# Abstand windschiefer Geraden

Zwei Geraden, $\quad g: \quad \vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$

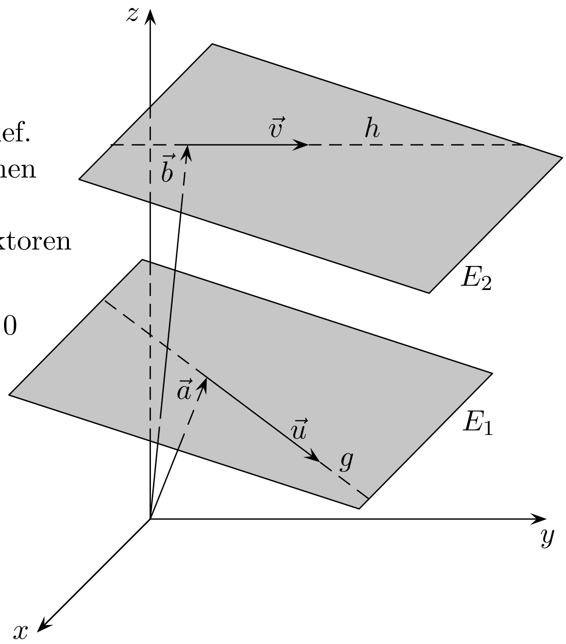
$\qquad\qquad\qquad h: \quad \vec{x} = \vec{b} + \lambda\vec{v}$

die sich weder schneiden noch parallel verlaufen, sind windschief.
Zu zwei windschiefen Geraden gibt es stets zwei parallele Ebenen $E_1$ und $E_2$, in denen sie verlaufen.
Als Richtungsvektoren dieser Ebenen können die Richtungsvektoren der Geraden übernommen werden.

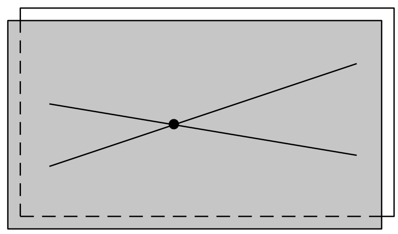
Sei $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$, $\quad$ dann lautet die HNF von $E_1$: $\quad \vec{n}^\circ\,(\vec{x} - \vec{a}\,) = 0$

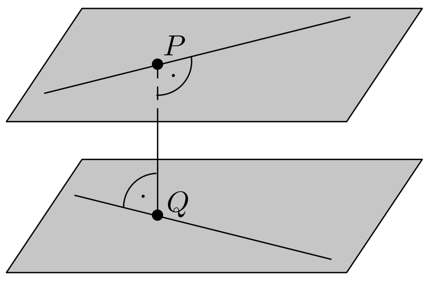
$\Longrightarrow \quad d\,(g,\,h) = |\; \vec{n}^\circ\,(\vec{b} - \vec{a}\,)\;|$

$d\,(g,\,h)$ ist die kürzeste Entfernung der Punkte auf $g$ zu den Punkten auf $h$. Hierzu betrachte man die Ebenen mit den enthaltenen Geraden senkrecht von oben, d. h. in Blickrichtung des Normalenvektors.




2. Beweis:
$\vec{n}^\circ\,(\vec{b} - \vec{a}\,) = |\;\vec{n}^\circ\;| \cdot |\;\vec{b} - \vec{a}\;| \cdot \cos\alpha \;=\; |\;d\,(g,\,h)\;|$ $\qquad$ Erläutere dies.






Um die Fußpunkte $P$ und $Q$ zu ermitteln, sind die Lösungen des Gleichungssystems:

$$(\vec{a} + \lambda\vec{u} - \vec{b} - \mu\vec{v}) \cdot \vec{u} = 0$$
$$(\vec{a} + \lambda\vec{u} - \vec{b} - \mu\vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$$

in die Geradengleichungen einzusetzen (der Differenzvektor steht senkrecht auf beiden Richtungsvektoren). Mit den Fußpunkten kann der Abstand berechnet werden.

