Quadrat, Pyramide

Ebene, Quadrat, Gerade

Pyramide, Winkel, Volumen

Pyramidenschar, Winkel

Kugel, Gerade, Ebene

Geraden, Ebenen, Kugel

Ebenenschar, Symmetrie, Pyramide

Würfel, Ebenenschar

Flugrouten GTR

Flugbahnen

Drehpyramide

Geradenschar und Kugel

Kreislinie und Mittelsenkrechten

Prisma

Ebenen

Schnittflächen

Winkel

Helikopter

Würfel, Ebene, rechtwinkliges Dreieck, Trapez

Ohne GTR

Würfel, Teilverhältnis

Hanggrundstück, Helikopter

Dachfläche, Schatten

Flugbahnen, Abstände

Flugbahnen, Sicherheitsabstand

Flugbahnen, Gewitterwolke

Ohne GTR

Aufgaben Vektorrechnung

1. Bestimmen Sie b so, dass die Punkte $A(1\,|\,2\,|\,b)$, $B(2\,|\,b\,|\,4)$, $C(5\,|\,6\,|\,7)$ auf einer Geraden liegen.

2. Gegeben sind die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und der Punkt $M(2\,|\,4\,|\,2)$.

   a) Wie lautet die Gleichung in Koordinatenform der Ebene E_1, die g und M enthält? Fälle von M das Lot auf g. Gib die Koordinaten des Lotfußpunktes L an. Berechne die Länge d des Lotes.
   (zur Kontrolle: $E_1: \quad 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 12, \quad L(3\,|\,6\,|\,0)$*)*

   b) Bestimme diejenigen Punkte A und B auf g, die von L die Entfernung d haben. Bestimme weiter die Punkte C und D so, dass $ABCD$ ein Quadrat mit dem Mittelpunkt M darstellt.
   (zur Kontrolle: $A(5\,|\,4\,|\,-1)$, $B(1\,|\,8\,|\,1)$, $C(-1\,|\,4\,|\,5)$, $D(3\,|\,0\,|\,3)$*)*

   c) Über dem Quadrat $ABCD$ wird eine senkrechte Pyramide errichtet. Eine Seitenfläche der Pyramide liegt in der Ebene E_2, die von der Gerade g und dem Punkt $P(5\,|\,6\,|\,4)$ aufgespannt wird. Berechne die Koordinaten der Pyramidenspitze S und die Höhe der Pyramide.
   (zur Kontrolle: $S(6\,|\,6\,|\,6)$*)*

Aufgaben Vektorrechnung

1. $b = 3$

2. Gegeben sind die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und der Punkt $M(2\,|\,4\,|\,2)$.

   a) Wie lautet die Gleichung in Normalenform der Ebene E_1, die g und M enthält? Fälle von M das Lot auf g. Gib die Koordinaten des Lotfußpunktes L an. Berechne die Länge d des Lotes.
   (zur Kontrolle: E_1: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 12 = 0$ $\quad L(3\,|\,6\,|\,0)$ *)*

   b) Bestimme diejenigen Punkte A und B auf g, die von L die Entfernung d haben. Bestimme weiter die Punkte C und D so, dass $ABCD$ ein Quadrat mit dem Mittelpunkt M darstellt.
   (zur Kontrolle: $A(5\,|\,4\,|\,-1)$, $B(1\,|\,8\,|\,1)$, $C(-1\,|\,4\,|\,5)$, $D(3\,|\,0\,|\,3)$*)*

   c) Über dem Quadrat $ABCD$ wird eine senkrechte Pyramide errichtet. Eine Seitenfläche der Pyramide liegt in der Ebene E_2, die von der Gerade g und dem Punkt $P(5\,|\,6\,|\,4)$ aufgespannt wird. Berechne die Koordinaten der Pyramidenspitze S und die Höhe der Pyramide.
   (zur Kontrolle: $S(6\,|\,6\,|\,6)$*)*

2. a) E_3 ist eine Ebene, die senkrecht zu g und durch den Punkt M verläuft.
   E_3: $\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 12 = 0$. Diese Ebene wird mit g geschnitten, es ergibt sich für $\lambda = 1$ der Punkt L.
   d ist die Länge des Vektors $\overrightarrow{ML}$, $\quad |\overrightarrow{ML}| = 3$

   b) Zunächst ist der Einheitsvektor des Richtungsvektors der Geraden g zu bilden. Das Dreifache dieses Einheitsvektors ist zu $\overrightarrow{OL}$ zu addieren, bzw. zu subtrahieren.

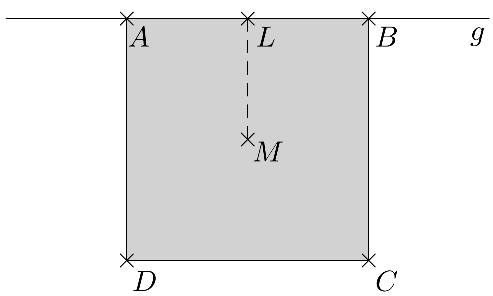
   $$\vec{u}^\circ = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OL} + 3\cdot\vec{u}^\circ, \qquad \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OL} - 3\cdot\vec{u}^\circ$$

   $$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix},$$

   die Bezeichnungen A und B können auch vertauscht sein.

   $$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + 2\cdot\overrightarrow{LM} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + 2\cdot\overrightarrow{LM} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix},$$

   c) E_2: $\begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + 42 = 0$. Diese Ebene wird mit der Geraden h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ geschnitten, es ergibt sich für $\lambda = 2$ der Punkt S. Der Stützvektor von h ist $\overrightarrow{OM}$, der Richtungsvektor ist der Normalenvektor von E_1.



3. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem sind die Punkte
$A(3 \mid -2 \mid 1)$, $B(3 \mid 3 \mid 1)$ und $C(6 \mid 3 \mid 5)$ gegeben.

a) Stellen Sie die Gleichung der Ebene E durch die Punkte A, B und C in Normalenform auf.

b) Begründen Sie durch eine Rechnung:
Ein weiterer Punkt D kann so gewählt werden, dass das Viereck $ABCD$ ein Quadrat ist.
Bestimmen Sie die Koordinaten von D.

c) Weiterhin ist eine Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 9{,}5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ gegeben.

Zeigen Sie, dass g parallel zu E verläuft.

d) Welchen Abstand hat g zu E?

e) Berechnen Sie den Schnittpunkt F der Diagonalen des Quadrats.

f) Zeigen Sie: Die Senkrechte zur Ebene E durch F schneidet die Gerade g.

Aufgaben Vektorrechnung

3. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem sind die Punkte
$A(3\,|\,-2\,|\,1)$, $B(3\,|\,3\,|\,1)$ und $C(6\,|\,3\,|\,5)$ gegeben.

   a) Stellen Sie die Gleichung der Ebene E durch die Punkte A, B und C in Normalenform auf.

   b) Begründen Sie durch eine Rechnung:
   Ein weiterer Punkt D kann so gewählt werden, dass das Viereck $ABCD$ ein Quadrat ist.
   Bestimmen Sie die Koordinaten von D.

   c) Weiterhin ist eine Gerade g: $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 9{,}5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ gegeben.

   Zeigen Sie, dass g parallel zu E verläuft.

   d) Welchen Abstand hat g zu E?

   e) Berechnen Sie den Schnittpunkt F der Diagonalen des Quadrats.

   f) Zeigen Sie: Die Senkrechte zur Ebene E durch F schneidet die Gerade g.

Lösungshinweise:

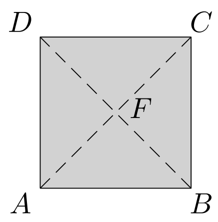
3. a) *Ein Normalenvektor (Vektorprodukt der Richtungsvektoren) lautet:* $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

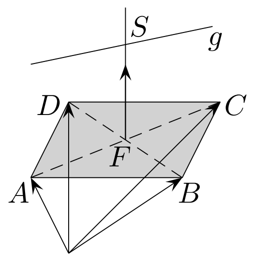
   die Normalenform lautet: $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \vec{x} - 9 = 0$

   b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

   $|\,\overrightarrow{AB}\,| = |\,\overrightarrow{BC}\,| = 5 \qquad \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}$

   $D(6\,|\,-2\,|\,5)$





   c) *Der Richtungsvektor der Geraden steht senkrecht auf dem Normalenvektor der Ebene:*

   $$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$$

   d) *Stützvektor der Geraden in die Hessesche Normalenform von* E *einsetzen,* $\quad d = 7{,}5$

   e) $\overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) \qquad F(4{,}5\,|\,0{,}5\,|\,3)$

   f) *Die Senkrechte durch* F *(Richtungsvektor ist der Normalenvektor der Ebene) schneidet die Gerade* g *in* $S(-1{,}5\,|\,0{,}5\,|\,7{,}5)$.

4. Gegeben ist der Punkt $F(6\,|\,8\,|\,12)$.
   B ist 4 Einheiten vom Quaderdeckel entfernt, A ist 3 Einheiten vom Quaderboden entfernt.

   a) Zeichne die Schnittfläche von der senkrechten Pyramide und der Ebene E ein, in der A und B liegen, 2 gegenüberliegende Kanten sind parallel zu 2 Quaderkanten.

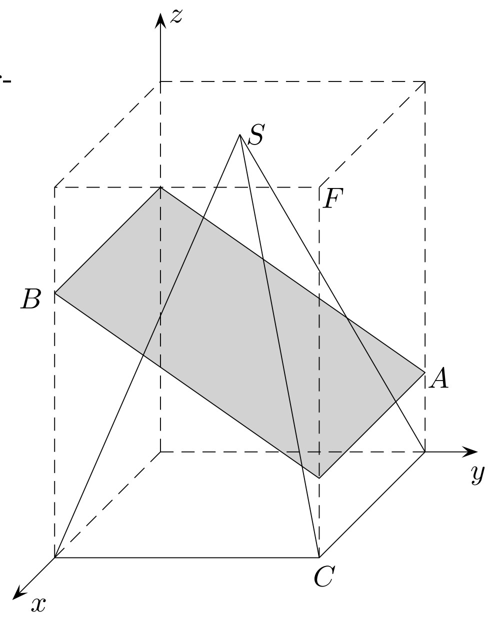
   b) Berechne den Schnittpunkt der Geraden CS und der Ebene E.

   c) Bestimme die Schnittgerade der vorderen Pyramidenfläche und der Ebene E.

   d) Bestimme den Winkel α, den die vordere Pyramidenfläche mit der xy-Ebene einschließt.

   e) Bestimme den Winkel β, den die Pyramidenflächen miteinander einschließen.

   f) Wie groß ist das Volumen der Pyramide?



Lösungshinweise:

4. a)

   b) $E: \quad 5y + 8z - 64 = 0, \quad \lambda = \frac{13}{19}, \quad \overrightarrow{OS^*} = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 96 \\ 128 \\ 72 \end{pmatrix}$

   c) *vordere Pyramidenfläche:* $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 24 = 0,$ *Schnittgerade:* $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ \frac{64}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 32 \\ -20 \end{pmatrix}$

   d) $\alpha = 76{,}0°$

   e) seitliche Pyramidenfläche: $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 24 = 0, \qquad \alpha = 85{,}6°$

5. Die Punkte $O(0\,|\,0\,|\,0)$, $A(8\,|\,0\,|\,0)$, $B(0\,|\,4\,|\,0)$ und $C_k(0\,|\,k\,|\,6)$ sind die Eckpunkte der Pyramidenschar $OABC_k$.

a) Es wird die Pyramide $OABC_0$ betrachtet.
Zeichnen Sie ein Schrägbild dieser Pyramide.
Bestimmen Sie die Innenwinkel des Dreiecks ABC_0, den Schnittwinkel der Fläche ABC_0 mit der x_1x_2-Ebene und den Abstand dieser Ebene vom Ursprung.

b) Es wird die Pyramidenschar $OABC_k$ betrachtet.
Ermitteln Sie die Einsetzungen für k, für die das Dreieck ABC_k gleichschenklig mit der Spitze C_k ist.
Untersuchen Sie die Größe des Pyramidenvolumens allgemein in Abhängigkeit von k und erläutern Sie Ihr Ergebnis. Wo liegen alle Punkte C_k?

c) Behauptung: Wenn ein Vektor $\vec{a}$ sowohl zu einem Vektor $\vec{b}$ als auch zu einem Vektor $\vec{c}$ senkrecht steht, so steht der Vektor $\vec{a}$ auch senkrecht zum Summenvektor $\vec{b}+\vec{c}$.

Erläutern und beweisen Sie die Behauptung.

