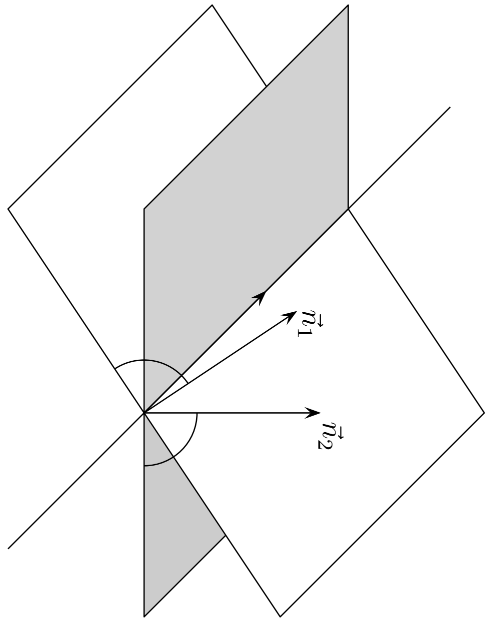
Schnitt zweier Ebenen

1. Gegeben sind die beiden Ebenen:

E_1: $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 1 = 0$ $\qquad$ E_2: $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 6 = 0$

Bestimme die Schnittgerade.



Der Richtungsvektor der Schnittgeraden zweier Ebenen steht senkrecht auf den Normalenvektoren beider Ebenen.

Ein Richtungsvektor ergibt sich daher aus dem Vektorprodukt der beiden Normalenvektoren.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 26 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Ein Stützvektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ müsste beiden Ebenengleichungen genügen:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 1 = 0 \qquad \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 6 = 0$$

Hierbei kann eine Koordinate z.B. $z = 0$ vorgegeben werden, x und y sind dann auszurechnen.

$$\begin{array}{rcrcr} 3x & - & 4y & = & 1 \\ 5x & + & 2y & = & 6 \\ \hline & & x & = & 1 \\ & & y & = & \frac{1}{2} \end{array}$$

Insgesamt erhalten wir die Gleichung der Schnittgeraden:

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$$

2. Bestimme die Schnittgerade.

a) E_1: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 3 = 0$ $\qquad$ E_2: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 4 = 0$

b) E_1: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 3 = 0$ $\qquad$ E_2: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 2 = 0$

Schnitt zweier Ebenen

2. Bestimme die Schnittgerade.

a) E_1: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 3 = 0$ $\qquad$ E_2: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 4 = 0$

Lösung: g: $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) E_1: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 3 = 0$ $\qquad$ E_2: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 2 = 0$

g: $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. Alternativ zum obigen Vorgehen kann auch das Gleichungssystem gelöst werden (z.B. z fest):

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 4y & + & z & = & 1 \\ 5x & + & 2y & - & 3z & = & 6 \\ \hline \end{array}$$

Lösung: $S\left(\frac{5}{13}z + 1 \mid \frac{7}{13}z + \frac{1}{2} \mid z\right)$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{5}{13}z + 1 \\ \frac{7}{13}z + \frac{1}{2} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \frac{5}{13} \\ \frac{7}{13} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Schnittgerade zweier Ebenen mit dem GTR

Das unterbestimmte Gleichungssystem, das beim Schnitt von nicht parallelen Ebenen auftritt, kann ohne Mühe mit dem GTR gelöst werden:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 4y & + & z & = & 1 \\ 5x & + & 2y & - & 3z & = & 6 \\ \hline \end{array}$$

Der GTR liefert:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -\frac{5}{13} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{13} & \frac{1}{2} \\ \hline \end{array}$$

Das heißt:

$$\begin{array}{ccccc} x & + & (-\frac{5}{13}z) & = & 1 \\ y & + & (-\frac{7}{13}z) & = & \frac{1}{2} \\ \hline \end{array}$$

und damit:

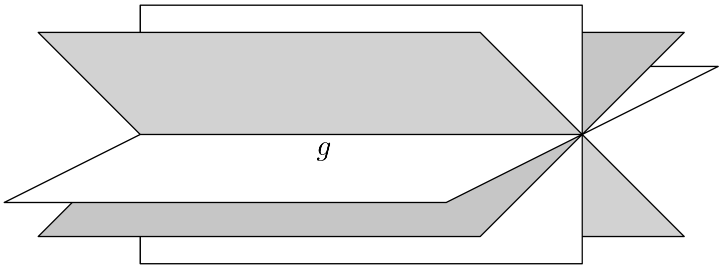
$$\begin{array}{ccccc} x & = & \frac{5}{13}z & + & 1 \\ y & = & \frac{7}{13}z & + & \frac{1}{2} \\ \hline \end{array}$$

Lösung: $S\left(\frac{5}{13}z+1 \mid \frac{7}{13}z+\frac{1}{2} \mid z\right)$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{5}{13}z+1 \\ \frac{7}{13}z+\frac{1}{2} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \frac{5}{13} \\ \frac{7}{13} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Ebenenschar

Gegeben ist die Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$.
Wie lautet die Gleichung der Ebenenschar, deren gemeinsame Schnittgerade g ist?