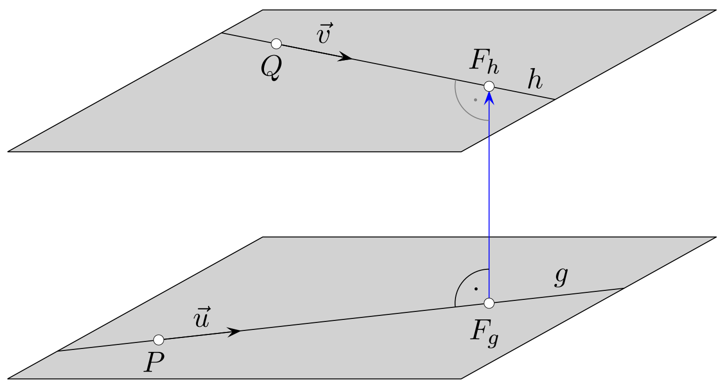
Alternativ kann die Ebene $E$: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{u} \times \vec{v}$ mit der Geraden $h$: $\vec{x} = \vec{b} + \lambda\vec{v}$ geschnitten werden.

# Fußpunkte (und Abstand) mit laufenden Punkten

Gegeben sind die windschiefen Geraden

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Gesucht sind die Fußpunkte des gemeinsamen Lotes.




Der Verbindungsvektor $\overrightarrow{F_gF_h}$ mit den Parametern $r$ und $s$ steht senkrecht auf den Richtungsvektoren der Geraden.

$$\overrightarrow{F_gF_h} = \begin{pmatrix} s-3 \\ 2s-3 \\ s+3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 \\ r+2 \\ 2r-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+4 \\ 2s-r-5 \\ s-2r+6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F_gF_h} \cdot \vec{u} &= 0 \\ 4s - 5r &= -7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F_gF_h} \cdot \vec{v} &= 0 \\ 6s - 4r &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &= 3 \quad \Longrightarrow \quad F_g(-7 \,|\, 5 \,|\, 3) \\ s &= 2 \quad \Longrightarrow \quad F_h(-1 \,|\, 1 \,|\, 5) \end{aligned}$$

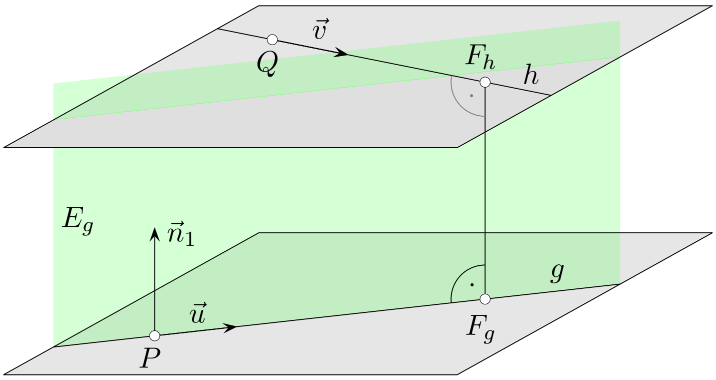
$$d(g,h) = |\overrightarrow{F_gF_h}| = \sqrt{56} \approx 7{,}483$$

# Fußpunkte als Schnittpunkte

Gegeben sind die windschiefen Geraden

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Gesucht sind die Fußpunkte des gemeinsamen Lotes.




$F_h$ ist der Schnittpunkt der Ebene $E_g$ (Stützvektor $\overrightarrow{OP}$, Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{n}_1 = \vec{u} \times \vec{v}$) und der Geraden $h$. $F_g$ erhält man auf die gleiche Weise.

Normalenform $\quad E_g\colon\ \vec{n}_2\left[\vec{x} - \overrightarrow{OP}\right] = 0, \qquad \vec{n}_2 = \vec{n}_1 \times \vec{u}$

$$\vec{n}_1 = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{n}_2 = \vec{n}_1 \times \vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$E_g\colon \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right] = 0$$

$E_g \cap h \quad \Longrightarrow \quad s = 2,\ F_h(-1 \mid 1 \mid 5), \qquad$ entsprechend $\ F_g(-7 \mid 5 \mid 3)$

$d(g,h) = |\overrightarrow{F_gF_h}| = \sqrt{56} \approx 7{,}483$

Alternativ Schnitt mit der Parameterform von $E_g$:

$$\begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$s = 2,\ r = 3,\ t = 2$

# Abstände Zusammenfassung

1. Abstand zweier Punkte $A$, $B$

   $d(A,B) = |\overrightarrow{AB}|$ $\qquad$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

2. Abstand Punkt/Ebene (im $\mathbb{R}^2$ Abstand Punkt/Gerade )

   $d(P,E) = |\,\vec{n}^\circ \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA})\,| = |\,\vec{n}^\circ\, \overrightarrow{OP} - a\,|$ $\qquad$ $\overrightarrow{OP}$ in HNF einsetzen.