Beweisen oder widerlegen Sie die Umkehrung der Behauptung.

Lösungshinweise:

5. a) *Innenwinkel:* $\alpha = 44{,}3°$, $\beta = 75{,}6°$, $\gamma = 60{,}1°$

Normalenform der Ebene: $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 24 = 0$, *Schnittwinkel* $59{,}2°$

Abstand zum Ursprung $d = \dfrac{24}{\sqrt{61}}$

b) *Dreieck ABC_k gleichschenklig für $k = -6$*

c) *Pyramidenvolumen* $32\ VE$

6. Gegeben sind die Gerade g, die Ebene E und die Kugel K durch

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad K: \quad \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \right]^2 = 169,$$

$$E: \quad 4x_1 - 3x_2 + 12x_3 + 60 = 0.$$

a) Berechne die Koordinaten des Schnittpunktes S von g und E.
Weise nach, dass S außerhalb der Kugel K liegt.
Zeige, dass E eine Tangentialebene von K ist.
Berechne die Koordinaten des Berührpunktes B.

b) Die Ebene E_1 geht durch den Mittelpunkt M von K und ist orthogonal zu g.
Stelle die Gleichung von E_1 auf.
Berechne den Abstand des Punktes M von g.
Was folgt hieraus für die gegenseitige Lage von g und K?

c) Zeige, dass die Ebene E_2 : $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 36$ die Kugel K schneidet.
Berechne für den Schnittkreis den Radius und die Koordinaten des Mittelpunktes.

Lösungshinweise:

6. a) $S\left(4 \,|\, -\frac{4}{3} \,|\, -\frac{20}{3}\right)$, $\quad B(0 \,|\, 4 \,|\, -4)$

b) $d(M, g) = 13$

c) $r^* = 12, \quad M^*\left(\frac{16}{9} \,|\, \frac{4}{9} \,|\, \frac{32}{9}\right)$

7. Gegeben sind die beiden Geraden g und h:

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 2 \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie den Schnittpunkt von g und h.

b) Bestimmen Sie den Winkel zwischen g und h.

c) Wie lautet die Gleichung der Ebene E_1 in Normalenform, in der die Geraden g und h liegen? Wie groß ist der Abstand der Ebene E_1 zum Ursprung?

d) Wie lautet die Gleichung der Ebene E_2 in Normalenform, in der die Punkte $P(0\,|\,2\,|\,1)$ und $Q(2\,|\,3\,|\,2)$ liegen und die senkrecht zu E_1 steht?

e) Die Ebene $E_3:\ -10x - 5y + 10z = -9$ ist eine Tangentialebene einer Kugel K, deren Mittelpunkt $M\left(\frac{5}{2}\,|\,1\,|\,\frac{18}{5}\right)$ ist. In welchem Punkt berührt die Kugel die Ebene E_3 und wie groß ist der Radius der Kugel?

f) Wie kann ohne einen Schnittpunkt zu berechnen überprüft werden, ob zwei gegebene Geraden eine Ebene bestimmen, d. h. in einer Ebene liegen?

7. Gegeben sind die beiden Geraden g und h:

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 2 \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie den Schnittpunkt von g und h.

b) Bestimmen Sie den Winkel zwischen g und h.

c) Wie lautet die Gleichung der Ebene E_1 in Normalenform, in der die Geraden g und h liegen? Wie groß ist der Abstand der Ebene E_1 zum Ursprung?

d) Wie lautet die Gleichung der Ebene E_2 in Normalenform, in der die Punkte $P(0\,|\,2\,|\,1)$ und $Q(2\,|\,3\,|\,2)$ liegen und die senkrecht zu E_1 steht?

e) Die Ebene $E_3: \; -10x - 5y + 10z = -9$ ist eine Tangentialebene einer Kugel K, deren Mittelpunkt $M\big(\frac{5}{2}\,|\,1\,|\,\frac{18}{5}\big)$ ist. In welchem Punkt berührt die Kugel die Ebene E_3 und wie groß ist der Radius der Kugel?

f) Wie kann ohne einen Schnittpunkt zu berechnen überprüft werden, ob zwei gegebene Geraden eine Ebene bestimmen, d. h. in einer Ebene liegen?

7. Lösungen:

a) $\lambda = -\frac{1}{4}, \quad \mu = -2, \quad S(-1\,|\,1\,|\,-2),$

b) $\alpha = 71{,}6^\circ$. *(Es wird stets der kleinere der zwei möglichen Winkel genommen.)*

c) $E_1: \quad -2x - y + 2z = -3, \qquad d = 1$

d) $E_2: \quad \vec{x} = \overrightarrow{OP} + \lambda\,(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}) + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad E_2: \quad x - 2y = -4$

e) *Der Berührpunkt ergibt sich als Schnittpunkt der Ebene E_3 mit einer Geraden, die durch M verläuft und die als Richtungsvektor den Normalenvektor von E_3 hat.*

$\lambda = -\frac{1}{15}, \quad B\big(\frac{19}{6}\,|\,\frac{4}{3}\,|\,\frac{44}{15}\big), \qquad d = 1$

f) *Falls die Geraden nicht parallel sind, müsste der Vektor, der sich als Differenz der beiden Stützvektoren ergibt,komplanar mit den beiden Richtungsvektoren sein, d.h. er müßte eine Linearkombination der beiden Richtungsvektoren sein. Man sagt auch, dass der Differenzvektor und die Richtungsvektoren linear abhängig sind.*

1. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem sind die Punkte $O(0\,|\,0\,|\,0)$, $A(6\,|\,0\,|\,0)$, $B(6\,|\,6\,|\,6)$, die Ebene $F\colon\ x_1 - x_2 = 0$ und die Ebenenschar $G_k\colon\ kx_1 + 6x_2 - 6k = 0$ mit $k > 0$ gegeben.

   a) Bestimmen Sie in Normalenform eine Gleichung der Ebene E, die die Punkte A, B und O enthält. Weisen Sie nach, dass das Dreieck OAB bei A rechtwinklig ist.
   (mögliches Teilergebnis $E\colon\ x_2 - x_3 = 0$)

   b) Alle Punkte des Dreiecks OAB, für die A der nächstgelegene Eckpunkt ist, werden grün gekennzeichnet. Welcher Bruchteil der Dreiecksfläche ist dann grün gefärbt?
   Begründen Sie Ihre Antwort anhand einer Skizze.

   c) Durch die Spiegelung der Ebene E aus Teilaufgabe 1a) an der Ebene F erhält man die Ebene E^*. Begründen Sie, dass B und O Fixpunkte dieser Spiegelung sind. Ermitteln Sie für E^* eine Gleichung in Normalenform. *(mögliches Teilergebnis $E^*\colon\ x_1 - x_3 = 0$)*

2. a) Geben Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s der Ebenen E und E^* sowie den Schnittwinkel φ von E und E^* an.

   b) Bestimmen Sie - soweit vorhanden - die Koordinaten der Schnittpunkte der Scharebenen G_k mit den Koordinatenachsen. Welche besondere Lage im Koordinatensystem hat jede Scharebene G_k?

   c) Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass alle Scharebenen G_k eine gemeinsame Schnittgerade g haben, und geben Sie eine Gleichung von g an.

3. Für jedes $k > 0$ begrenzen die Ebenen E, E^*, G_k und die x_1x_2-Ebene eine dreiseitige Pyramide P_k.

   a) Geben Sie die Koordinaten der vier Eckpunkte von P_k an und berechnen Sie das Pyramidenvolumen V_k in Abhängigkeit von k.

   b) Für welches k ist F Symmetrieebene von P_k? Geben Sie eine kurze Begründung.

zur Kontrolle:

2. a) $\varphi = 60°$

3. a) $\overrightarrow{OS} = \dfrac{6k}{6+k}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, S Pyramidenspitze

$$V_k = \frac{6k^2}{6+k}$$

Eine gute geometrische Vorstellung erleichtert
in dieser ansprechenden Aufgabe Vieles.

Würfelaufgabe

8. Die Punkte $O(0\,|\,0\,|\,0)$, $A(4\,|\,0\,|\,0)$, $B(0\,|\,4\,|\,0)$, $C(0\,|\,0\,|\,4)$, $F(4\,|\,4\,|\,4)$ sind Eckpunkte eines Würfels.

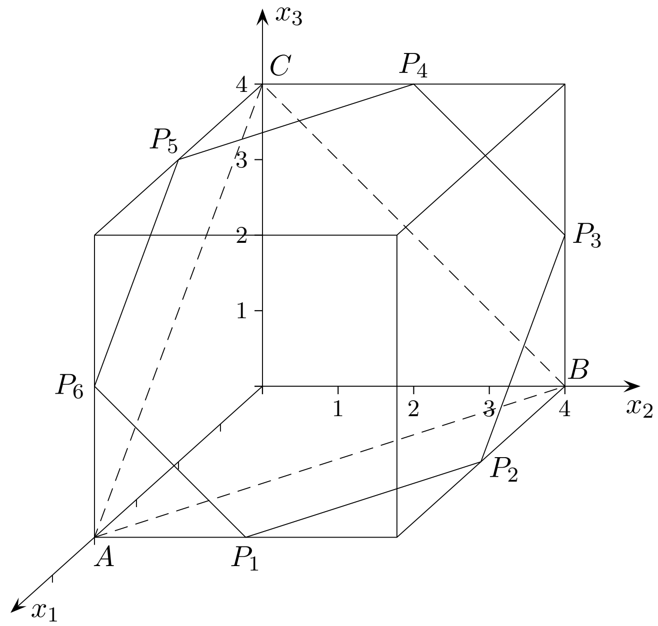
   a) Die Ebene $E\colon\ x_1 + x_2 + x_3 = 6$ schneidet den Würfel in einem Sechseck.
   Zeichnen Sie den Würfel und das Sechseck in ein Koordinatensystem.
   Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC und das Sechseck den gleichen Umfang haben.

   b) Für welche Werte von a schneidet die Ebenenschar $E_a\colon\ x_1 + x_2 + x_3 = a$ den Würfel?
   Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Anzahl der Ecken der Schnittfigur und den Werten von a ?

   c) Gibt es Ebenen außerhalb der Schar E_a, die den Würfel in einem Fünfeck schneiden?

8. Die Punkte $O(0\,|\,0\,|\,0)$, $A(4\,|\,0\,|\,0)$, $B(0\,|\,4\,|\,0)$, $C(0\,|\,0\,|\,4)$, $F(4\,|\,4\,|\,4)$ sind Eckpunkte eines Würfels.

a) Die Ebene E: $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ schneidet den Würfel in einem Sechseck.
Zeichnen Sie den Würfel und das Sechseck in ein Koordinatensystem.
Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC und das Sechseck den gleichen Umfang haben.



$x_1 = 4$ und $x_3 = 0$ ergibt $x_2 = 2$, $P_1(4\,|\,2\,|\,0)$

$x_2 = 4$ und $x_3 = 0$ ergibt $x_1 = 2$, $P_2(2\,|\,4\,|\,0)$

analog $P_3(0\,|\,4\,|\,2)$, $P_4(0\,|\,4\,|\,2)$, $P_5(2\,|\,0\,|\,4)$, $P_6(4\,|\,0\,|\,2)$

regelmäßiges Sechseck, Seitenlänge $a_1 = 2\sqrt{2}$, Umfang $U_1 = 12\sqrt{2}$

gleichseitiges Dreieck, Seitenlänge $a_2 = 4\sqrt{2}$, Umfang $U_2 = 12\sqrt{2}$

b) Für welche Werte von a schneidet die Ebenenschar E_a: $x_1 + x_2 + x_3 = a$ den Würfel?
Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Anzahl der Ecken der Schnittfigur und den Werten von a ?

Grenzfälle: $O \in E_a$ für $a = 0$, $F \in E_a$ für $a = 12$

für $0 \leq a \leq 12$ wird der Würfel geschnitten

Dreieck für $0 < a \leq 4$ und für $8 \leq a < 12$

gestricheltes Dreieck für $a = 4$

Dreieck für $a = 8$ mit den Eckpunkten $D(0\,|\,4\,|\,4), G(0\,|\,4\,|\,4), H(4\,|\,0\,|\,4)$

Sechseck für $4 < a < 8$

c) Gibt es Ebenen außerhalb der Schar E_a, die den Würfel in einem Fünfeck schneiden?

mögliche Lösungen:
Ebene, die das gezeichnete Sechseck enthält, um die Achse P_1P_2 drehen,
so dass P_5 und P_4 in den Punkt C oder einen anderen Punkt
auf der Strecke $\overline{OC}$ (ungleich O) übergehen.

