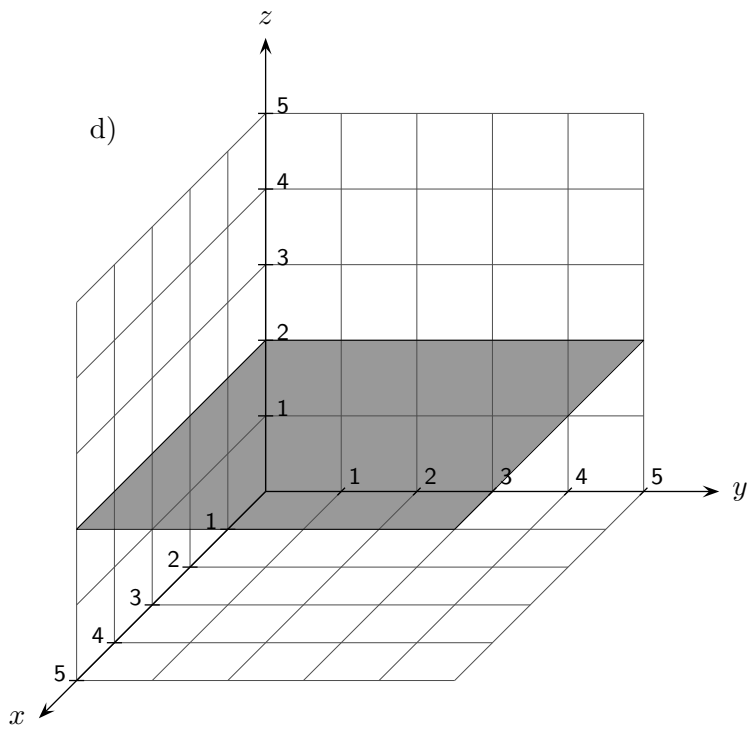
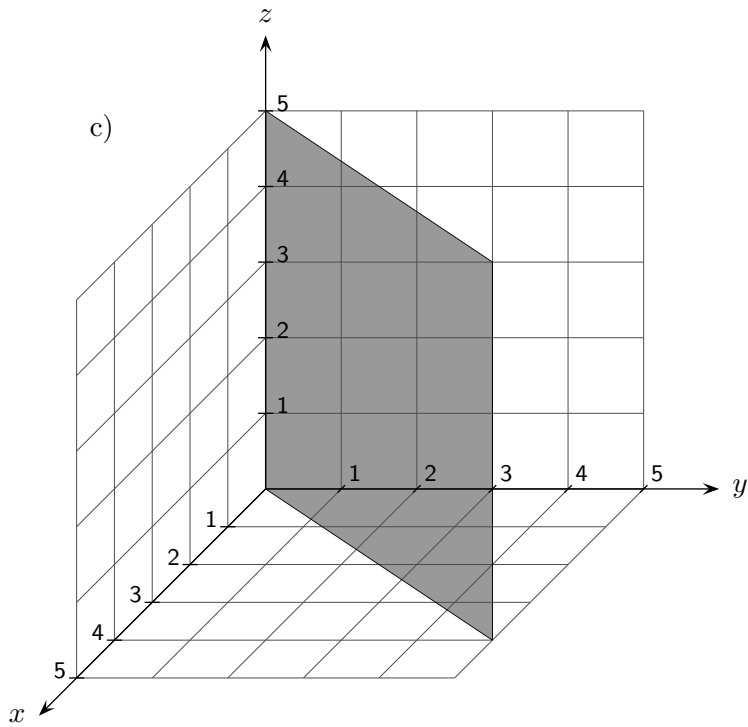
Ebenen

Ermittle die Ebenengleichung.



