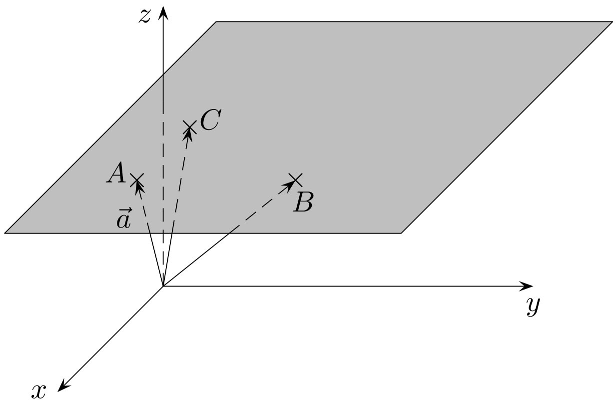
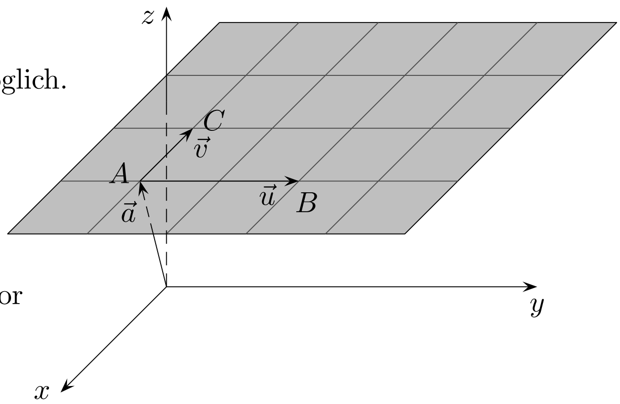
Parameterform der Ebene

Wie lautet die Gleichung der Ebene, in der die Punkte $A(2\,|\,1\,|\,-3)$, $B(1\,|\,5\,|\,0)$ und $C(4\,|\,-1\,|\,2)$ liegen?



Die Richtung der Ebene kann durch die beiden Richtungsvektoren $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ erfasst werden.
Zur Lagebestimmung ist dann nur noch ein Stützvektor, z. B. $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, notwendig, $\overrightarrow{OB}$ oder $\overrightarrow{OC}$ wären auch möglich.



Damit erhalten wir die *Parameterform* der Ebenengleichung:

$$\vec{x} = \vec{a} + \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v}$$

Wenn λ und μ alle Zahlen durchlaufen, erreicht der Vektor $\vec{x}$ jeden Punkt der Ebene.

Für das Beispiel gilt:

$$\vec{u} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Die Ebenengleichung lautet:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

1. Wie lautet die Gleichung der Ebene, in der die Punkte $C(3\,|\,-3\,|\,1)$, $D(4\,|\,2\,|\,0)$ und $E(-1\,|\,1\,|\,2)$ liegen?

2. Wie lautet die Gleichung der Ebene, die den Punkt $A(2\,|\,2\,|\,3)$ und die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ enthält?

Ebene Aufgaben

1. Wie lautet die Gleichung der Ebene, in der die Punkte
   $C(3\,|\,-3\,|\,1)$, $D(4\,|\,2\,|\,0)$ und $E(-1\,|\,1\,|\,2)$ liegen?

2. Wie lautet die Gleichung der Ebene, die den Punkt $A(2\,|\,2\,|\,3)$
   und die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ enthält?

Lösungen

1. $\vec{x} = \overrightarrow{OC} + \lambda\, \overrightarrow{CD} + \mu\, \overrightarrow{CE}$

   $$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder z. B.}$$

   $\vec{x} = \overrightarrow{OD} + \lambda\, \overrightarrow{DC} + \mu\, \overrightarrow{ED}$

