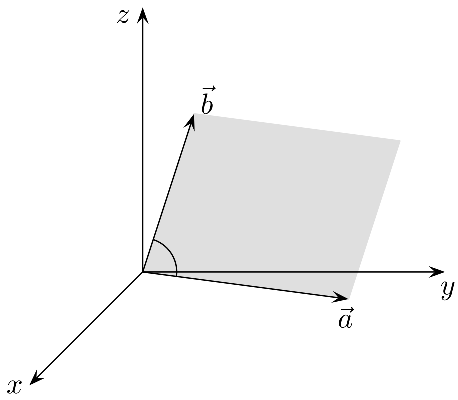
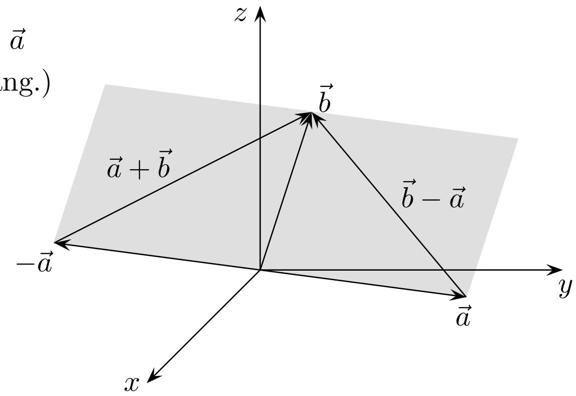
Skalarprodukt



Gibt es ein einfaches Kriterium, um nachzuprüfen, ob zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht zueinander stehen?

Der nebenstehenden Zeichnung entnehmen wir, dass $\vec{a}$ und $\vec{b}$ genau dann senkrecht aufeinander stehen, wenn die Vektoren $\vec{a}+\vec{b}$ und $\vec{b}-\vec{a}$ gleiche Länge besitzen. Wenn wir die Längen mit Hilfe der Komponenten ausrechnen, erhalten wir die gesuchte Bedingung:

$\vec{a} \perp \vec{b} \iff |\,\vec{a}+\vec{b}\,| = |\,\vec{b}-\vec{a}\,|$ (Die Diagonalen des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms sind gleich lang.)



Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

beachte: $|\,\vec{a}\,| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+(a_3+b_3)^2} = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$$

$\iff$

. *Klammern auflösen, in Gedanken reicht, auf beiden Seiten stehen die gleichen Quadrate*

. *zusammenfassen, vereinfachen:*

$$\iff a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$$

Satz: $\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

Wie wir später sehen werden, hat der Ausdruck $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ für die Winkelberechnung auch dann eine Bedeutung, wenn er nicht null ist. Daher ist die folgende Definition sinnvoll:

Definition des Skalarprodukts:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Rechenregeln:

1.) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

2.) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$

3.) $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda\,(\vec{a}\cdot\vec{b})$

4.) $(\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2} + 2\,\vec{a}\,\vec{b} + \vec{b}^{\,2}$

wobei gilt: $\vec{a}^{\,2} = \vec{a}\cdot\vec{a}$

1. Gib zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ vier Vektoren an, die auf $\vec{a}$ senkrecht stehen. Überprüfe die Lösung mit einer Zeichnung.

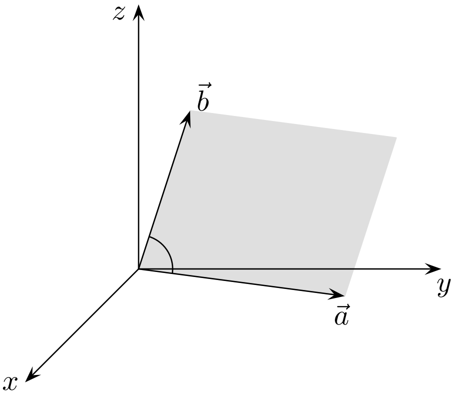
2. Gib vier Vektoren an, die zu der Geraden, die durch $A(2\,|\,1\,|\,-3)$ und $B(-4\,|\,3\,|\,5)$ verläuft, senkrecht stehen.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = 1\cdot 0 + (-3)\cdot 4 + 2\cdot 6 = 0$$

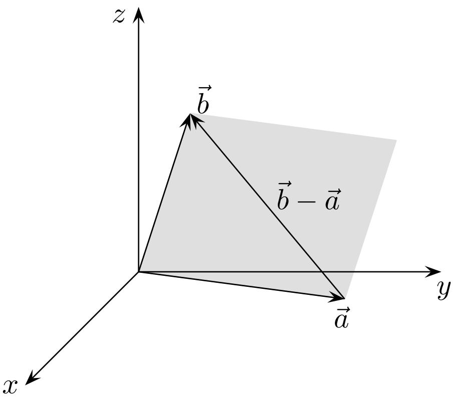
Die beiden Vektoren stehen daher senkrecht aufeinander.

Skalarprodukt



Gibt es ein einfaches Kriterium, um nachzuprüfen, ob zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht zueinander stehen?

Der nebenstehenden Zeichnung entnehmen wir, dass $\vec{a}$ und $\vec{b}$ genau dann senkrecht aufeinander stehen, wenn gilt:
$|\,\vec{a}\,|^2 + |\,\vec{b}\,|^2 = |\,\vec{b} - \vec{a}\,|^2$ (Satz des Pythagoras, Umkehrung).
Wenn wir die Längen mit Hilfe der Komponenten ausrechnen, erhalten wir die gesuchte Bedingung.



Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

beachte: $|\,\vec{a}\,| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2$$

$\iff$

. *Klammern auflösen, in Gedanken reicht, auf beiden Seiten stehen die gleichen Quadrate*

. *zusammenfassen, vereinfachen*

$$\iff a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$$

Satz: $\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Wie wir später sehen werden, hat der Ausdruck $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ für die Winkelberechnung auch dann eine Bedeutung, wenn er nicht null ist.
Daher ist die folgende Definition sinnvoll:

Rechenregeln:

1.) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

2.) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

3.) $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda\,(\vec{a} \cdot \vec{b})$

4.) $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2} + 2\,\vec{a}\,\vec{b} + \vec{b}^{\,2}$

wobei gilt: $\vec{a}^{\,2} = \vec{a} \cdot \vec{a}$

Definition des Skalarprodukts:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

1. Gib zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ vier Vektoren an, die auf $\vec{a}$ senkrecht stehen. Überprüfe die Lösung mit einer Zeichnung.

2. Gib vier Vektoren an, die zu der Geraden, die durch $A(2\,|\,1\,|\,-3)$ und $B(-4\,|\,3\,|\,5)$ verläuft, senkrecht stehen.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + (-3) \cdot 4 + 2 \cdot 6 = 0$$

Die beiden Vektoren stehen daher senkrecht aufeinander.

Siehe auch: Skalarprodukt Fortsetzung
Startseite