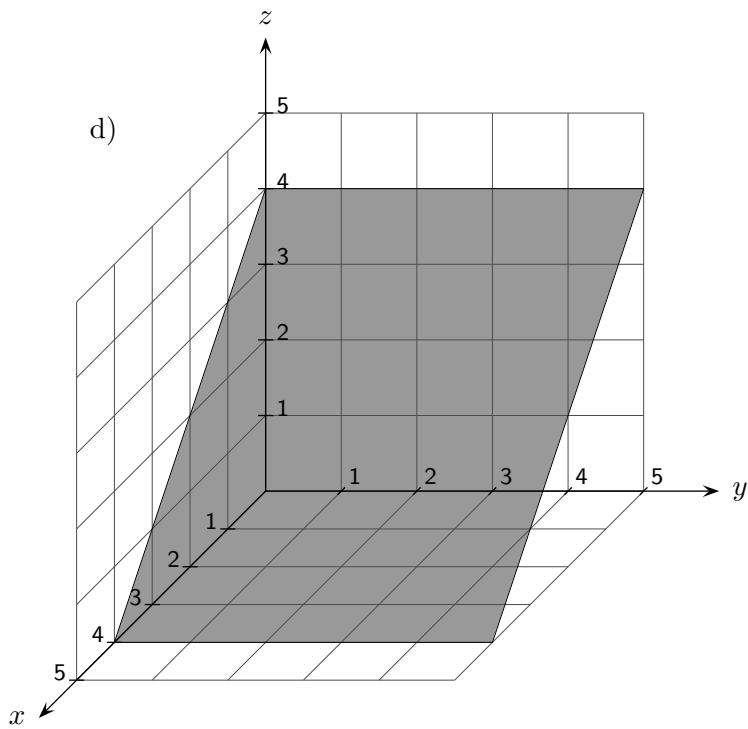
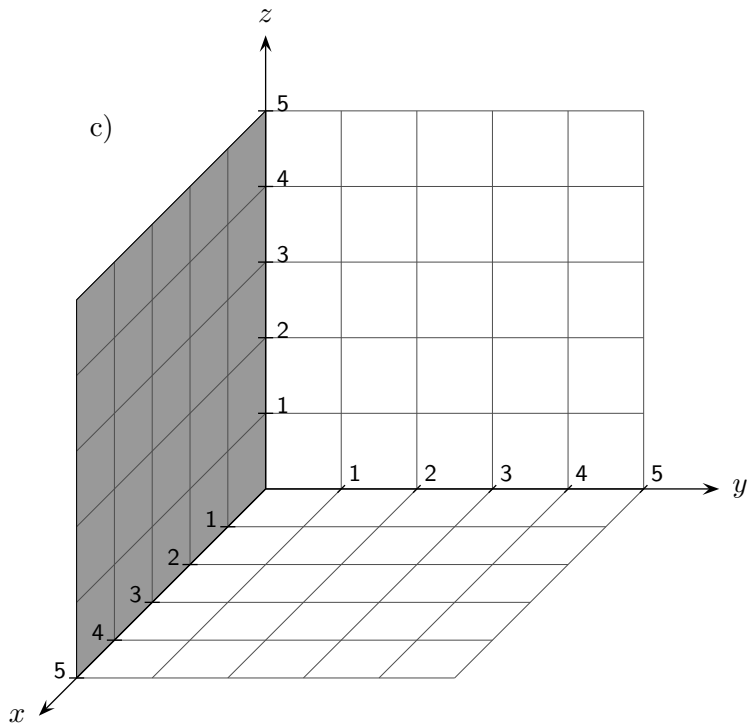
Ebenen

Ermittle die Ebenengleichung.



Ebenen

Ermittle die Ebenengleichung.



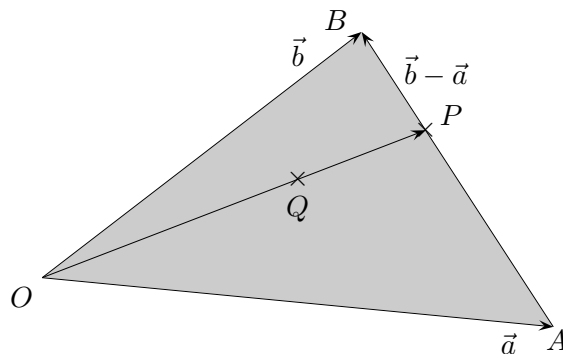
Punkte des Dreiecks

Die Eckpunkte eines Dreiecks im \mathbb{R}^3 seien A , B und der Ursprung O .

