Lineare Unabhängigkeit

1. *Die Seitenmitten eines Vierecks (im Raum) sind die Eckpunkte eines Parallelogramms.*
   (1731 Pierre Varignon)

   $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$

   $\overrightarrow{OE} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \frac{1}{2}$

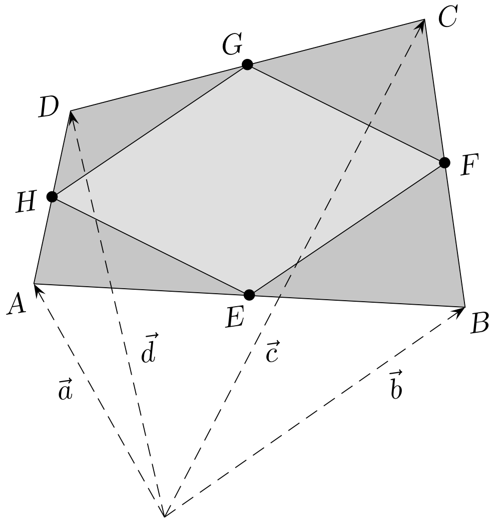
   $\overrightarrow{OF} = (\vec{b} + \vec{c}) \cdot \frac{1}{2}$

   $\overrightarrow{OG} = (\vec{c} + \vec{d}) \cdot \frac{1}{2}$

   $\overrightarrow{OH} = (\vec{a} + \vec{d}) \cdot \frac{1}{2}$

   $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OE} = \ ... \ = (\vec{c} - \vec{a}) \cdot \frac{1}{2}$

   $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OE} = \ ... \ = (\vec{d} - \vec{b}) \cdot \frac{1}{2}$



   Aus den Darstellungen für $\overrightarrow{HG}$ und $\overrightarrow{FG}$ ist alles zu erkennen.

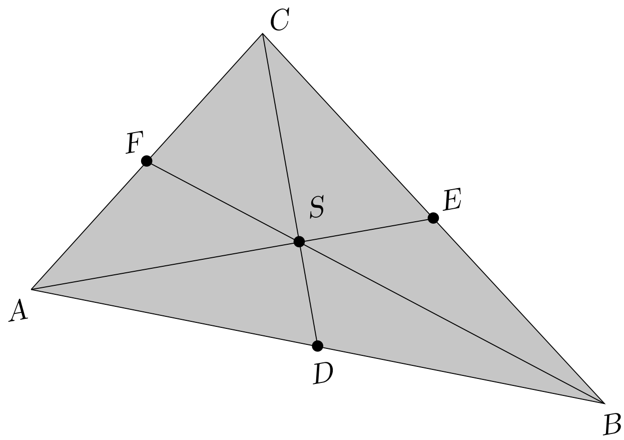
2. *Die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt. Der Schnittpunkt teilt jede Seitenhalbierende im Verhältnis 1:2 . Dieser Punkt ist der Schwerpunkt des Dreiecks.*

   Sei A *der Ursprung und* $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ *und* $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

   Gerade BF: $\quad \vec{x} = \vec{a} + \lambda \, \overrightarrow{BF}$

   $\vec{x} = \vec{a} + \lambda \, (\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a})$

   Gerade AE: $\quad \vec{x} = \lambda \, \frac{1}{2} \, (\vec{a} + \vec{b})$



   Schnitt: $\quad \vec{a} + \lambda \, (\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}) \ = \ \mu \, \frac{1}{2} \, (\vec{a} + \vec{b})$

   $\iff \quad (1 - \lambda - \frac{1}{2}\mu) \, \vec{a} \ + \ (\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\mu)\vec{b} \ = \ \vec{0}$

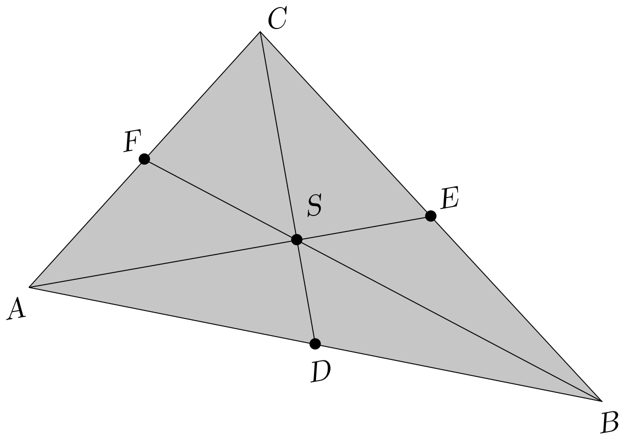
   $\iff \quad \lambda = \frac{2}{3}, \qquad \mu = \frac{2}{3}$

   Die Gerade CD *verläuft auch durch* S.