9. Ein Sportflugzeug und ein Militärflugzeug befinden sich auf geradlinigem Kurs. Im örtlichen Koordinatensystem der Flugsicherungsstelle gelten folgende Angaben: Das Sportflugzeug befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ am Ort $A(30\,|\,0\,|\,2)$ (Längen in km, Zeiten in h), der Geschwindigkeitsvektor lautet: $\vec{v} = \begin{pmatrix} -100 \\ 250 \\ 0 \end{pmatrix}$. Für das Militärflugzeug lauten die entsprechenden Angaben $B(-20\,|\,-10\,|\,1)$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 100 \\ 350 \\ 5 \end{pmatrix}$.

   a) Berechnen Sie den Abstand der beiden Flugrouten.

   b) Bestimmen Sie die kleinste Entfernung beider Flugzeuge.

10. Variation der obigen Aufgabe:

   Das Sportflugzeug befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ am Ort $A(10\,|\,0\,|\,3)$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -60 \\ 300 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   Für das Militärflugzeug lauten
   die entsprechenden Angaben $B(-40\,|\,-20\,|\,2)$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 300 \\ 450 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Flugrouten GTR Lösungen

9. Ein Sportflugzeug und ein Militärflugzeug befinden sich auf geradlinigem Kurs. Im örtlichen Koordinatensystem der Flugsicherungsstelle gelten folgende Angaben: Das Sportflugzeug befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ am Ort $A(30 \mid 0 \mid 2)$ (Längen in km, Zeiten in h), der Geschwindigkeitsvektor lautet: $\vec{v} = \begin{pmatrix} -100 \\ 250 \\ 0 \end{pmatrix}$. Für das Militärflugzeug lauten die entsprechenden Angaben $B(-20 \mid -10 \mid 1)$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 100 \\ 350 \\ 5 \end{pmatrix}$.

   a) Berechnen Sie den Abstand der beiden Flugrouten. $\quad 0{,}125\,km$

   b) Bestimmen Sie die kleinste Entfernung beider Flugzeuge. $\quad 13{,}417\,km$ nach $0{,}22\,h$

   $$d(t) = \sqrt{(50 - 200t)^2 + (10 - 100t)^2 + (1 - 5t)^2}$$

10. Variation der obigen Aufgabe:

    Das Sportflugzeug befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ am Ort $A(10 \mid 0 \mid 3)$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -60 \\ 300 \\ 0 \end{pmatrix}$.
    Für das Militärflugzeug lauten die entsprechenden Angaben $B(-40 \mid -20 \mid 2)$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 300 \\ 450 \\ 2 \end{pmatrix}$.

    a) Abstand der beiden Flugrouten $\quad 0{,}723\,km$

    b) kleinste Entfernung beider Flugzeuge $\quad 1{,}056\,km$ nach $0{,}14\,h$

    $$d(t) = \sqrt{(50 - 360t)^2 + (20 - 150t)^2 + (1 - 2t)^2}$$

Flugbahnen

11. In einem Koordinatensystem beschreibt die x_1-x_2-Ebene eine flache Landschaft, in der sich ein Flughafen befindet. Die x_1-Achse weise in die Ostrichtung und die x_2-Achse in die Nordrichtung. Unmittelbar nach dem Abheben von der Startbahn im Punkt P steigt das Flugzeug F_1 geradlinig auf.

    Die Flugbahn von F_1 verläuft auf der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -10{,}5 \\ -14 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 21 \\ 28 \\ 12 \end{pmatrix}$.

    Ein zweites Flugzeug F_2 bewegt sich entlang der Geraden h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -7{,}2 \\ -9{,}6 \\ 12 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

    Die Längeneinheit ist $1\,km$.

    a) Beschreiben Sie die Himmelsrichtungen, in welche die beiden Flugzeuge fliegen.
    Das Flugzeug F_1 überfliegt in $6\,km$ Höhe das Zentrum einer Stadt.
    Berechnen Sie den Abstand des Stadtzentrums vom Abhebepunkt P.
    Bestimmen Sie den Steigungswinkel der Flugbahn von F_1.

    b) Als das Flugzeug F_1 in einer Wolkendecke verschwindet, hat es vom Punkt P einen Abstand von $37\,km$. In welcher Höhe taucht F_1 in die Wolkendecke ein?
    Zeigen Sie, dass die Flugzeuge F_1 und F_2 auf den angegebenen Bahnen nicht kollidieren können.
    Berechnen Sie den Abstand der beiden Flugzeuge für den Fall, dass sich F_2 genau über F_1 befindet. Ist dieses der Abstand der beiden Flugbahnen?

    c) Nahe der Startbahn befindet sich im Punkt $R(-10{,}2 \mid -13{,}6 \mid 0)$ eine Radarstation mit einem halbkugelförmigen Überwachungsbereich mit dem Radius $85\,km$.
    Wie viele Kilometer fliegt das Flugzeug F_2 im Überwachungsbereich des Radars?

    d) Die geradlinige Grenze zu einem Nachbarstaat verläuft durch die Punkte $G_1(84 \mid -3 \mid 0)$ und $G_2(12 \mid -99 \mid 0)$.
    Welchen maximalen Abstand von der Grenze hat ein Punkt im Nachbarland, der vom Radar noch erfasst wird? (Rechnung ohne Berücksichtigung der Erdkrümmung)

Flugbahnen Lösungshinweise

11. In einem Koordinatensystem beschreibt die x_1-x_2-Ebene eine flache Landschaft, in der sich ein Flughafen befindet. Die x_1-Achse weise in die Ostrichtung und die x_2-Achse in die Nordrichtung. Unmittelbar nach dem Abheben von der Startbahn im Punkt P steigt das Flugzeug F_1 geradlinig auf.

    Die Flugbahn von F_1 verläuft auf der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -10{,}5 \\ -14 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 21 \\ 28 \\ 12 \end{pmatrix}$.

    Ein zweites Flugzeug F_2 bewegt sich entlang der Geraden h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -7{,}2 \\ -9{,}6 \\ 12 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

    Die Längeneinheit ist $1\,km$.

    a) Beschreiben Sie die Himmelsrichtungen, in welche die beiden Flugzeuge fliegen.

    F_1: zwischen NO und N, setze z-Koordinate 0

    F_2: zwischen SO und O

    Das Flugzeug F_1 überfliegt in $6\,km$ Höhe das Zentrum einer Stadt.
    Berechnen Sie den Abstand des Stadtzentrums vom Abhebepunkt P.

    $x_3 = 6 \implies \lambda = \frac{1}{2}$, $Z(0\,|\,0\,|\,0)$

    $P(-10{,}5\,|\,-14\,|\,0)$, $17{,}5\,km$

    Bestimmen Sie den Steigungswinkel der Flugbahn von F_1. 18,9°

    b) Als das Flugzeug F_1 in einer Wolkendecke verschwindet, hat es vom Punkt P einen Abstand von $37\,km$. In welcher Höhe taucht F_1 in die Wolkendecke ein? $12\,km$

    Zeigen Sie, dass die Flugzeuge F_1 und F_2 auf den angegebenen Bahnen nicht kollidieren können.
    Berechnen Sie den Abstand der beiden Flugzeuge für den Fall, dass sich F_2 genau über F_1 befindet. Ist dieses der Abstand der beiden Flugbahnen?

    $H_1(-7{,}2\,|\,-9{,}6\,|\,1{,}9)$

    $H_2(-7{,}2\,|\,-9{,}6\,|\,12)$

    $d = 10{,}1\,km$ nein

    c) Nahe der Startbahn befindet sich im Punkt $R(-10{,}2\,|\,-13{,}6\,|\,0)$ eine Radarstation mit einem halbkugelförmigen Überwachungsbereich mit dem Radius $85\,km$.
    Wie viele Kilometer fliegt das Flugzeug F_2 im Überwachungsbereich des Radars?

    $\lambda_{1/2} = \pm 16{,}8$

    $168\,km$

    d) Die geradlinige Grenze zu einem Nachbarstaat verläuft durch die Punkte $G_1(84\,|\,-3\,|\,0)$ und $G_2(12\,|\,-99\,|\,0)$.
    Welchen maximalen Abstand von der Grenze hat ein Punkt im Nachbarland, der vom Radar noch erfasst wird? (Rechnung ohne Berücksichtigung der Erdkrümmung)

    R ist von der Grenze $69\,km$ entfernt.

    Der maximale Abstand beträgt $16\,km$.

Drehpyramide

Abitur Roolfs 2005

12. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem sind die Eckpunkte $A(4\,|\,4\,|\,0)$, $B(2\,|\,7\,|\,1)$, $C(0\,|\,4\,|\,0)$ der dreieckigen Grundfläche einer Pyramide und deren Spitze $S_k(-2k\,|\,5+3k\,|\,7+k)$ gegeben.

   a) Geben Sie die Normalenform der Ebene E an, in der die Grundfläche ABC liegt.
   Berechnen Sie den Winkel, den die Grundfläche mit der xy-Ebene einschließt.
   Untersuchen Sie, ob die Punkte S_k auf einer Geraden liegen und bestimmen Sie das Volumen der Pyramide $ABCS_k$.
   Was kann aus dem Ergebnis geschlossen werden?

   b) Ermitteln Sie für die Pyramide mit der Spitze S_{-1} den Lotfußpunkt L (die Strecke LS_{-1} steht senkrecht auf der Ebene, in der die Grundfläche der Pyramide liegt) und untersuchen Sie,

      1) ob der Lotfußpunkt L in der Grundfläche der Pyramide liegt,

      2) ob diese Pyramide eine Symmetrieebene hat.

   c) Die Punkte A, C und S_k liegen für ein festes k in einer Ebene E_k. Geben Sie die Normalengleichung der Ebenenschar E_k an. Untersuchen Sie, welche Punkte die Ebenenschar gemeinsam hat. Welche Ebene ergibt sich, falls k gegen Unendlich strebt?
   Beschreiben Sie einen Lösungsweg zur Beantwortung der Frage, ob E_1 die Pyramide mit der Spitze S_{-1} in zwei volumengleiche Teile zerlegt.

   d) Die Pyramide mit der Spitze S_{-1} soll um die Achse AC gedreht werden, so dass die Spitze in der xz-Ebene liegt. Bestimmen Sie den Drehwinkel.

12. a) Normalenform E: $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + 4 = 0$, Winkel, den die Ebenen einschließen: $\alpha = 18{,}4°$

$$\overrightarrow{OS_k} = \begin{pmatrix} -2k \\ 5+3k \\ 7+k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \text{Die Punkte } S_k \text{ liegen auf einer Geraden.}$$

Volumen $V_{\text{Pyramide}} = \frac{80}{6}$ VE (mit dem Spatprodukt)

b) Der Lotfußpunkt $L(2\,|\,4\,|\,0)$ ergibt sich als Schnitt der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit der Ebene E.

Durch die Lage des Lotfußpunkts ergibt sich die Symmetrieebene durch L, B und S_1.

c) Normalenform der Ebenenschar E_k: $\begin{pmatrix} 0 \\ 7+k \\ -1-3k \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 28 - 4k = 0$,

Die Ebenen der Schar drehen sich um die Gerade AC.
Für $k \longrightarrow \infty$ ergibt sich die Ebene E.
Ein Lösungsweg wäre, die Ebene E_1 mit der Geraden BS_{-1} zum Schnitt zu bringen, um alle benötigten Vektoren für zwei Volumenberechnungen mithilfe des Spatprodukts zu erhalten.

d) Es ist $|\overrightarrow{LS_{-1}}| = \sqrt{40}$, $\overrightarrow{LS_{-1}}$ bildet mit der xy-Ebene eínen Winkel $\beta = 71{,}6°$,
Wird der Vektor gedreht, so dass die Spitze in der xz-Ebene liegt, entsteht ein rechtwinkliges Dreieck mit der Kathete $a = 4$ und einem Winkel $\gamma = 50{,}7°$.
Für den Drehwinkel ϕ gilt: $\phi = \beta - \gamma = 20{,}9°$.

Geradenschar und Kugel

13. Gegeben sind die vier Eckpunkte $O(0\,|\,0\,|\,0)$, $A(12\,|\,0\,|\,0)$, $B(0\,|\,6\,|\,0)$ und $C(0\,|\,0\,|\,6)$ einer Pyramide,

    sowie die Geradenschar g_t: $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2t-1 \\ 2t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$

    a) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.

    b) Bestimmen Sie diejenige Kugel K mit dem Mittelpunkt $O(0\,|\,0\,|\,0)$, die die Ebene E, in der die Punkte A, B, C liegen, berührt. Bestimmen Sie auch den Berührpunkt T.

    c) Untersuchen Sie, ob die Geraden g_t in der Ebene E liegen. Gibt es eine Gerade der Schar, die die Kugel K aus b) tangiert?

    d) Gibt es eine Gerade der Schar, die die Dreiecksfläche ABC halbiert?