Die Ebenenschar ist von den Parametern k_1, k_2 abhängig:

$$E_{k_1,k_2}\colon\ \vec{n} \cdot [\vec{x} - \vec{a}] = 0$$

$$\text{mit} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} k_1\,u_3 \\ k_2\,u_3 \\ -k_1\,u_1 - k_2\,u_2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

$\vec{n}$ erhalten wir aus der Bedingung $\vec{n} \perp \vec{u}$, d.h. $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$.
Die Probe bestätigt die Korrektheit.

Ein Beispiel:
Sei die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben.

Die zugehörige Ebenenschar ist dann:

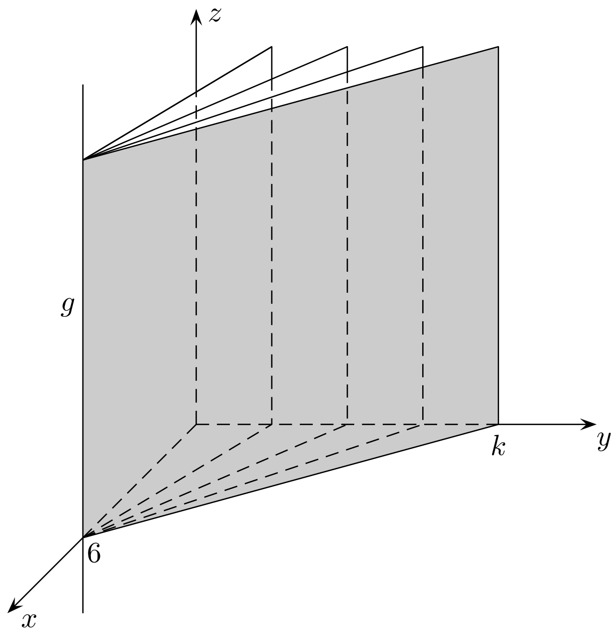
$$E_{k_1,k_2}\colon\ \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot [\,\vec{x} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}] = 0$$

oder in Koordinatenform: $k_1x + k_2y - 6k_1 = 0$.

Soll als Bedingung die y-Achse an der Stelle $y = k$ geschnitten werden, so erhalten wir:

$$E_k\colon\ kx + 6y - 6k = 0.$$

Frage:
Sind die Ebenenscharen E_k und E_{k_1,k_2} identisch?



Aufgabe Ebenenschar

1. Gegeben ist die Ebenenschar $E_t:\ x_1 + tx_2 + 2x_3 = 5\ ,\quad t \in \mathbb{R}$

   Untersuchen Sie,

   a) ob alle Ebenen der Schar eine feste Gerade g gemeinsam haben und geben Sie ggf. die Gleichung dieser Geraden an,

   b) ob es eine Ebene mit größten Abstand vom Koordinatenursprung gibt,

   c) welche Grenzebene sich für $t \longrightarrow \infty$ ergibt.

Ebenenschar   Lösungshinweise

1. Gegeben ist die Ebenenschar $E_t:\ x_1 + tx_2 + 2x_3 = 5\ ,\quad t \in \mathbb{R}$

   Untersuchen Sie,

   a) ob alle Ebenen der Schar eine feste Gerade g gemeinsam haben und geben Sie ggf. die Gleichung dieser Geraden an,

   Die Ebenenschar besitzt eine gemeinsame Schnittgerade, mehrere Begründungen sind möglich (Gleichungssystem, Orthogonalitätsbetrachtung, usw.)

   Eine mögliche Darstellung lautet: $\quad g:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   $$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & t_1x_2 & + & 2x_3 & = & 5 \\ x_1 & + & t_2x_2 & + & 2x_3 & = & 5 \\ \hline \end{array}$$

   Subtraktion und $t_1 \neq t_2$ *führt zu* $x_2 = 0$. *Dann gilt* $x_1 + 2x_3 = 5$.

   $$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 - 2x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   b) ob es eine Ebene mit größten Abstand vom Koordinatenursprung gibt,

   Um den größten Abstand vom Koordinatenursprung zu ermitteln, ist die Normalenform in die HNF zu überführen und das Maximum der Funktion $f(t) = \dfrac{5}{\sqrt{t^2+5}}$ *zu ermitteln. Es liegt an der Stelle* $t = 0$.

   c) welche Grenzebene sich für $t \longrightarrow \infty$ ergibt.

   Division durch t *und* $t \longrightarrow \infty$ *führt zu* $y = 0$, *d.h. es ist die* xz*-Ebene.*