   $d(P,E) = |\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}^\circ|$ $\qquad$ $\vec{n}^\circ \overrightarrow{OP} - a > 0 \iff$ Ebene verläuft zwischen $P$ und dem Ursprung.

3. Abstand Punkt/Gerade

   $\lambda$ mit $(\vec{a} + \lambda\vec{u} - \overrightarrow{OP}) \cdot \vec{u} = 0$ berechnen. $\qquad$ $\lambda$ in $g$ eingesetzt ergibt den Fußpunkt $F$.

   $d(P,g) = |\overrightarrow{PF}|$

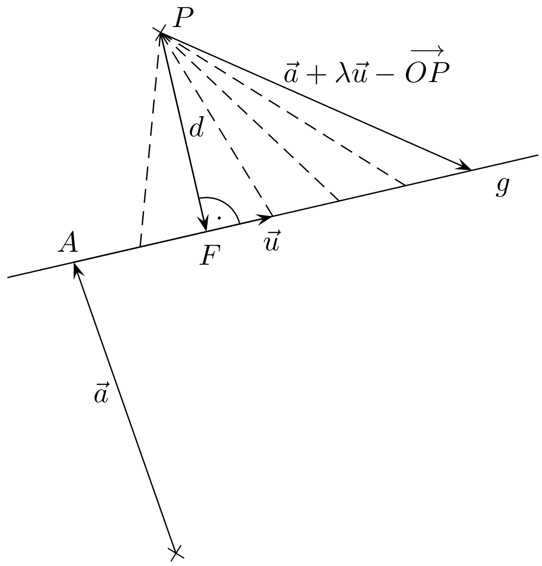
   oder mit GTR das Minimum der Funktion
   $d(\lambda) = |\,\vec{a} + \lambda\vec{u} - \overrightarrow{OP}\,|$ ermitteln.

   oder direkt:

   $d(P,g) = |\,(\overrightarrow{OP} - \vec{a}\,) \times \vec{u}^\circ\,|$

   $d(P,g) = |\,\overrightarrow{AP} \times \vec{u}^\circ\,|$

   Tipp: Den Normierungsfaktor $\dfrac{1}{|\vec{u}|}$ vor den Betragsstrich ziehen.




4. Abstand paralleler Geraden siehe 3.

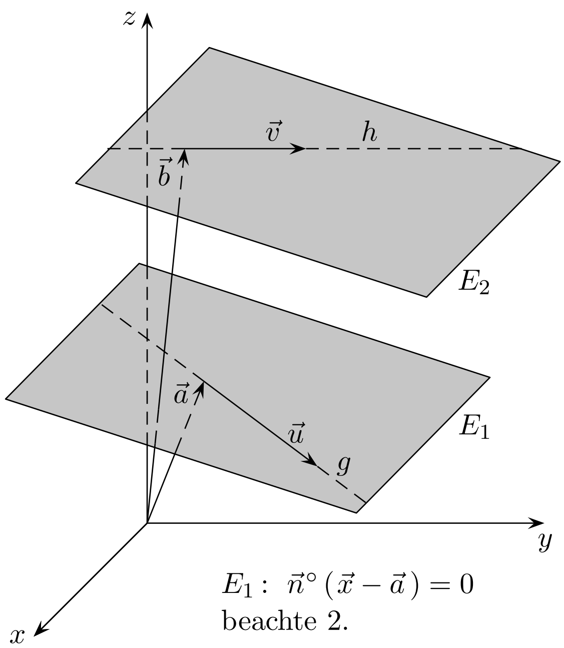
5. Abstand paralleler Ebenen siehe 2.