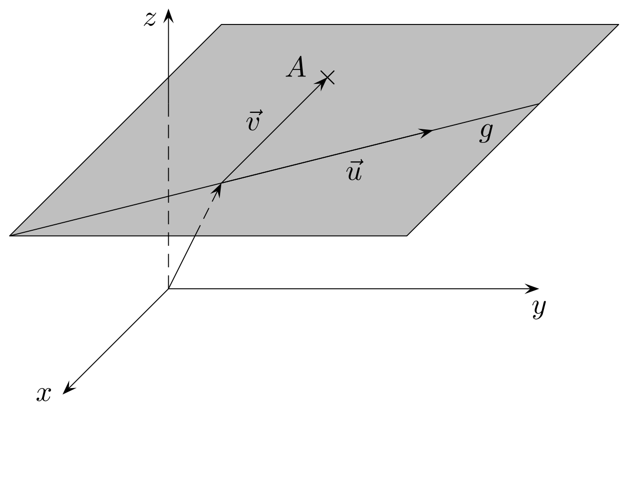
   $$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2. Von der Geraden können der Stütz- und der Richtungsvektor für die Ebenengleichung übernommen werden. Als zweiten Richtungsvektor nehmen wir:

   $$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

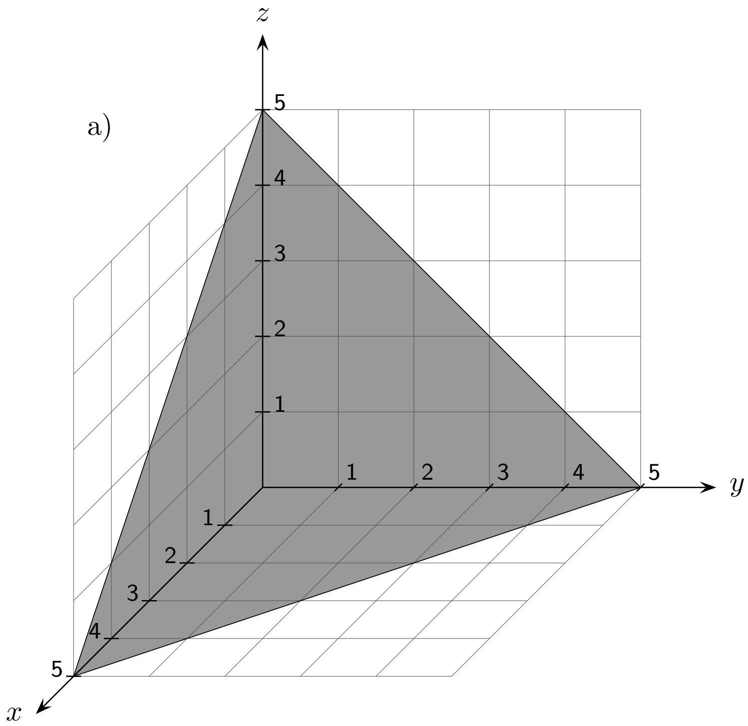
   insgesamt erhalten wir:

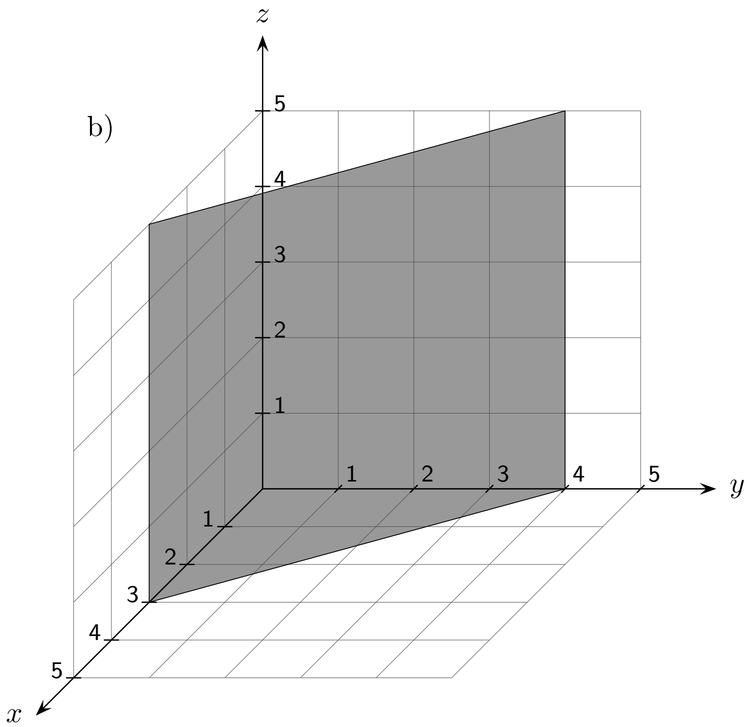
   $$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Ebenen

Ermittle die Ebenengleichung.