13. Gegeben sind die vier Eckpunkte $O(0\,|\,0\,|\,0)$, $A(12\,|\,0\,|\,0)$, $B(0\,|\,6\,|\,0)$ und $C(0\,|\,0\,|\,6)$ einer Pyramide, sowie die Geradenschar g_t: $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2t-1 \\ 2t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$

a) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.

$V = 72\ VE$

b) Bestimmen Sie diejenige Kugel K mit dem Mittelpunkt $O(0\,|\,0\,|\,0)$, die die Ebene E, in der die Punkte A, B, C liegen, berührt. Bestimmen Sie auch den Berührpunkt T.

$\vec{x}^{\,2} = 16$

E: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 12 = 0$

$T\left(\frac{4}{3}\,|\,\frac{8}{3}\,|\,\frac{8}{3}\right)$

c) Untersuchen Sie, ob die Geraden g_t in der Ebene E liegen. Gibt es eine Gerade der Schar, die die Kugel K aus b) tangiert?

g_t in E enthalten.

g_t verläuft durch T, $\lambda = \frac{2}{3} \quad \Longrightarrow \quad t = 2$

d) Gibt es eine Gerade der Schar, die die Dreiecksfläche ABC halbiert?

g_t verläuft durch $B(6\,|\,0\,|\,3)$, $\lambda = 3 \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{1}{2}$

Gegeben sind die Punkte $A(1\,|\,4\,|\,-3)$, $B(-2\,|\,1\,|\,-3)$ und $C(1\,|\,-2\,|\,5)$.

1. a) Zeigen Sie, dass die Punkte A, B und C ein Dreieck bilden und stellen Sie die Normalengleichung der Ebene auf, in der die Punkte liegen.

   b) Vom Punkt $D(5\,|\,-3\,|\,-2)$ wird das Lot auf die Ebene E: $-4x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 3 = 0$ gefällt. Bestimmen Sie den Lotfußpunkt.

   c) Der Punkt D und sein Spiegelpunkt D^* bzgl. der Ebene E (Teil b)) sowie die Punkte A, B und C bilden einen Körper. Beschreiben Sie diesen Körper und berechnen Sie sein Volumen.

   d) Stellen Sie die Gleichungen der in der Ebene E (Teil b)) liegenden Mittelsenkrechten der Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ auf und bestimmen Sie den Schnittpunkt dieser Mittelsenkrechten.

   e) Zeigen Sie: Der Punkt $M(1\,|\,1\,|\,1)$ ist der Mittelpunkt der Kreislinie k, auf der die Punkte A, B und C liegen.

   f) Die Gerade MB durchstößt die Kreislinie k (Teil e)) im Punkt B^* ein zweites Mal. Bestimmen Sie B^* und begründen Sie, dass die Dreiecke BAB^* und BCB^* rechtwinklig sind.

2. Gegeben ist die Geradenschar

$$g_t\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 4+3t \\ t \\ 4t-3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \qquad t, \lambda \in \mathbb{R}.$$

   a) Die Aufpunkte der Geradenschar liegen selbst auf einer Geraden h. Geben Sie einen Aufpunkt und einen Richtungsvektor von h an.

   b) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, in der alle Geraden der Schar enthalten sind.

   c) Welche Gerade der Schar hat den minimalen Abstand vom Ursprung?

Kreislinie und Mittelsenkrechten Lösungshinweise

Gegeben sind die Punkte $A(1\,|\,4\,|\,-3)$, $B(-2\,|\,1\,|\,-3)$ und $C(1\,|\,-2\,|\,5)$.

1. a) Zeigen Sie, dass die Punkte A, B und C ein Dreieck bilden und stellen Sie die Normalengleichung der Ebene auf, in der die Punkte liegen.

   Die Normalengleichung ist die von 1. b)
   Da das Vektorprodukt nicht den Nullvektor ergibt,
   liegen die Punkte nicht auf einer Geraden.

   b) Vom Punkt $D(5\,|\,-3\,|\,-2)$ wird das Lot auf die Ebene $E\colon -4x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 3 = 0$ gefällt. Bestimmen Sie den Lotfußpunkt.

   Der Lotfußpunkt ist der Punkt M von 1. e)

   c) Der Punkt D und sein Spiegelpunkt D^* bzgl. der Ebene E (Teil b)) sowie die Punkte A, B und C bilden einen Körper. Beschreiben Sie diesen Körper und berechnen Sie sein Volumen.

   82 *VE*

   d) Stellen Sie die Gleichungen der in der Ebene E (Teil b)) liegenden Mittelsenkrechten der Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ auf und bestimmen Sie den Schnittpunkt dieser Mittelsenkrechten.

   Die Punkte A, B, C und B^* sind die Eckpunkte eines Rechtecks,
   dessen Mittelpunkt M ist. Die Mittelsenkrechten sind daher einfach zu bestimmen.
   Um allgemeiner eine Senkrechte zu einer Geraden zu finden,
   die auch in einer bestimmten Ebene liegt,
   ist das Vektorprodukt von Richtungsvektor der Geraden und
   Normalenvektor der Ebene zu bilden.

   e) Zeigen Sie: Der Punkt $M(1\,|\,1\,|\,1)$ ist der Mittelpunkt der Kreislinie k, auf der die Punkte A, B und C liegen.

   Radius $r = 5$

   f) Die Gerade MB durchstößt die Kreislinie k (Teil e)) im Punkt B^* ein zweites Mal. Bestimmen Sie B^* und begründen Sie, dass die Dreiecke BAB^* und BCB^* rechtwinklig sind.

   Das sollte nun klar sein.

2. Gegeben ist die Geradenschar

$$g_t\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 4+3t \\ t \\ 4t-3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \qquad t, \lambda \in \mathbb{R}.$$

   a) Die Aufpunkte der Geradenschar liegen selbst auf einer Geraden h. Geben Sie einen Aufpunkt und einen Richtungsvektor von h an.

$$h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

   b) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, in der alle Geraden der Schar enthalten sind.

   $-4x_1 + 3x_3 + 25 = 0$

   c) Welche Gerade der Schar hat den minimalen Abstand vom Ursprung?

   Da durch jeden Punkt der Ebene eine Gerade verläuft,
   ist zunächst der Punkt $T(4\,|\,0\,|\,-3)$ mit minimalem Abstand zum Ursprung zu bestimmen.
   offensichtlich g_0

14. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem beschreiben die Punkte $A(0\,|\,0\,|\,0)$, $B(4\,|\,-2\,|\,0)$, $C(0\,|\,6\,|\,0)$ die dreiseitige Grundfläche eines Prismas.

    Eine Kante des Prismas ist $\overline{A\,D_k}$ mit $D_k(2+k\,|\,2-2k\,|\,5)$, $k \in \mathbb{R}$.

    a) Ermitteln Sie die übrigen Punkte des Prismas *(für allgemeines k)* und sein Volumen. Was fällt Ihnen bei dem Ergebnis auf? Geben Sie hierfür eine geometrische Erklärung.

    b) Untersuchen Sie, ob es einen Punkt D_k gibt, so dass das Dreieck $B\,C\,D_k$ gleichschenklig mit der Spitze D_k ist.

    c) Zeigen Sie, dass es keinen Punkt D_k gibt, so dass das Prisma senkrecht ist. Das Prisma kann für allgemeines k nach zwei verschiedenen Richtungen geneigt sein. Bestimmen Sie denjenigen Punkt D_k, der diese Richtungen trennt (für diesen Punkt ist das Prima am wenigsten schief).

    d) Sei nun ein gerades Prisma mit derselben Grundfläche wie das obige gegeben (die Höhe ist unwichtig). Diesem geraden Prisma wird ein Zylinder umbeschrieben. Ermitteln Sie den Mittelpunkt der Grundkreisfläche des Zylinders.

       Dieses gerade Prisma soll durch eine Schnittebene, die parallel zur Prismaseitenfläche, in der die Punkte B und C liegen und die senkrecht zur xy-Ebene verläuft, halbiert werden (das Volumen wird halbiert). Beschreiben Sie nur *(ohne zu rechnen)*, wie die Gleichung der Schnittebene ermittelt werden kann.

14. a) $E(6+k\,|\,-2k\,|\,5)$, $\quad F(2+k\,|\,8-2k\,|\,5)$

$V = \frac{1}{2}((\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \times (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}))\cdot \overrightarrow{OD_k} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC})\cdot \overrightarrow{OD_k} = 60$

Ergebnis ist von k unabhängig, daher liegen für verschiedene k gescherte Prismen vor.

b) Bedingung: $|\overrightarrow{OD_k} - \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OD_k} - \overrightarrow{OC}| \implies k = 0, \quad D_k(2\,|\,2\,|\,5)$

c) Es gibt kein k, so dass das zugehörige Prisma gerade ist. Die Gerade g der Punkte D_k schneidet nicht die z-Achse.

Es muss der Punkt D_k^* ermittelt werden, der von der z-Achse minimalen Abstand d hat. d ergibt sich als Abstand von $G(0\,|\,0\,|\,5)$ zu $g \implies d = \frac{6}{\sqrt{5}}, \quad D_k^*\left(\frac{12}{5}\,|\,\frac{6}{5}\,|\,5\right)$

d) Für den Umkreis ist der Schnittpunkt M der Mittelsenkrechten m_1 und m_2 zu berechnen.

m_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\qquad m_2$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\qquad M(4\,|\,3\,|\,0)$.

Ebenen-Aufgabe

1. Gegeben sind die Punkte $A(0\,|\,0\,|\,-4)$, $B(4\,|\,0\,|\,0)$ und $C_t(t-8\,|\,t\,|\,t-8)$, $t \in \mathbb{R}$.

   a) Zeigen Sie, dass die Punkte A, B und C_t für jedes t ein Dreieck D_t bestimmen.
   Ermitteln Sie den Wert t_{min}, für den der Flächeninhalt von D_t minimal ist.

   b) Die Punkte A, B und C_t liegen in einer Ebene E_t.
   Stellen Sie eine Gleichung dieser Ebene E_t in Normalenform auf.
   [mögliches Ergebnis $E_t : tx + 4y - tz = 4t$]

   c) Gibt es ein t, so dass E_t mit der xz-Ebene identisch ist?

   d) Für welches t hat C_t minimale Entfernung zu den Punkten der Geraden AB?

   e) Zeigen Sie, dass die Ebenen E_t und E_{t^*} genau dann aufeinander senkrecht stehen, wenn gilt: $t \cdot t^* = -8$. Zu welcher Ebene der Schar existiert keine senkrechte Ebene in der Schar?

   f) Zwei zueinander senkrechte Ebenen E_t und E_{t^*} schneiden die y-Achse in den Punkten S_t und S_{t^*}. Berechnen Sie die Streckenlänge $\overline{S_t S_{t^*}}$ und ermitteln Sie, für welche Werte von t diese Streckenlänge minimal wird.

Ergebnisse:

a) $A = \sqrt{32t^2 + 256}, \quad t_{\text{min}} = 0$

b)

c) $t = 0$

d) $t = 0, \quad d = \sqrt{8}$

e) E_0

f) $|\, t + \frac{1}{t} \,| \quad \longrightarrow \quad \text{min}, \quad t = \pm\sqrt{8}$

Schnittflächen-Aufgabe

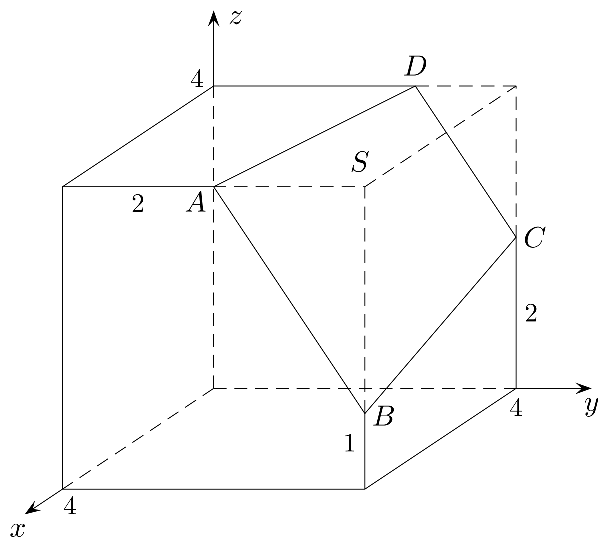
Ein Würfel mit der Kantenlänge 4 LE wird von einer Ebene E, die durch die Punkte A, B, C und D verläuft, geschnitten. Ermitteln Sie

a) die Koordinaten von D,

b) den Flächeninhalt der Schnittfläche,

c) den Abstand von S zu E,

d) auf verschiedene Weisen das Volumen der Pyramide mit der Schnittfläche als Grundfläche und der Spitze S.