Wie kann rechnerisch überprüft werden, ob ein Punkt Q auf dem Dreieck liegt?

Für einen Punkt P auf der Strecke \overline{AB} gilt:

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= \vec{a} + m(\vec{b} - \vec{a}) & \text{mit} & \quad 0 \leq m \leq 1 \\ &= \vec{a} + m\vec{b} - m\vec{a} \\ &= \underbrace{(1 - m)}_n \vec{a} + m\vec{b} \end{aligned}$$



P liegt daher genau dann auf der Strecke \overline{AB} , wenn für $\vec{OP} = n\vec{a} + m\vec{b}$ die Summe der (nicht negativen) Koeffizienten 1 ergibt, $n + m = 1$.

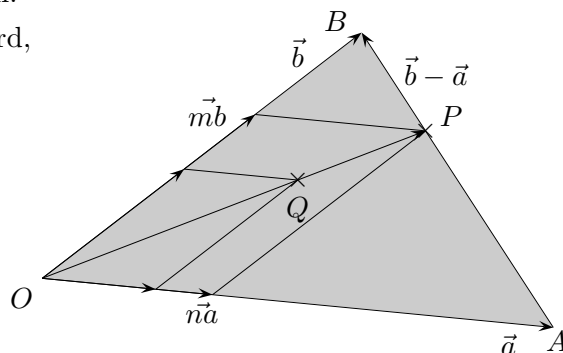
Der nebenstehenden Zeichnung kann nun entnommen werden:

Wenn \vec{OQ} als Linearkombination von \vec{a} und \vec{b} dargestellt wird, muss die Summe der Koeffizienten kleiner gleich 1 sein.

Eine pingelige Begründung sieht so aus:

Für einen Punkt Q auf der Strecke \overline{OP} gilt:

$$\begin{aligned} \vec{OQ} &= k \vec{OP} & \text{mit} & \quad 0 \leq k \leq 1 \\ &= k(n\vec{a} + m\vec{b}) & \text{mit} & \quad n + m = 1 \\ &= kn\vec{a} + km\vec{b} \end{aligned}$$



Die Summe der (nicht negativen) Koeffizienten ist kleiner gleich 1, denn:

$$\begin{aligned} kn + km &= k(n + m) \\ &= k \leq 1 \end{aligned}$$

Aufgabe

Zeige, dass die Punkte $A(5 \mid 5 \mid 3)$, $B(4 \mid 3 \mid 5)$ und $C(8 \mid -1 \mid 3)$ zu einem Rechteck ergänzt werden können und ermittle den vierten Eckpunkt.

Untersuche, ob der Punkt $P(\frac{23}{4} \mid \frac{7}{2} \mid 3)$ auf dem Rechteck liegt.

Kann die Lage von P genauer beschrieben werden?

Aufgabe

Zeige, dass die Punkte $A(5 | 5 | 3)$, $B(4 | 3 | 5)$ und $C(8 | -1 | 3)$ zu einem Rechteck ergänzt werden können und ermittle den vierten Eckpunkt.

Untersuche, ob der Punkt $P(\frac{23}{4} | \frac{7}{2} | 3)$ auf dem Rechteck liegt.

Kann die Lage von P genauer beschrieben werden?

$$D(9 | 1 | 1)$$

$$\vec{OP} = \vec{OB} + \frac{3}{4} \vec{BA} + \frac{1}{4} \vec{BC}$$

P liegt daher auf dem Dreieck ABC , genauer auf der Dreiecksseite \overline{AC} .