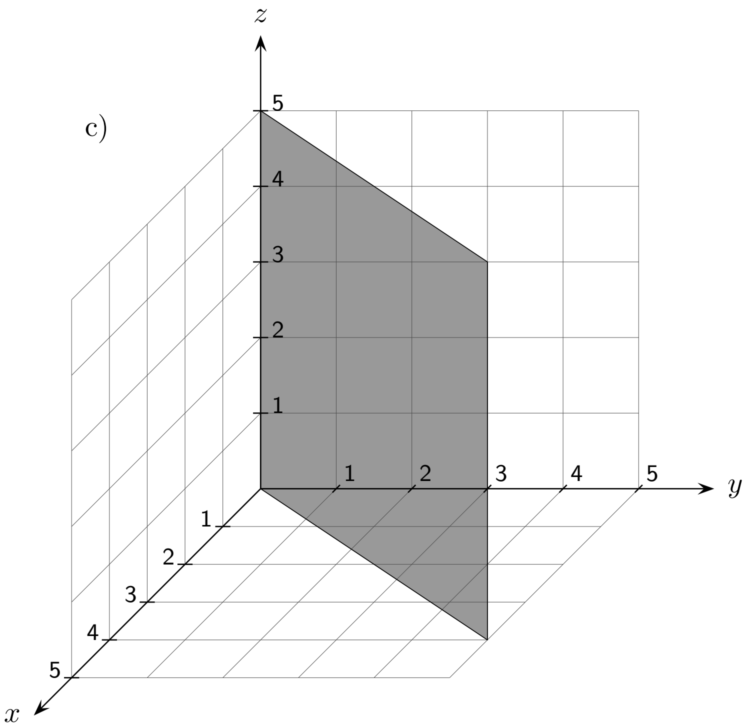




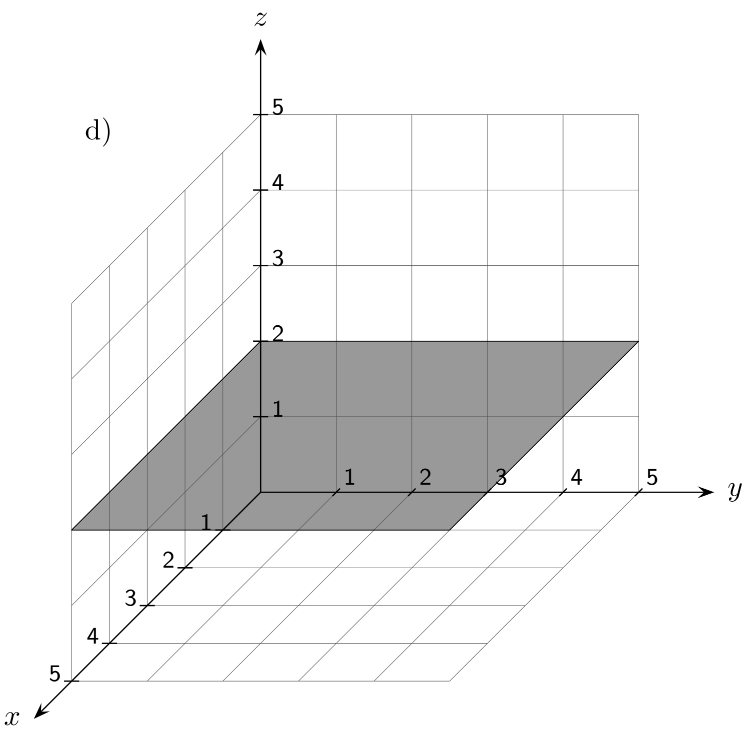
Ebenen

Ermittle die Ebenengleichung.