Ergebnisse:

a) $E\colon\ x + 6y + 4z = 32, \qquad D\left(0 \mid \frac{8}{3} \mid 4\right)$

b) $A_{\text{Trapez}} = \frac{5\sqrt{53}}{3}\,FE$

c) $d(S, E) = \frac{12}{\sqrt{53}}$.

d) $V = \frac{20}{3}\,VE$

Winkel

1. Gegeben sind die Punkte $A(1\,|\,3\,|\,2)$ und $B(-1\,|\,8\,|\,3)$.
   Untersuche, ob es einen Punkt P auf der y-Achse gibt, für den der Winkel $\measuredangle BPA$ 90 Grad beträgt.

2. Gegeben sind die Punkte $A(0\,|\,0\,|\,2)$ und $B(0\,|\,0\,|\,8)$.
   Für welchen Punkt P auf der positiven y-Achse ist der Winkel $\measuredangle BPA$ maximal?

3. Gegeben sind die Punkte $A(1\,|\,3\,|\,2)$ und $B(-1\,|\,8\,|\,3)$.
   Untersuche, ob es einen Punkt P auf der y-Achse gibt, für den der Winkel $\measuredangle BPA$ 60 Grad beträgt.

Winkel

1. Gegeben sind die Punkte $A(1\,|\,3\,|\,2)$ und $B(-1\,|\,8\,|\,3)$.
   Untersuche, ob es einen Punkt P auf der y-Achse gibt, für den der Winkel $\measuredangle BPA$ 90 Grad beträgt.

   $$5 + (3 - y)(8 - y) = 0$$
   $$y_1 = 4{,}382$$
   $$y_2 = 6{,}618$$

2. Gegeben sind die Punkte $A(0\,|\,0\,|\,2)$ und $B(0\,|\,0\,|\,8)$.
   Für welchen Punkt P auf der positiven y-Achse ist der Winkel $\measuredangle BPA$ maximal? $y = 4$

3. Gegeben sind die Punkte $A(1\,|\,3\,|\,2)$ und $B(-1\,|\,8\,|\,3)$.
   Untersuche, ob es einen Punkt P auf der y-Achse gibt, für den der Winkel $\measuredangle BPA$ 60 Grad beträgt.

   $$y_1 = 2{,}612$$
   $$y_2 = 8{,}914$$

Helikopter-Aufgabe

Ein Helikopter fliegt geradlinig in Richtung Landeplatz.

Die Flugbahn wird durch g: $\quad \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ beschrieben.

Der Helikopter ist mit einem Suchscheinwerfer ausgestattet,
der stets auf die Turmspitze $S(10 \,|\, 2 \,|\, 4)$ ausgerichtet wird.

a) Wo landet der Helikopter?

b) In welcher Ebene (Koordinatenform) liegen die Scheinwerferstrahlen?

c) Gibt es ein a, so dass ein Objekt im Punkt $P(25 \,|\, 8 \,|\, a)$ gefunden wird?

d) Welchen Winkel schließt der Scheinwerferstrahl zu $t = 0$ mit dem Boden (xy-Ebene) ein?

e) Der Helikopter hat die Flughöhe $h = 5$ erreicht. Wie lang ist die Flugstrecke nun noch?

Für die restlichen Teilaufgaben soll <u>nur</u> ein Lösungsweg geschildert werden.

f) Welcher Punkt auf der Flugbahn kommt der Turmspitze am nächsten?

g) Wird eine Hausfassade (Rechteck mit aufgesetztem Dreieck, gegeben sind die Eckpunkte) von dem Scheinwerferstrahl getroffen, der vom Punkt Q (gegeben) der Flugbahn ausgeht?

h) Die Scheinwerferstrahlen verlaufen über einem senkrecht stehenden Mast (gegeben ist die Mastspitze: $M(x_m \,|\, y_m \,|\, z_m)$). Wie hoch hätte er mindestens sein müssen, damit er von den Scheinwerferstrahlen erfasst worden wäre?

i) Gibt es Punkte auf der Flugbahn, an denen die Scheinwerferstrahlen nicht auf den Boden treffen? Wenn ja, wie werden sie ermittelt?

j) Gibt es zwei Punkte auf der Flugbahn, die zusammen mit der Turmspitze ein gleichseitiges Dreieck bilden?

k) Die Scheinwerferstrahlen erfassen ein am Boden liegendes Objekt $K(x_k \,|\, y_k \,|\, 0)$. In welchem Punkt der Flugbahn geschieht dies?

Helikopter-Aufgabe

Ein Helikopter fliegt geradlinig in Richtung Landeplatz.

Die Flugbahn wird durch g: $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ beschrieben.

Der Helikopter ist mit einem Suchscheinwerfer ausgestattet,
der stets auf die Turmspitze $S(10 \mid 2 \mid 4)$ ausgerichtet wird.

a) Wo landet der Helikopter? $L(28 \mid 14 \mid 0)$

b) In welcher Ebene (Koordinatenform) liegen die Scheinwerferstrahlen? $2x - y + 6z = 42$

c) Gibt es ein a, so dass ein Objekt im Punkt $P(25 \mid 8 \mid a)$ gefunden wird? $a = 0$

d) Welchen Winkel schließt der Scheinwerferstrahl zu $t = 0$ mit dem Boden (xy-Ebene) ein? $\alpha = 15{,}4°$

e) Der Helikopter hat die Flughöhe $h = 5$ erreicht. Wie lang ist die Flugstrecke nun noch? $d = \sqrt{525}$

Für die restlichen Teilaufgaben soll nur ein Lösungsweg geschildert werden.

f) Welcher Punkt auf der Flugbahn kommt der Turmspitze am nächsten?

g) Wird eine Hausfassade (Rechteck mit aufgesetztem Dreieck, gegeben sind die Eckpunkte) von dem Scheinwerferstrahl getroffen, der vom Punkt Q (gegeben) der Flugbahn ausgeht?

h) Die Scheinwerferstrahlen verlaufen über einem senkrecht stehenden Mast (gegeben ist die Mastspitze: $M(x_m \mid y_m \mid z_m)$). Wie hoch hätte er mindestens sein müssen, damit er von den Scheinwerferstrahlen erfasst worden wäre?

i) Gibt es Punkte auf der Flugbahn, an denen die Scheinwerferstrahlen nicht auf den Boden treffen? Wenn ja, wie werden sie ermittelt?

j) Gibt es zwei Punkte auf der Flugbahn, die zusammen mit der Turmspitze ein gleichseitiges Dreieck bilden?

k) Die Scheinwerferstrahlen erfassen ein am Boden liegendes Objekt $K(x_k \mid y_k \mid 0)$.
In welchem Punkt der Flugbahn geschieht dies?

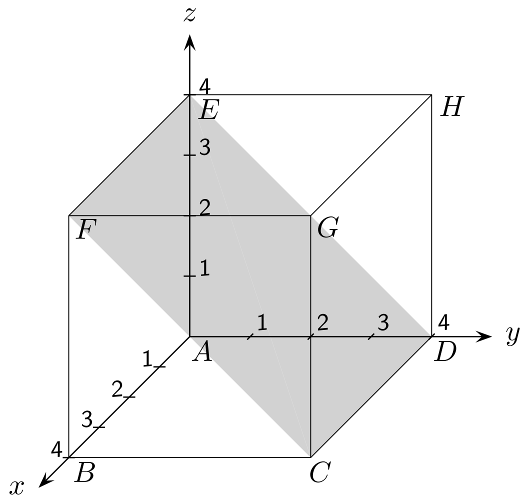
Vektorrechnung Aufgaben

1. Gegeben ist ein Würfel mit der Kantenlänge 4 LE gemäß der Zeichnung.

   a) Geben Sie eine Gleichung der Ebene, in der die Punkte C, D, E und F liegen, in Koordinatenform an.

   b) Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden, die durch die Mittelpunkte der Kanten $\overline{AB}$ und $\overline{FG}$ verläuft.

   c) Untersuchen Sie, ob es Punkte auf der Strecke $\overline{AH}$ gibt, die zum Mittelpunkt der Strecke $\overline{BF}$ einen Abstand von 5 LE haben.

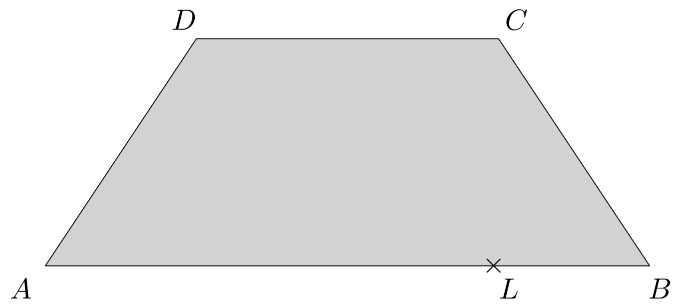


2. Gegeben sind die Ebene

$$E: \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 12 = 0 \qquad \text{und die Gerade } g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

   Gib es ein b, so dass die Gerade g parallel zu E verläuft?
   Und wenn ja, gibt es ein a, so dass die Gerade in der Ebene verläuft?

3. Gegeben sind die Punkte $A(2\,|\,1\,|\,2)$ und $B(0\,|\,{-3}\,|\,0)$.
   Bestimmen Sie auf der x-Achse einen Punkt C, so dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist (rechter Winkel bei C). Gibt es für C mehrere Möglichkeiten?



4. $A(3\,|\,3\,|\,-2)$, $B(7\,|\,11\,|\,6)$, $C(10\,|\,5\,|\,6)$ sind Eckpunkte eines symmetrischen Trapezes.

   a) Von C soll das Lot auf die Strecke $\overline{AB}$ gefällt werden.
   Ermitteln Sie den Lotfußpunkt. Zur Kontrolle: $L(6\,|\,9\,|\,4)$

   b) Ermitteln Sie die Koordinaten des Punkts D.
   Erläutern Sie auch eine alternative Lösungsidee.

5. Gegeben ist die Ebene E: $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 9 = 0$

   Bestimmen Sie die Gleichung einer Ebene, die durch den Punkt $P(1\,|\,-2\,|\,3)$ verläuft und senkrecht zu E steht. Gibt es mehrere Ebenen, die diese beiden Bedingungen erfüllen? Wenn ja, beschreiben Sie möglichst mit Vektoren die Menge aller Punkte, die diese Ebenen gemeinsam haben.

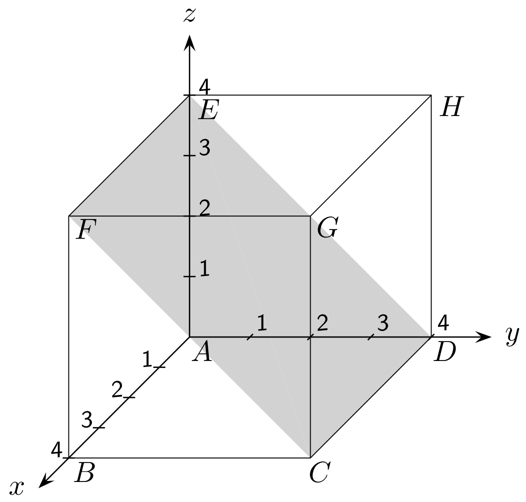
Vektorrechnung Aufgaben

1. Gegeben ist ein Würfel mit der Kantenlänge 4 LE gemäß der Zeichnung.

   a) Geben Sie eine Gleichung der Ebene, in der die Punkte C, D, E und F liegen, in Koordinatenform an. $y + z = 4$

   b) Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden, die durch die Mittelpunkte der Kanten $\overline{AB}$ und $\overline{FG}$ verläuft. $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

   c) Untersuchen Sie, ob es Punkte auf der Strecke $\overline{AH}$ gibt, die zum Mittelpunkt der Strecke $\overline{BF}$ einen Abstand von 5 LE haben. $P(0 \mid 2{,}87 \mid 2{,}87)$



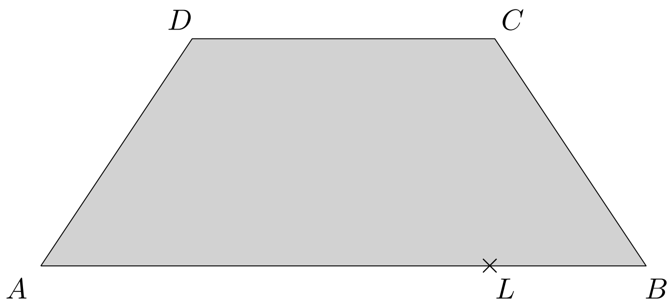
2. Gegeben sind die Ebene

$$E: \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 12 = 0 \qquad \text{und die Gerade } g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

   Gib es ein b, so dass die Gerade g parallel zu E verläuft? $b = -4$
   Und wenn ja, gibt es ein a, so dass die Gerade in der Ebene verläuft? $a = 16$

3. Gegeben sind die Punkte $A(2 \mid 1 \mid 2)$ und $B(0 \mid -3 \mid 0)$.
   Bestimmen Sie auf der x-Achse einen Punkt C, so dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist (rechter Winkel bei C). Gibt es für C mehrere Möglichkeiten? $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$

   $C_1(-1 \mid 0 \mid 0)$, $C_2(3 \mid 0 \mid 0)$



4. $A(3\,|\,3\,|\,-2)$, $B(7\,|\,11\,|\,6)$, $C(10\,|\,5\,|\,6)$ sind Eckpunkte eines symmetrischen Trapezes.

   a) Von C soll das Lot auf die Strecke $\overline{AB}$ gefällt werden.
   Ermitteln Sie den Lotfußpunkt. Zur Kontrolle: $L(6\,|\,9\,|\,4)$

   b) Ermitteln Sie die Koordinaten des Punkts D. $D(8\,|\,1\,|\,2)$
   Erläutern Sie auch eine alternative Lösungsidee.