Die n Vektoren $\vec{a}_1, \ \vec{a}_2, \ ... \ , \vec{a}_n$ heißen voneinander linear unabhängig, falls aus jeder Linearkombination des Nullvektors $\lambda_1 \, \vec{a}_1 \ + \ \lambda_2 \, \vec{a}_2 \ + \ ... \ + \ \lambda_n \, \vec{a}_n \ = \ \vec{0}$ folgt, dass alle λ_i null sind. Andernfalls sind sie linear abhängig.

Die n Vektoren $\vec{a}_1, \ \vec{a}_2, \ ... \ , \vec{a}_n$ sind genau dann linear abhängig, wenn es eine Linearkombination des Nullvektors gibt, bei der ein (mindestens) λ_i ungleich null ist. Die Linearkombination kann dann nach $\vec{a}_i$ umgestellt werden, d. h. (mindestens) ein Vektor ist als Linearkombination der übrigen Vektoren darstellbar.

Schwerpunkt



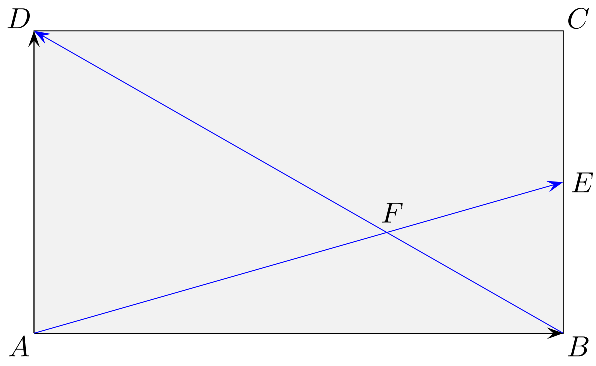
$$\overrightarrow{S} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C})$$

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \overrightarrow{AB} \\
\vec{b} &= \overrightarrow{AC} \\
\overrightarrow{S} &= \overrightarrow{A} + \mu\,\frac{1}{2}\,(\vec{a} + \vec{b}) \\
\mu &= \frac{2}{3} && \text{siehe vorige Seite} \\
&\dots \\
\overrightarrow{S} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C})
\end{aligned}$$

beachte

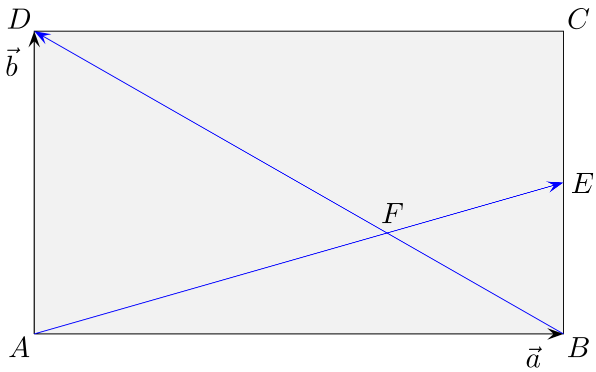
$$\overrightarrow{M} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}) \qquad \text{Mittelpunkt einer Strecke } AB$$

Teilverhältnis



E halbiert die Rechteckseite BC.
In welchem Verhältnis teilt F die Strecken AE und BD?

Teilverhältnis



E halbiert die Rechteckseite BC.
In welchem Verhältnis teilt F die Strecken AE und BD?

Gerade AE: $\quad \vec{x} = \lambda\,\overrightarrow{AE}$

$$\vec{x} = \lambda\,(\vec{a} + \tfrac{1}{2}\vec{b})$$

Gerade BD: $\quad \vec{x} = \vec{a} + \mu\,(\vec{b} - \vec{a})$

Schnitt: $\quad \vec{a} + \mu\,(\vec{b} - \vec{a}) \;=\; \lambda\,(\vec{a} + \tfrac{1}{2}\vec{b})$