6. Abstand windschiefer Geraden $g:\ \vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$
   $h:\ \vec{x} = \vec{b} + \lambda\vec{v}$

   $d(g,h) = |\,\vec{n}^\circ\,(\vec{b} - \vec{a}\,)\,|$ $\qquad$ $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$

   Fußpunkte und Abstand mit
   $(\vec{a} + \lambda\vec{u} - \vec{b} - \mu\vec{v}) \cdot \vec{u} = 0$
   $(\vec{a} + \lambda\vec{u} - \vec{b} - \mu\vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$

   oder die Ebene $E$: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u} + \mu(\vec{u} \times \vec{v})$
   mit der Geraden $h$: $\vec{x} = \vec{b} + \lambda\vec{v}$ schneiden.




$E_1:\ \vec{n}^\circ\,(\vec{x} - \vec{a}\,) = 0$
beachte 2.

## Abstände    Fortsetzung

7. Welcher Punkt $P$ auf der Geraden $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   ist von $A(4\,|\,0\,|\,1)$ und $B(0\,|\,2\,|\,1)$ gleichweit entfernt?

   Lösung:

   Für die Punkte $Q$ auf der Geraden $g$ gilt: $\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 2-t \\ 2 \\ t \end{pmatrix}$

   Aus der Bedingung $|\overrightarrow{AQ}\,| = |\overrightarrow{BQ}\,|$ folgt $t = -\frac{1}{2}$ und damit $P(\frac{5}{2}\,|\,2\,|\,-\frac{1}{2})$.

8. Welche Punkte auf der Geraden $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   haben von der Ebene $E\colon 2x - y + 2z = 3$ den Abstand 2 $LE$?

   Lösung:

   Für die Punkte $Q$ auf der Geraden $g$ gilt: $\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+t \\ t \end{pmatrix}$

   Aus der Bedingung $|\,\vec{n}^\circ\,\overrightarrow{OQ} - a\,| = 2$ folgt

   $\frac{1}{3}(t-2) = 2, \quad t = 8, \quad Q_1(1\,|\,9\,|\,8)$ und

   $\frac{1}{3}(t-2) = -2, \quad t = -4, \quad Q_2(1\,|\,-3\,|\,-4)$.

9. Welchen Abstand haben die windschiefen Geraden $g$ und $h$ und wie lauten die Fußpunkte? (Abitur Ni 2007 )

   $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $h\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

   Lösung:

   $s = t = 1, \quad P(4\,|\,4\,|\,-2), \quad Q(2\,|\,1\,|\,4), \quad d = 7$

# windschiefe Geraden   Einführung

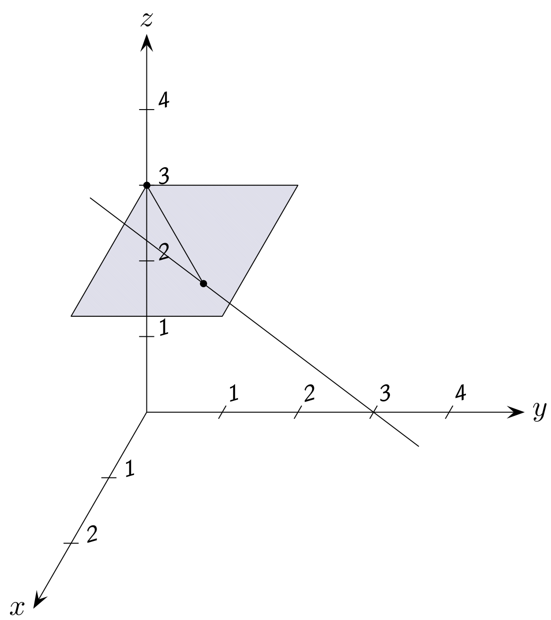
Welcher Punkt $P$ auf der Geraden

$$g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

hat von der $z$-Achse minimalen Abstand?

© Roolfs

# windschiefe Geraden  Einführung




Welcher Punkt $P$ auf der Geraden

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

hat von der $z$-Achse minimalen Abstand?

$$\overrightarrow{d(\lambda)} = \begin{pmatrix} 1+\lambda \\ 2-\lambda \\ 2+2\lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2+2\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\lambda \\ 2-\lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Ansatz garantiert, dass $\overrightarrow{d(\lambda)}$ orthogonal zur $z$-Achse ist.

$|\overrightarrow{d(\lambda)}| \ \rightarrow$ Minimum

$\lambda = \frac{1}{2}$

$P\left(\frac{3}{2} \mid \frac{3}{2} \mid 3\right)$

$Q(0 \mid 0 \mid 3)$

$d = \sqrt{\frac{9}{2}}$