   C an einer Symmetrieebene spiegeln oder
   $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BA} - 2\,\overrightarrow{BL}$ oder
   $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{LB} + \overrightarrow{LC}$

5. Gegeben ist die Ebene E: $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 9 = 0$

   Bestimmen Sie die Gleichung einer Ebene, die durch den Punkt $P(1\,|\,-2\,|\,3)$ verläuft und senkrecht zu E steht. Gibt es mehrere Ebenen, die diese beiden Bedingungen erfüllen? Wenn ja, beschreiben Sie möglichst mit Vektoren die Menge aller Punkte, die diese Ebenen gemeinsam haben.

   $$\vec{n} \cdot (\vec{x} - \overrightarrow{OP}) = 0 \quad \text{mit} \quad \vec{n} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

   $$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Ohne GTR

1. Welcher Punkt auf der Geraden h ist von A und B gleichweit entfernt?
   Wie groß ist diese Entfernung?

   a) $h\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad A(5\,|\,1\,|\,-5), \quad B(5\,|\,-3\,|\,3)$

   b) $h\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A(1\,|\,1\,|\,4), \quad B(1\,|\,-3\,|\,0)$

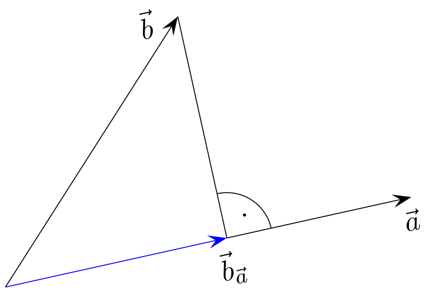
2. Bestimmen Sie möglichst ohne GTR die Punkte auf der Geraden $h\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$,
   die vom Punkt $A(1\,|\,4\,|\,2)$ den Abstand $d = 3$ haben.

   Formulieren Sie (mit Skizze, <u>keine</u> Rechnung) für diese Fragestellung einen zweiten Lösungsweg.

3. Untersuchen Sie, ob es ein k gibt, so dass die Punkte $A(k\,|\,2\,|\,1)$, $B(2\,|\,1\,|\,k)$, $C(-6\,|\,3\,|\,4)$ auf einer Geraden liegen.

4. Welche Punkte auf der Geraden durch $A(0\,|\,0\,|\,0)$ und $B(1\,|\,1\,|\,1)$ sind von A dreimal (k-mal) so weit entfernt wie von B?

5. Für welches λ sind die Punkte $A(1\,|\,1\,|\,2)$, $B(5\,|\,5\,|\,4)$ und $C(2\lambda\,|\,\lambda\,|\,\lambda)$ Eckpunkte eines rechtwinkligen Dreiecks mit dem rechten Winkel in C? Zeigen Sie, dass alle Punkte auf einer Kugel mit dem Radius 3 liegen, jedoch nicht auf einem Kreis.



6. Beweise: Für die senkrechte Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ gilt: $\vec{b}_{\vec{a}} = (\vec{b}\cdot\vec{a}^\circ)\cdot\vec{a}^\circ$

Ohne GTR

1. Welcher Punkt auf der Geraden h ist von A und B gleichweit entfernt?
   Wie groß ist diese Entfernung?

   a) $h\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $A(5\,|\,1\,|\,-5)$, $B(5\,|\,-3\,|\,3)$ — $P(2\,|\,3\,|\,1)$, $d = 7$

   b) $h\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A(1\,|\,1\,|\,4)$, $B(1\,|\,-3\,|\,0)$ — $P(4\,|\,1\,|\,0)$, $d = 5$

2. Bestimmen Sie möglichst ohne GTR die Punkte auf der Geraden $h\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$,
   die vom Punkt $A(1\,|\,4\,|\,2)$ den Abstand $d = 3$ haben.

   $t_1 = -3,\ t_2 = -2,\quad P_1(0\,|\,6\,|\,4),\ P_2(3\,|\,5\,|\,0)$

   Formulieren Sie (mit Skizze, <u>keine</u> Rechnung) für diese Fragestellung einen zweiten Lösungsweg.

   Stichworte: Abstand $d(A,h)$, Fußpunkt F, Kathetenlänge, Richtungseinheitsvektor, usw.

   $F\left(\frac{3}{2}\,\middle|\,\frac{11}{2}\,\middle|\,2\right),\ t = -\frac{5}{2}$

3. Untersuchen Sie, ob es ein k gibt, so dass die Punkte $A(k\,|\,2\,|\,1)$, $B(2\,|\,1\,|\,k)$, $C(-6\,|\,3\,|\,4)$
   auf einer Geraden liegen.

   $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + t\,\overrightarrow{AB} \implies t = -1,\ k = -2$

4. Welche Punkte auf der Geraden durch $A(0\,|\,0\,|\,0)$ und $B(1\,|\,1\,|\,1)$ sind von A dreimal (k-mal)
   so weit entfernt wie von B?

   $$3 \cdot |\,\lambda\,\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OB}\,| = |\lambda\,\overrightarrow{OB}|$$

   $$3 \cdot |\,(\lambda - 1)\,\overrightarrow{OB}\,| = |\lambda\,\overrightarrow{OB}|,\quad 9 \cdot (\lambda - 1)^2 = \lambda^2$$

   $$3 \cdot (\lambda - 1) = \pm\lambda,\quad \lambda_1 = \frac{3}{2},\ \lambda_2 = \frac{3}{4}$$

   $$\overrightarrow{OT_1} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OT_2} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$$

   Die λ-Werte gelten allgemein für zwei verschiedene Punkte, $|\overrightarrow{OB}|$ fällt raus.

   $$k \cdot (\lambda - 1) = \pm\lambda$$

   $$\lambda_1 = \frac{k}{k-1},\ \lambda_2 = \frac{k}{k+1}$$

5. Für welches λ sind die Punkte $A(1\,|\,1\,|\,2)$, $B(5\,|\,5\,|\,4)$ und $C(2\lambda\,|\,\lambda\,|\,\lambda)$ Eckpunkte eines rechtwinkligen Dreiecks mit dem rechten Winkel in C? Zeigen Sie, dass alle Punkte auf einer Kugel mit dem Radius $r = 3$ liegen, jedoch nicht auf einem Kreis.

   $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3$

   $M(3\,|\,3\,|\,3)$

   $C_2 \notin E_{ABC_1}:\ 2x - 3y + 2z = 3$

6. Beweise: Für die senkrechte Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ gilt: $\vec{b}_{\vec{a}} = (\vec{b} \cdot \vec{a}^\circ) \cdot \vec{a}^\circ$ — $\vec{b}_{\vec{a}} = \lambda\vec{a}^\circ$

   $(\vec{b} - \lambda\vec{a}^\circ) \perp \vec{a}^\circ,\quad (\vec{b} - \lambda\vec{a}^\circ) \cdot \vec{a}^\circ = 0 \implies \lambda = \vec{b} \cdot \vec{a}^\circ$

Ohne GTR

7. Wie muss a gewählt werden, damit die Punkte $A(-3\,|\,2\,|\,-2)$ und $B(5\,|\,-3\,|\,a)$ den Abstand $d = 3\sqrt{10}$ haben?

8. Welcher Punkt auf der z-Achse hat von $A(1\,|\,-4\,|\,5)$ und $B(6\,|\,6\,|\,0)$ die gleiche Entfernung? Wie groß ist diese Entfernung?

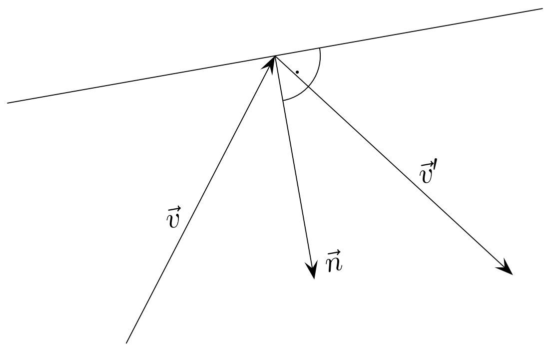
9. Die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ soll zur Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

senkrecht verlaufen.
Bestimmen Sie a und b.

10. Welcher Punkt auf der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ hat von $A(4\,|\,2\,|\,2)$ die kürzeste Entfernung?

11. Gegeben sind die Punkte $A(2\,|\,3\,|\,12)$, $B(10\,|\,-1\,|\,4)$ und $C(8\,|\,3\,|\,0)$.
Weisen Sie nach, dass die drei Punkte durch einen weiteren Punkt D zu einem Rechteck $ABCD$ ergänzt werden können.
Bestimme die Koordinaten des Punktes D.

12. Ein Sonnenstrahl mit der Richtung $\vec{v}$ wird an einer Ebene (Normalenvektor $\vec{n}$) reflektiert.
Ermittle die Richtung $\vec{v}'$ des reflektierten Strahls.



13. Ein Lichtstrahl geht von der Lichtquelle $P(-1\,|\,-3\,|\,7)$ aus, wird in $R(3\,|\,-5\,|\,3)$ an der Ebene E reflektiert und läuft anschliessend durch den Punkt $Q(-5\,|\,3\,|\,-1)$.
Wie heisst die Koordinatengleichung von E?

Ohne GTR

7. Wie muss a gewählt werden, damit die Punkte $A(-3\,|\,2\,|\,-2)$ und $B(5\,|\,-3\,|\,a)$ den Abstand $d = 3\sqrt{10}$ haben?

$$\sqrt{8^2 + (-5)^2 + (a+2)^2} = 3\sqrt{10}$$
$$(a+2)^2 = 1$$
$$a_1 = -1,\ a_2 = -3$$

8. Welcher Punkt auf der z-Achse hat von $A(1\,|\,-4\,|\,5)$ und $B(6\,|\,6\,|\,0)$ die gleiche Entfernung? Wie groß ist diese Entfernung?

$$P(0\,|\,0\,|\,z)$$
$$|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{BP}|$$
$$\sqrt{(-1)^2 + 4^2 + (z-5)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2 + z^2}$$
$$z^2 - 10z + 42 = z^2 + 72$$
$$z = -3$$
$$P(0\,|\,0\,|\,-3)$$
$$|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + (-8)^2} = 9\ LE$$

9. Die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ soll zur Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

senkrecht verlaufen.
Bestimmen Sie a und b.

Der Richtungsvektor von g muss auf beiden Richtungsvektoren von E senkrecht stehen.

$$a = 1,\ b = -2$$

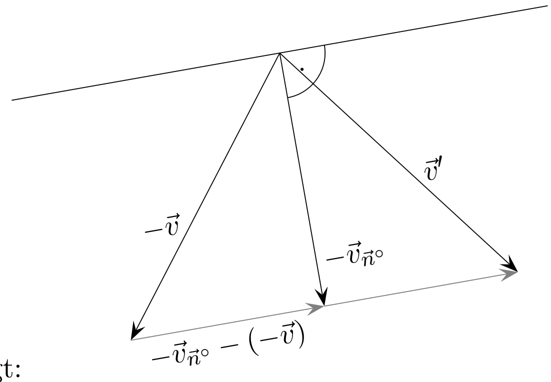
10. Welcher Punkt auf der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ hat von $A(4\,|\,2\,|\,2)$ die kürzeste Entfernung?

$$\vec{a} + \lambda\vec{u} - \overrightarrow{OA} \perp \vec{u}$$
$$\lambda = \tfrac{1}{2},\ P(6\,|\,3\,|\,0)$$

11. Gegeben sind die Punkte $A(2\,|\,3\,|\,12)$, $B(10\,|\,-1\,|\,4)$ und $C(8\,|\,3\,|\,0)$.
Weisen Sie nach, dass die drei Punkte durch einen weiteren Punkt D zu einem Rechteck $ABCD$ ergänzt werden können.
Bestimme die Koordinaten des Punktes D.