c)



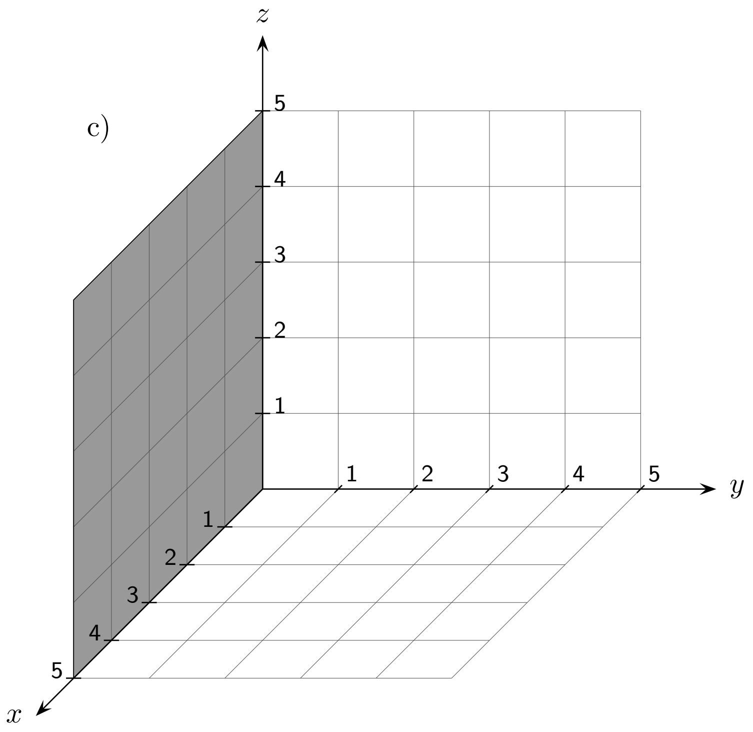
d)



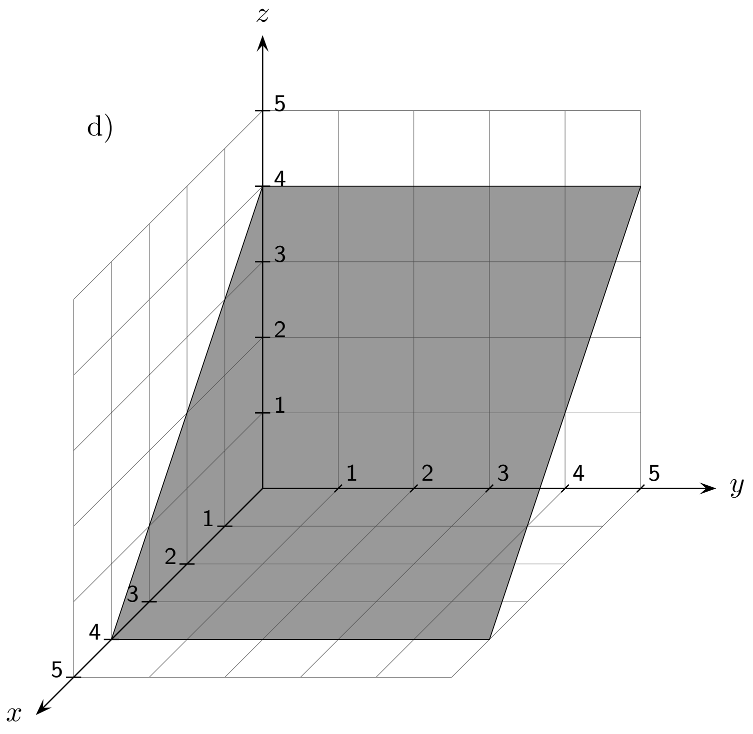
Ebenen

Ermittle die Ebenengleichung.

c)

