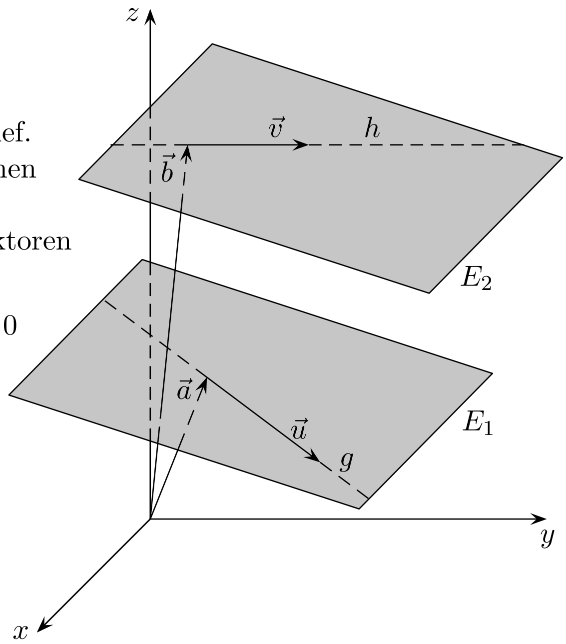
Abstand windschiefer Geraden



Zwei Geraden, $\quad g: \quad \vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$

$\qquad\qquad\qquad\; h: \quad \vec{x} = \vec{b} + \lambda\vec{v}$

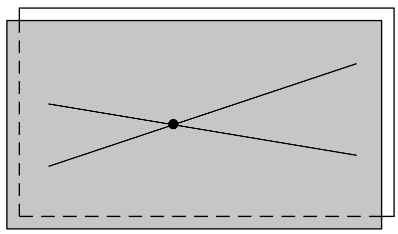
die sich weder schneiden noch parallel verlaufen, sind windschief.
Zu zwei windschiefen Geraden gibt es stets zwei parallele Ebenen E_1 und E_2, in denen sie verlaufen.
Als Richtungsvektoren dieser Ebenen können die Richtungsvektoren der Geraden übernommen werden.

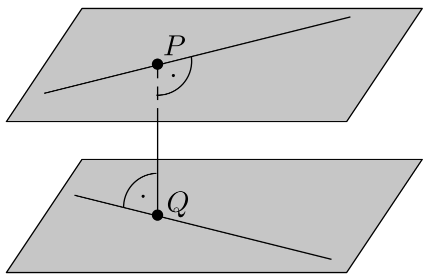
Sei $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$, $\quad$ dann lautet die HNF von E_1 : $\quad \vec{n}^\circ\,(\vec{x} - \vec{a}\,) = 0$

$\Longrightarrow \quad d\,(g,\,h) = |\;\vec{n}^\circ\,(\vec{b} - \vec{a}\,)\;|$

$d\,(g,\,h)$ ist die kürzeste Entfernung der Punkte auf g zu den Punkten auf h. Hierzu betrachte man die Ebenen mit den enthaltenen Geraden senkrecht von oben, d. h. in Blickrichtung des Normalenvektors.

2. Beweis:
$\vec{n}^\circ\,(\vec{b} - \vec{a}\,) = |\;\vec{n}^\circ\,| \cdot |\;\vec{b} - \vec{a}\;| \cdot \cos\alpha \;= |\;d\,(g,\,h)\;|$ $\qquad$ Erläutere dies.





Um die Fußpunkte P und Q zu ermitteln, sind die Lösungen des Gleichungssystems:

$$(\vec{a} + \lambda\vec{u} - \vec{b} - \mu\vec{v}) \cdot \vec{u} = 0$$
$$(\vec{a} + \lambda\vec{u} - \vec{b} - \mu\vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$$

in die Geradengleichungen einzusetzen (der Differenzvektor steht senkrecht auf beiden Richtungsvektoren). Mit den Fußpunkten kann der Abstand berechnet werden.

Alternativ kann die Ebene E: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{u} \times \vec{v}$ mit der Geraden h: $\vec{x} = \vec{b} + \lambda\vec{v}$ geschnitten werden.