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}$$
$$D(0\,|\,7\,|\,8)$$

12. Ein Sonnenstrahl mit der Richtung $\vec{v}$ wird an einer Ebene (Normalenvektor $\vec{n}$) reflektiert. Ermittle die Richtung $\vec{v}'$ des reflektierten Strahls.



$\vec{v}' = -\vec{v}_{\vec{n}^\circ} + (-\vec{v}_{\vec{n}^\circ} - (-\vec{v}))$

Mit $-\vec{v}_{\vec{n}^\circ} = (-\vec{v} \cdot \vec{n}^\circ) \cdot \vec{n}^\circ$ (siehe 6. Aufg.) folgt:

$\vec{v}' = \vec{v} - 2(\vec{v} \cdot \vec{n}^\circ) \cdot \vec{n}^\circ$

13. Ein Lichtstrahl geht von der Lichtquelle $P(-1 \mid -3 \mid 7)$ aus, wird in $R(3 \mid -5 \mid 3)$ an der Ebene E reflektiert und läuft anschliessend durch den Punkt $Q(-5 \mid 3 \mid -1)$. Wie heisst die Koordinatengleichung von E?

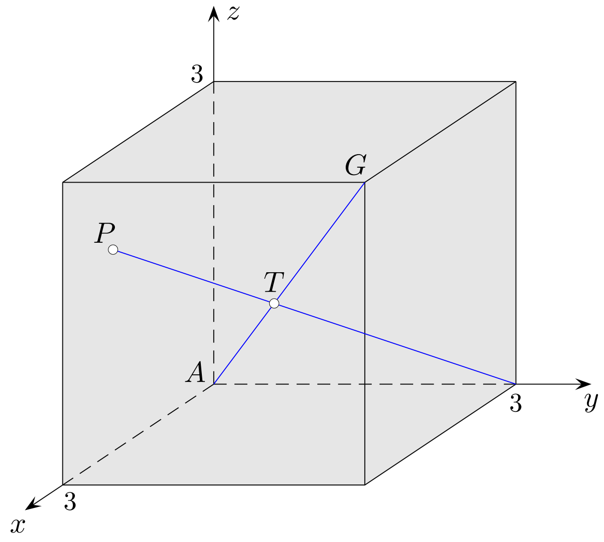
Normalenvektoren von E halbieren den Winkel von $\overrightarrow{RP} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{RQ} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$

$|\overrightarrow{RP}| = 6, \ |\overrightarrow{RQ}| = 12$

$\vec{n} = 2\,\overrightarrow{RP} + \overrightarrow{RQ}$ (z.B., die Summanden müssen gleichlang sein)

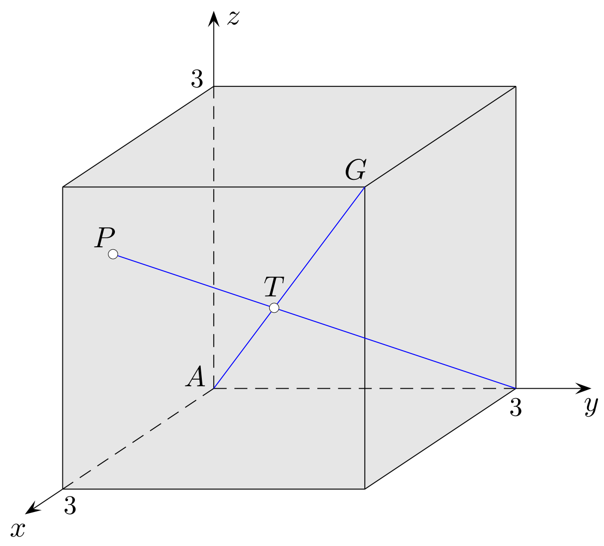
E: $4x - 3y - z = 24$

Würfel-Aufgabe   ohne GTR



Der Punkt T teilt die Würfeldiagonale AG im Verhältnis 2:3.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P, der auf einer Seitenfläche liegt.

Würfel-Aufgabe   ohne GTR



Der Punkt T teilt die Würfeldiagonale AG im Verhältnis 2:3.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P, der auf einer Seitenfläche liegt.

$T(\frac{6}{5} \mid \frac{6}{5} \mid \frac{6}{5})$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ y \end{pmatrix}$$

Der Richtungsvektor wurde vereinfacht.

$P(2 \mid 0 \mid 2)$

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(0\,|\,60\,|\,0)$, $B(-80\,|\,60\,|\,60)$ und $C(-80\,|\,0\,|\,60)$ gegeben.

a) Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E, die durch die Punkte A, B und C bestimmt wird, in Koordinatenform. Welche besondere Lage hat E im Koordinatensystem?
Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem E die xy-Ebene schneidet.

b) Untersuchen Sie, ob der Koordinatenursprung O mit den Punkten A, B und C ein Rechteck $OABC$ festlegt.

Das Viereck $OABC$ ist das Modell eines steilen Hanggrundstücks. Die positive x-Achse beschreibt die südliche, die positive y-Achse die östliche Himmelsrichtung (im Koordinatensystem: 1 *LE* entspricht 1 m).

c) Im Punkt $M(-40\,|\,30\,|\,30)$ des Grundstücks wird ein Mast errichtet, der durch Seile gehalten wird. Zwei Verankerungspunkte der Seile im Grundstücksboden sind jeweils 15 m vom Mastfußpunkt entfernt und liegen von diesem aus genau in östlicher und nördlicher Richtung.
Bestimmen Sie deren Koordinaten.

Ein Hubschrauber überfliegt das Grundstück entlang einer Linie, die im Modell durch

die Gerade g: $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -20 \\ 40 \\ 40 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ beschrieben wird.

d) Untersuchen Sie, ob der Hubschrauber mit einem konstanten Abstand zum Hang fliegt.

e) Der Helikopter ist mit einem Suchscheinwerfer ausgestattet, der stets in Richtung des Vektors $\overrightarrow{r}$ ausgerichtet wird (denken Sie sich den Vektor $\overrightarrow{r}$ als gegeben).
Die Suche nach einem Objekt A auf der Ebene misslingt.
Beschreiben Sie, wie ermittelt werden kann, wie nahe der Scheinwerferlichtpunkt auf der Ebene dem Objekt kam.

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(0\,|\,60\,|\,0)$, $B(-80\,|\,60\,|\,60)$ und $C(-80\,|\,0\,|\,60)$ gegeben.

a) Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E, die durch die Punkte A, B und C bestimmt wird, in Koordinatenform. Welche besondere Lage hat E im Koordinatensystem? $3x + 4z = 0$
Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem E die xy-Ebene schneidet. 36,9°

b) Untersuchen Sie, ob der Koordinatenursprung O mit den Punkten A, B und C ein Rechteck $OABC$ festlegt. Dies ist der Fall.

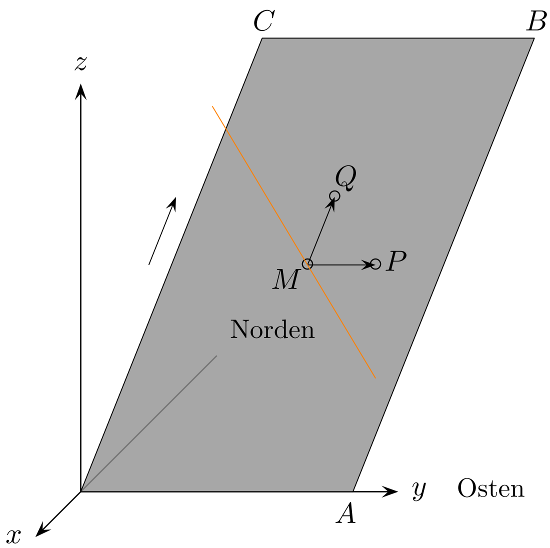
Das Viereck $OABC$ ist das Modell eines steilen Hanggrundstücks. Die positive x-Achse beschreibt die südliche, die positive y-Achse die östliche Himmelsrichtung (im Koordinatensystem: 1 *LE* entspricht 1 m).

c) Im Punkt $M(-40\,|\,30\,|\,30)$ des Grundstücks wird ein Mast errichtet, der durch Seile gehalten wird. Zwei Verankerungspunkte der Seile im Grundstücksboden sind jeweils 15 m vom Mastfußpunkt entfernt und liegen von diesem aus genau in östlicher und nördlicher Richtung.
Bestimmen Sie deren Koordinaten.

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -40 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix} + 15 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 \\ 45 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} -40 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix} + \frac{15}{100} \cdot \begin{pmatrix} -80 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -52 \\ 30 \\ 39 \end{pmatrix}$$

...



Ein Hubschrauber überfliegt das Grundstück entlang einer Linie, die im Modell durch

die Gerade g: $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -20 \\ 40 \\ 40 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ beschrieben wird.

d) Untersuchen Sie, ob der Hubschrauber mit einem konstanten Abstand zum Hang fliegt.
Dies ist der Fall.

e) Der Helikopter ist mit einem Suchscheinwerfer ausgestattet, der stets in Richtung des Vektors $\overrightarrow{r}$ ausgerichtet wird (denken Sie sich den Vektor $\overrightarrow{r}$ als gegeben).
Die Suche nach einem Objekt A auf der Ebene misslingt.
Beschreiben Sie, wie ermittelt werden kann, wie nahe der Scheinwerferlichtpunkt auf der Ebene dem Objekt kam.
Ebene, in der die Scheinwerferstrahlen liegen, mit der Ebene E schneiden, Schnittgerade sei h.
Abstand A zu h ermitteln.

Eine rechteckige Dachfläche ist durch die Punkte $A(0\,|\,0\,|\,20)$, $B(30\,|\,0\,|\,20)$ und $C(30\,|\,10\,|\,15)$ festgelegt.

a) Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E, die durch die Punkte A, B und C bestimmt wird, in Koordinatenform. Welche besondere Lage hat E im Koordinatensystem?
Wie lautet der 4. Eckpunkt der Dachfläche?

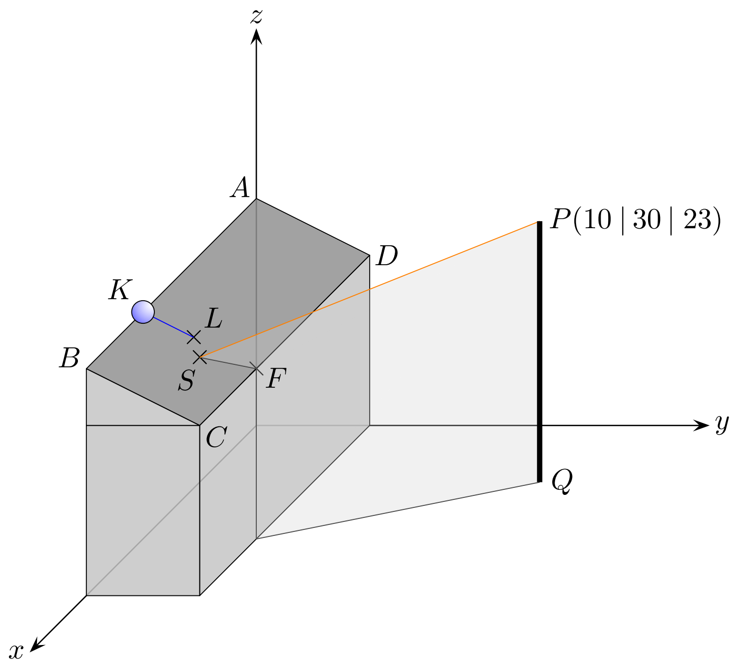
b) Eine Kugel wird im Punkt $K(20\,|\,0\,|\,20)$ von einem Dachdecker unvorsichtigerweise losgelassen. Wo befindet sie sich, nachdem sie $5\,m$ gerollt ist ($1\ LE$ entspricht $1\,m$)?

c) Im Punkt $Q(10\,|\,30\,|\,0)$ soll eine $23\,m$ hohe senkrecht stehende Antenne errichtet werden. Untersuchen Sie, ob der Schatten der Antennenspitze das Dach trifft, wenn die Richtung der Sonnenstrahlen durch $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ beschrieben wird.

d) Beschreiben Sie, wie die Länge des Schattens auf dem Dach ermittelt werden könnte.