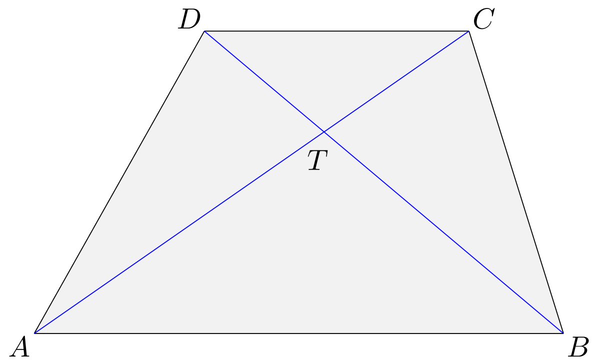
$$\iff \quad (1 - \lambda - \mu)\,\vec{a} \;+\; (\mu - \tfrac{1}{2}\lambda)\vec{b} \;=\; \vec{0}$$

$$\iff \quad \begin{array}{r} 1 - \lambda - \mu = 0 \\ \mu - \tfrac{1}{2}\lambda = 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\iff \quad \lambda = \tfrac{2}{3}, \qquad \mu = \tfrac{1}{3}$$

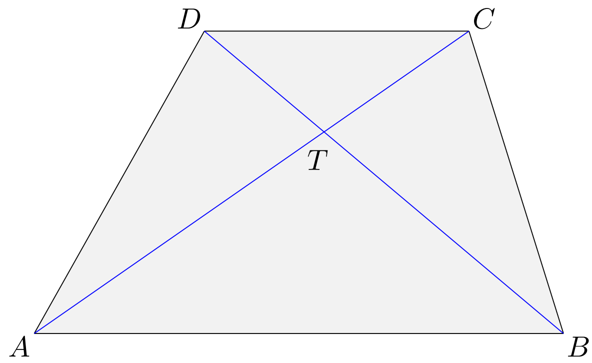
F teilt AE im Verhältnis 2:1, BD im Verhältnis 1:2.

Teilverhältnis



In einem (nicht unbedingt symmetrischen) Trapez ist die Strecke DC halb so lang wie die Strecke AB. In welchem Verhältnis teilt T die Diagonalen?

Teilverhältnis



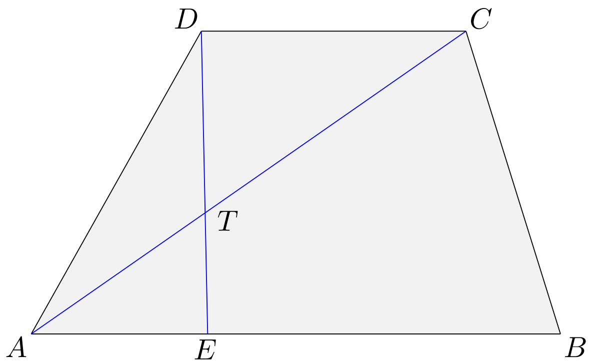
In einem (nicht unbedingt symmetrischen) Trapez ist die Strecke DC halb so lang wie die Strecke AB. In welchem Verhältnis teilt T die Diagonalen?

$$\begin{array}{r} 1-\lambda-\frac{1}{2}\lambda=0 \\ \lambda-\mu=0 \\ \hline \end{array}$$

$$\lambda=\mu=\frac{2}{3}$$

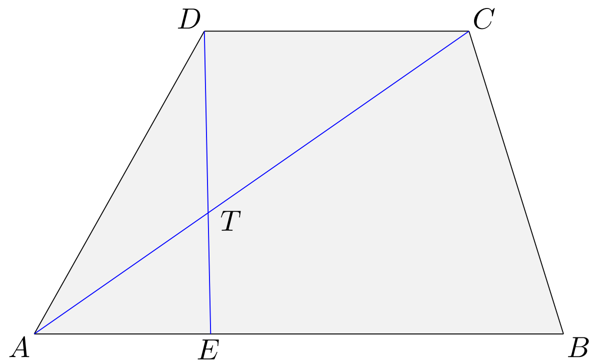
T teilt AC und BD im Verhältnis 2:1.

Teilverhältnis



In einem (nicht unbedingt symmetrischen) Trapez ist die Strecke DC
halb so lang wie die Strecke AB. E teilt die Strecke AB im Verhältnis 1:2.
In welchem Verhältnis teilt T die Strecken AC und ED?

Teilverhältnis



In einem (nicht unbedingt symmetrischen) Trapez ist die Strecke DC halb so lang wie die Strecke AB. E teilt die Strecke AB im Verhältnis 1:2. In welchem Verhältnis teilt T die Strecken AC und ED?

$$\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{3}\mu = \frac{1}{3}$$
$$\lambda - \mu = 0$$

$$\lambda = \mu = \frac{2}{5}$$

T teilt AC und ED im Verhältnis 2:3.