Abstände Zusammenfassung

1. Abstand zweier Punkte A, B

   $d(A, B) = |\overrightarrow{AB}|$ $\qquad$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

2. Abstand Punkt/Ebene (im $\mathbb{R}^2$ Abstand Punkt/Gerade)

   $d(P, E) = |\,\vec{n}^\circ \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA})\,| = |\,\vec{n}^\circ\, \overrightarrow{OP} - a\,|$ $\qquad$ $\overrightarrow{OP}$ in HNF einsetzen.

   $d(P, E) = |\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}^\circ|$ $\qquad$ $\vec{n}^\circ \overrightarrow{OP} - a > 0 \iff$ Ebene verläuft zwischen P und dem Ursprung.

3. Abstand Punkt/Gerade

   λ mit $(\vec{a} + \lambda\vec{u} - \overrightarrow{OP}) \cdot \vec{u} = 0$ berechnen. $\qquad$ λ in g eingesetzt ergibt den Fußpunkt F.

   $d(P, g) = |\overrightarrow{PF}|$

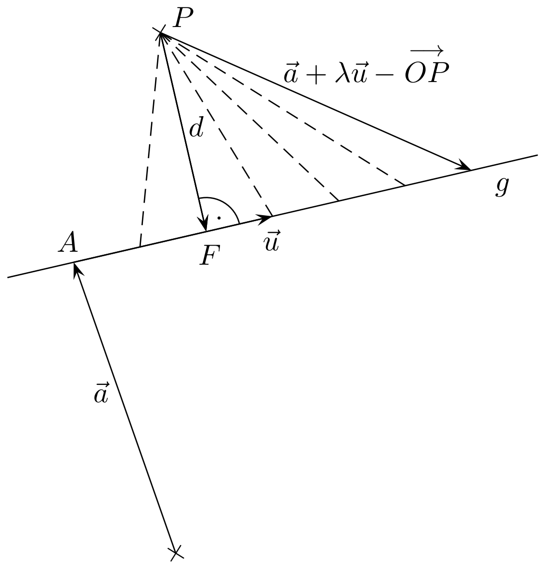
   oder mit GTR das Minimum der Funktion
   $d(\lambda) = |\,\vec{a} + \lambda\vec{u} - \overrightarrow{OP}\,|$ ermitteln.

   oder direkt:

   $d(P, g) = |\,(\overrightarrow{OP} - \vec{a}\,) \times \vec{u}^\circ\,|$

   $d(P, g) = |\,\overrightarrow{AP} \times \vec{u}^\circ\,|$

   Tipp: Den Normierungsfaktor $\frac{1}{|\vec{u}|}$ vor den Betragsstrich ziehen.



4. Abstand paralleler Geraden siehe 3.

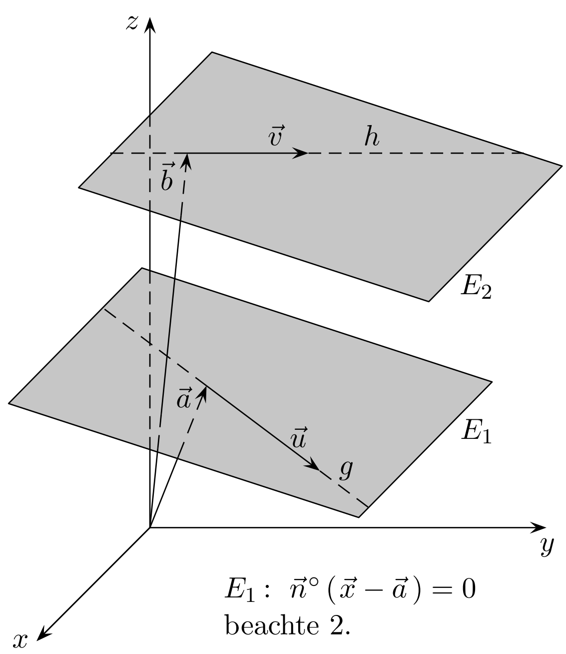
5. Abstand paralleler Ebenen siehe 2.