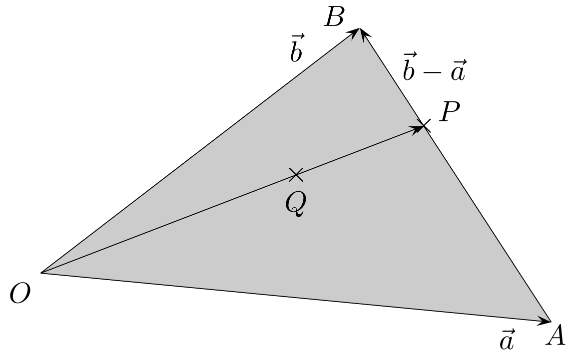


d)



Punkte des Dreiecks

Die Eckpunkte eines Dreiecks im $\mathbb{R}^3$ seien A, B und der Ursprung O.
Wie kann rechnerisch überprüft werden, ob ein Punkt Q auf dem Dreieck liegt?

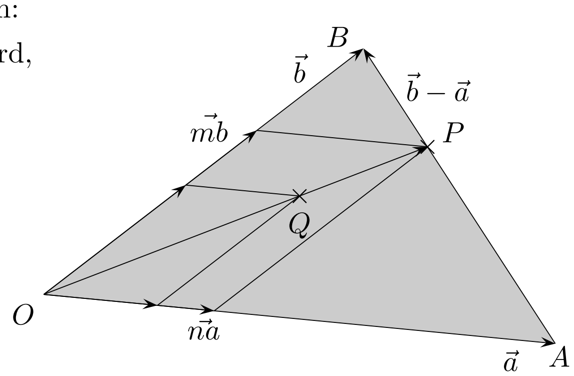


Für einen Punkt P auf der Strecke $\overline{AB}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OP} &= \vec{a} + m(\vec{b} - \vec{a}) \qquad \text{mit} \qquad 0 \le m \le 1 \\
&= \vec{a} + m\vec{b} - m\vec{a} \\
&= \underbrace{(1-m)}_{n}\,\vec{a} + m\vec{b}
\end{aligned}$$

P liegt daher genau dann auf der Strecke $\overline{AB}$, wenn für $\overrightarrow{OP} = n\vec{a} + m\vec{b}$ die Summe der (nicht negativen) Koeffizienten 1 ergibt, $n + m = 1$.

Der nebenstehenden Zeichnung kann nun entnommen werden:
Wenn $\overrightarrow{OQ}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dargestellt wird, muss die Summe der Koeffizienten kleiner gleich 1 sein.



Eine pingelige Begründung sieht so aus:
Für einen Punkt Q auf der Strecke $\overline{OP}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OQ} &= k\,\overrightarrow{OP} \qquad \text{mit} \qquad 0 \le k \le 1 \\
&= k\,(n\vec{a} + m\vec{b}) \qquad \text{mit} \qquad n + m = 1 \\
&= kn\,\vec{a} + km\,\vec{b}
\end{aligned}$$

Die Summe der (nicht negativen) Koeffizienten ist kleiner gleich 1, denn:

$$\begin{aligned}
kn + km &= k(n+m) \\
&= k \le 1
\end{aligned}$$

Aufgabe

Zeige, dass die Punkte $A(5\,|\,5\,|\,3)$, $B(4\,|\,3\,|\,5)$ und $C(8\,|\,-1\,|\,3)$ zu einem Rechteck ergänzt werden können und ermittle den vierten Eckpunkt.
Untersuche, ob der Punkt $P\left(\frac{23}{4}\,|\,\frac{7}{2}\,|\,3\right)$ auf dem Rechteck liegt.
Kann die Lage von P genauer beschrieben werden?

Aufgabe

Zeige, dass die Punkte $A(5\,|\,5\,|\,3)$, $B(4\,|\,3\,|\,5)$ und $C(8\,|\,-1\,|\,3)$ zu einem Rechteck ergänzt werden können und ermittle den vierten Eckpunkt.
Untersuche, ob der Punkt $P\left(\frac{23}{4}\,|\,\frac{7}{2}\,|\,3\right)$ auf dem Rechteck liegt.
Kann die Lage von P genauer beschrieben werden?

$D(9\,|\,1\,|\,1)$

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \frac{3}{4}\,\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\,\overrightarrow{BC}$

P liegt daher auf dem Dreieck ABC, genauer auf der Dreiecksseite $\overline{AC}$.