

# Skalarprodukt

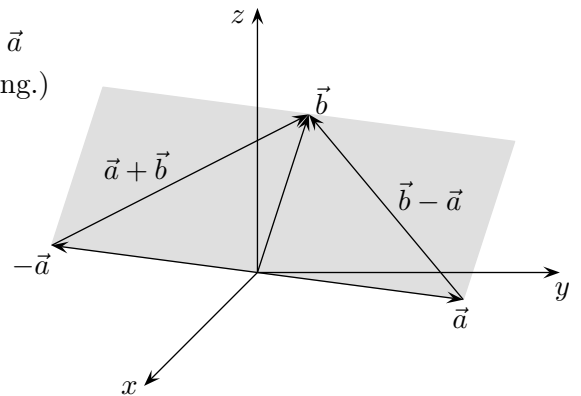
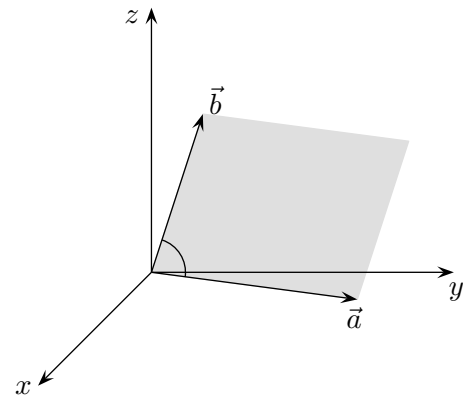
Gibt es ein einfaches Kriterium, um nachzuprüfen, ob zwei Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  senkrecht zueinander stehen?

Der nebenstehenden Zeichnung entnehmen wir, dass  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  genau dann senkrecht aufeinander stehen, wenn die Vektoren  $\vec{a} + \vec{b}$  und  $\vec{b} - \vec{a}$  gleiche Länge besitzen. Wenn wir die Längen mit Hilfe der Komponenten ausrechnen, erhalten wir die gesuchte Bedingung:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{b} - \vec{a}| \quad (\text{Die Diagonalen des von } \vec{a} \text{ und } \vec{b} \text{ aufgespannten Parallelogramms sind gleich lang.})$$

$$\text{Seien } \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{beachte: } |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$



$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + (a_3 + b_3)^2} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

$\iff$

- Klammern auflösen, in Gedanken reicht, auf beiden Seiten stehen die gleichen Quadrate
- zusammenfassen, vereinfachen:

$$\iff a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$$

Wie wir später sehen werden, hat der Ausdruck  $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$  für die Winkelberechnung auch dann eine Bedeutung, wenn er nicht null ist. Daher ist die folgende Definition sinnvoll:

*Definition des Skalarprodukts:*

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

1. Gib zu  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  vier Vektoren an, die auf  $\vec{a}$  senkrecht stehen. Überprüfe die Lösung mit einer Zeichnung.

2. Gib vier Vektoren an, die zu der Geraden, die durch  $A(2 | 1 | -3)$  und  $B(-4 | 3 | 5)$  verläuft, senkrecht stehen.

$$\text{Satz: } \vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

*Rechenregeln:*

- 1.)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- 2.)  $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
- 3.)  $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$
- 4.)  $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2 \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$

$$\text{wobei gilt: } \vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$$

*Beispiel:*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + (-3) \cdot 4 + 2 \cdot 6 = 0$$

*Die beiden Vektoren stehen daher senkrecht aufeinander.*

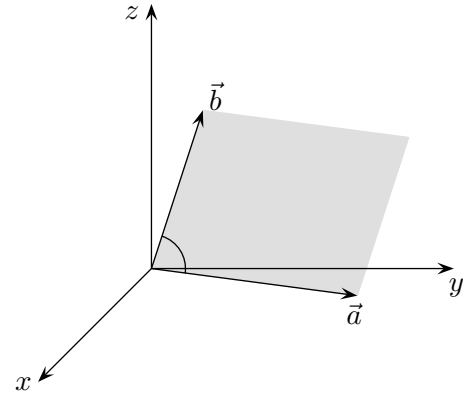
# Skalarprodukt

Gibt es ein einfaches Kriterium, um nachzuprüfen, ob zwei Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  senkrecht zueinander stehen?

Der nebenstehenden Zeichnung entnehmen wir, dass  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  genau dann senkrecht aufeinander stehen, wenn gilt:

$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2$  (Satz des Pythagoras, Umkehrung).

Wenn wir die Längen mit Hilfe der Komponenten ausrechnen, erhalten wir die gesuchte Bedingung.



Seien  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

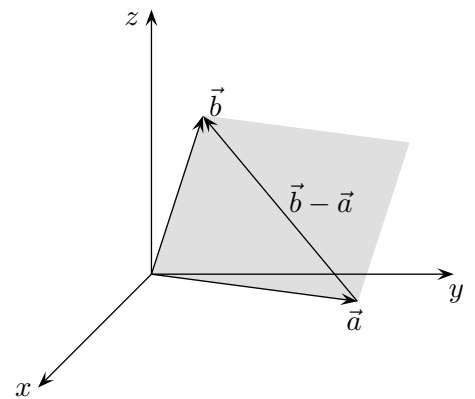
beachte:  $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2$$

$\iff$

. Klammern auflösen, in Gedanken reicht, auf beiden Seiten stehen die gleichen Quadrate  
 . zusammenfassen, vereinfachen

$$\iff a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$$



Wie wir später sehen werden, hat der Ausdruck  $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$  für die Winkelberechnung auch dann eine Bedeutung, wenn er nicht null ist. Daher ist die folgende Definition sinnvoll:

*Definition des Skalarprodukts:*

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

1. Gib zu  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  vier Vektoren an, die auf  $\vec{a}$  senkrecht stehen. Überprüfe die Lösung mit einer Zeichnung.

2. Gib vier Vektoren an, die zu der Geraden, die durch  $A(2 | 1 | -3)$  und  $B(-4 | 3 | 5)$  verläuft, senkrecht stehen.

*Satz:*  $\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

*Rechenregeln:*

1.)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

2.)  $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

3.)  $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$

4.)  $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$

wobei gilt:  $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$

*Beispiel:*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + (-3) \cdot 4 + 2 \cdot 6 = 0$$

Die beiden Vektoren stehen daher senkrecht aufeinander.

Siehe auch: [Skalarprodukt Fortsetzung](#)