6. Abstand windschiefer Geraden $g:\ \vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$
   $h:\ \vec{x} = \vec{b} + \lambda\vec{v}$

   $d(g, h) = |\,\vec{n}^\circ\,(\vec{b} - \vec{a}\,)\,|$ $\qquad$ $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$

   Fußpunkte und Abstand mit
   $$(\vec{a} + \lambda\vec{u} - \vec{b} - \mu\vec{v}) \cdot \vec{u} = 0$$
   $$(\vec{a} + \lambda\vec{u} - \vec{b} - \mu\vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$$

   oder die Ebene E: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u} + \mu\,\vec{u} \times \vec{v}$
   mit der Geraden h: $\vec{x} = \vec{b} + \lambda\vec{v}$ schneiden.



$E_1:\ \vec{n}^\circ\,(\vec{x} - \vec{a}\,) = 0$
beachte 2.

Abstände Fortsetzung

7. Welcher Punkt P auf der Geraden $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   ist von $A(4\,|\,0\,|\,1)$ und $B(0\,|\,2\,|\,1)$ gleichweit entfernt?

   Lösung:

   Für die Punkte Q auf der Geraden g gilt: $\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 2-t \\ 2 \\ t \end{pmatrix}$

   Aus der Bedingung $|\overrightarrow{AQ}\,| = |\overrightarrow{BQ}\,|$ folgt $t = -\frac{1}{2}$ und damit $P(\,\frac{5}{2}\,|\,2\,|\,-\frac{1}{2})$.

8. Welche Punkte auf der Geraden $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   haben von der Ebene $E\colon 2x - y + 2z = 3$ den Abstand 2 LE?

   Lösung:

   Für die Punkte Q auf der Geraden g gilt: $\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+t \\ t \end{pmatrix}$

   Aus der Bedingung $|\,\vec{n}^\circ\,\overrightarrow{OQ} - a\,| = 2$ folgt

   $\frac{1}{3}(t-2) = 2, \quad t = 8, \quad Q_1(1\,|\,9\,|\,8)$ und

   $\frac{1}{3}(t-2) = -2, \quad t = -4, \quad Q_2(1\,|\,-3\,|\,-4)$.

9. Welchen Abstand haben die windschiefen Geraden g und h und wie lauten die Fußpunkte? (Abitur 2007 NDS)

   $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $h\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

   Lösung:

   $s = t = 1, \quad P(4\,|\,4\,|\,-2), \quad Q(2\,|\,1\,|\,4), \quad d = 7$

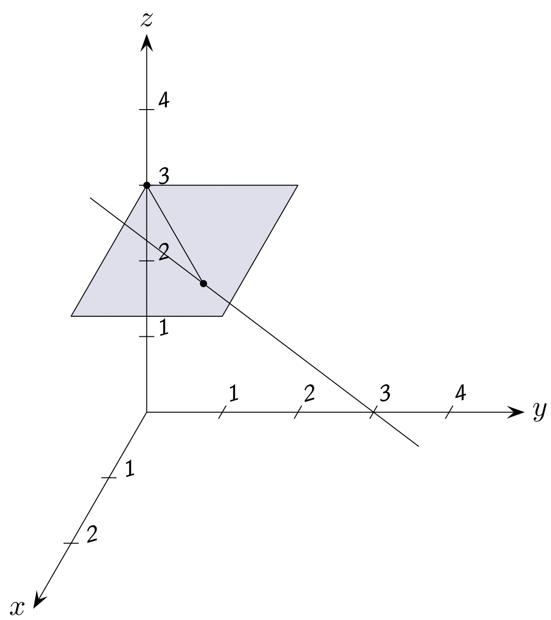
windschiefe Geraden   Einführung

Welcher Punkt P auf der Geraden

$$g: \;\; \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

hat von der z-Achse minimalen Abstand?

windschiefe Geraden   Einführung



Welcher Punkt P auf der Geraden

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

hat von der z-Achse minimalen Abstand?

$$\overrightarrow{d(\lambda)} = \begin{pmatrix} 1+\lambda \\ 2-\lambda \\ 2+2\lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2+2\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\lambda \\ 2-\lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Ansatz garantiert, dass $\overrightarrow{d(\lambda)}$ orthogonal zur z-Achse ist.

$|\,\overrightarrow{d(\lambda)}\,| \ \rightarrow$ Minimum

$\lambda = \frac{1}{2}$

$P\left(\frac{3}{2} \,|\, \frac{3}{2} \,|\, 3\right)$

$Q(0 \,|\, 0 \,|\, 3)$

$d = \sqrt{\frac{9}{2}}$