Eine rechteckige Dachfläche ist durch die Punkte $A(0\,|\,0\,|\,20)$, $B(30\,|\,0\,|\,20)$ und $C(30\,|\,10\,|\,15)$ festgelegt.

a) Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E, die durch die Punkte A, B und C bestimmt wird, in Koordinatenform. Welche besondere Lage hat E im Koordinatensystem? $y + 2z = 40$
Wie lautet der 4. Eckpunkt der Dachfläche? $E \perp yz$-Ebene, $D(0\,|\,10\,|\,15)$



b) Eine Kugel wird im Punkt $K(20\,|\,0\,|\,20)$ von einem Dachdecker unvorsichtigerweise losgelassen. Wo befindet sie sich, nachdem sie $5\,m$ gerollt ist ($1\,LE$ entspricht $1\,m$)?
$\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OK} + 5 \cdot \overrightarrow{AD}^{\circ}$, $L(20\,|\,4{,}472\,|\,17{,}764)$

c) Im Punkt $Q(10\,|\,30\,|\,0)$ soll eine $23\,m$ hohe senkrecht stehende Antenne errichtet werden. Untersuchen Sie, ob der Schatten der Antennenspitze das Dach trifft, wenn die Richtung der Sonnenstrahlen durch $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ beschrieben wird. $S(22\,|\,6\,|\,17)$, x- und y-Koord. beachten

d) Beschreiben Sie, wie die Länge des Schattens auf dem Dach ermittelt werden könnte.
Zwischenschritt: $F(20\,|\,10\,|\,15)$ (Koordinaten nicht verlangt) als Schnitt der Geraden g_{CD} mit der Ebene E_{PQS} berechnen.

Flugbahnen Berufliches Gymnasium Baden-Württemberg 2006

Zwei Flugzeuge F_1 und F_2 fliegen mit jeweils konstanter Geschwindigkeit auf geradlinigen Flugbahnen. Die Position der Flugzeuge wird bezüglich eines Koordinatensystems mit der Längeneinheit $1\,km$ angegeben. Die x_3-Koordinate gibt die Flughöhe an. Zum Zeitpunkt $t = 0$ (in Minuten) ist das Flugzeug F_1 im Punkt $P_1(0 \mid 0 \mid 0)$ und das Flugzeug F_2 im Punkt $P(-15 \mid -30 \mid 8)$. Nach 4 Minuten hat F_1 die Position $Q_1(16 \mid 16 \mid 4)$ erreicht. F_2 befindet sich nach 5 Minuten an der Position $Q_2(30 \mid 30 \mid 8)$.

a) Welches Flugzeug ist schneller?
Geben Sie für jedes Flugzeug eine Gleichung an, welche die Position in Abhängigkeit von der Zeit in Minuten beschreibt. Nach welcher Zeit hat F_1 dieselbe Flughöhe wie F_2 erreicht?

b) Untersuchen Sie, ob sich die Flugbahnen schneiden.

c) Bestimmen Sie den Abstand der beiden Flugzeuge in Abhängigkeit von der Zeit.
Zu welchem Zeitpunkt sind sich die beiden Flugzeuge am nächsten?
Wie weit sind sie zu diesem Zeitpunkt voneinander entfernt?

Flugbahnen Berufliches Gymnasium Baden-Württemberg 2006

Zwei Flugzeuge F_1 und F_2 fliegen mit jeweils konstanter Geschwindigkeit auf geradlinigen Flugbahnen. Die Position der Flugzeuge wird bezüglich eines Koordinatensystems mit der Längeneinheit $1\,km$ angegeben. Die x_3-Koordinate gibt die Flughöhe an. Zum Zeitpunkt $t = 0$ (in Minuten) ist das Flugzeug F_1 im Punkt $P_1(0\,|\,0\,|\,0)$ und das Flugzeug F_2 im Punkt $P(-15\,|\,-30\,|\,8)$. Nach 4 Minuten hat F_1 die Position $Q_1(16\,|\,16\,|\,4)$ erreicht. F_2 befindet sich nach 5 Minuten an der Position $Q_2(30\,|\,30\,|\,8)$.

a) Welches Flugzeug ist schneller?

$$F_1\colon\quad |\overrightarrow{P_1Q_1}| = \sqrt{528},\quad v_1 = \frac{\sqrt{528}}{4}\,\frac{km}{min} = 5{,}74\,\frac{km}{min}$$

$$F_2\colon\quad |\overrightarrow{P_2Q_2}| = \sqrt{5625} = 75\,,\quad v_2 = \frac{75}{5}\,\frac{km}{min} = 15\,\frac{km}{min}$$

Geben Sie für jedes Flugzeug eine Gleichung an, welche die Position in Abhängigkeit von der Zeit in Minuten beschreibt.

$$F_1\colon\quad \vec{x} = t\cdot\tfrac{1}{4}\overrightarrow{P_1Q_1},\qquad \vec{x} = t\begin{pmatrix}4\\4\\1\end{pmatrix}$$

$$F_2\colon\quad \vec{x} = \overrightarrow{OP_2} + t\cdot\tfrac{1}{5}\overrightarrow{P_2Q_2}\,,\qquad \vec{x} = \begin{pmatrix}-15\\-30\\8\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}9\\12\\0\end{pmatrix}$$

Nach welcher Zeit hat F_1 dieselbe Flughöhe wie F_2 erreicht? $x_3 = 8,\ t = 8$

b) Untersuchen Sie, ob sich die Flugbahnen schneiden. Die Flugbahnen sind windschief.

c) Bestimmen Sie den Abstand der beiden Flugzeuge in Abhängigkeit von der Zeit.

Nach t Minuten befindet sich F_1 im Punkt $P(4t\,|\,4t\,|\,t)$,
F_2 im Punkt $Q(9t-15\,|\,12t-30\,|\,8)$.

Zu welchem Zeitpunkt sind sich die beiden Flugzeuge am nächsten?

$$d(t) = \sqrt{(5t-15)^2 + (8t-30)^2 + (8-t)^2}$$

$t = 3{,}59$ (3 Minuten und 35,4 Sekunden)

Wie weit sind sie zu diesem Zeitpunkt voneinander entfernt? minimaler Abstand $5{,}46\,km$

Flugbahnen

Zwei Flugzeuge F_1 und F_2 passieren zum gleichen Zeitpunkt ($t = 0$) den Ort $P_1(-4\,|\,4\,|\,0)$ bzw. $P_2(7\,|\,12\,|\,7)$. Sie bewegen sich jeweils mit konstanten Geschwindigkeiten (in $\frac{km}{s}$)

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_2 = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie den Ort eines Flugzeuges zu einem beliebigen Zeitpunkt t an.

Zeigen Sie, dass sich die Flugzeuge F_1 und F_2 in einer Ebene bewegen.

Geben Sie für diese Ebene eine Gleichung in Normalenform an.

b) Aus Sicherheitsgründen müssen die Flugzeuge am gleichen Ort einen zeitlichen Abstand von mindestens 1 Minute haben.

Die Flugbahnen von F_1 und F_2 haben einen Punkt gemeinsam.
Ist dort dieser zeitliche Sicherheitsabstand gewährleistet?

Welche räumliche Entfernung besitzen die beiden Flugzeuge F_1 und F_2, wenn sich F_1 im Punkt $P_3(6\,|\,14\,|\,5)$ befindet?

c) Wie könnten der Steigungswinkel und die Steigung einer Flugbahn definiert werden? Berechnen Sie mit dieser Definition den Steigungswinkel von F_1.

Flugbahnen

Zwei Flugzeuge F_1 und F_2 passieren zum gleichen Zeitpunkt ($t = 0$) den Ort $P_1(-4 \,|\, 4 \,|\, 0)$ bzw. $P_2(7 \,|\, 12 \,|\, 7)$. Sie bewegen sich jeweils mit konstanten Geschwindigkeiten (in $\frac{km}{s}$)

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_2 = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie den Ort eines Flugzeuges zu einem beliebigen Zeitpunkt t an.

$$F_1\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OP_1} + t\vec{v}_1, \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t}{12}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F_2\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OP_2} + t\vec{v}_2, \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix} + \frac{t}{15}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass sich die Flugzeuge F_1 und F_2 in einer Ebene bewegen. $S(6 \,|\, 14 \,|\, 5)$

Geben Sie für diese Ebene eine Gleichung in Normalenform an. $2x - y - 2z = -12$

b) Aus Sicherheitsgründen müssen die Flugzeuge am gleichen Ort einen zeitlichen Abstand von mindestens 1 Minute haben.

Die Flugbahnen von F_1 und F_2 haben einen Punkt gemeinsam.
Ist dort dieser zeitliche Sicherheitsabstand gewährleistet? $t_1 = 60,\ t_2 = -15$

Welche räumliche Entfernung besitzen die beiden Flugzeuge F_1 und F_2, wenn sich F_1 im Punkt $P_3(6 \,|\, 14 \,|\, 5)$ befindet?

F_2 befindet sich zum Zeitpunkt $t_1 = 60$ im Punkt P mit

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix} + \frac{60}{15}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{PP_3}| = 15\ [km]$$

c) Wie könnten der Steigungswinkel und die Steigung einer Flugbahn definiert werden?

Winkel α, den $\vec{v}_1$ mit der xy-Ebene einschließt, Steigung $\tan(\alpha)$

Berechnen Sie mit dieser Definition den Steigungswinkel von F_1. $\alpha = 19{,}47°$

Flugbahnen

In einem Koordinatensystem beschreibt die xy-Ebene eine ebene Landschaft, in der ein Flughafen liegt. Im Folgenden werden die Flugbewegungen vereinfacht dargestellt. Unmittelbar nach dem Abheben des Flugzeugs F_1 im Punkt $P(-10\,|\,-14\,|\,0)$ von der Startbahn geht das Flugzeug in eine geradlinige Flugbahn g über:

$$g\colon\quad \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -10 \\ -14 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } 0 \leq s \leq 20.$$

Ein zweites Flugzeug F_2 bewegt sich längs der Geraden h mit

$$h\colon\quad \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Längeneinheit beträgt $1\,km$, s und t geben jeweils die Anzahl der Minuten an, die seit dem Start von F_1 vergangen sind.

a) Geben Sie an, in welchen Punkten sich die Flugzeuge F_1 und F_2 drei Minuten nach dem Start von F_1 befinden. Berechnen Sie, welchen Abstand die Flugzeuge zu diesem Zeitpunkt haben.

b) Das Flugzeug F_1 überfliegt den Gipfel $Q(2\,|\,2\,|\,1)$ eines nahe gelegenen Berges. Berechnen Sie, nach wie vielen Minuten die Bergspitze überflogen wird, und ermitteln Sie für diesen Zeitpunkt den Abstand zwischen der Bergspitze und dem Flugzeug.

c) Die kreisförmige horizontale Unterseite einer Gewitterwolke hat den Durchmesser $d = 4\,km$ und den Mittelpunkt $M(6\,|\,9\,|\,3)$. Untersuchen Sie, ob die Unterseite der Gewitterwolke von F_1 durchflogen wird.
Ermitteln Sie auch den Abstand von M zur Flugbahn von F_1. Interpretieren Sie das Ergebnis.

d) Weisen Sie nach, dass sich die Flugbahnen von F_1 und F_2 nicht schneiden.

e) Sollte F_2 genau $1\,km$ tiefer fliegen, schneiden sich die Flugbahnen von F_1 und F_2 im Punkt $S(8\,|\,10\,|\,3)$. Untersuchen Sie, ob es dann zu einer Kollision der beiden Flugzeuge kommt.

Variation

c) Die horizontale Unterseite einer Gewitterwolke hat die Form eines Dreiecks mit den Eckpunkten $A(6\,|\,9\,|\,3)$, $B(10\,|\,10\,|\,3)$ und $C(6\,|\,12\,|\,3)$. Untersuchen Sie, ob die Unterseite der Gewitterwolke von F_1 durchflogen wird.

Flugbahnen Ergebnisse

In einem Koordinatensystem beschreibt die xy-Ebene eine ebene Landschaft, in der ein Flughafen liegt. Im Folgenden werden die Flugbewegungen vereinfacht dargestellt. Unmittelbar nach dem Abheben des Flugzeugs F_1 im Punkt $P(-10\,|\,-14\,|\,0)$ von der Startbahn geht das Flugzeug in eine geradlinige Flugbahn g über:

$$g\colon\ \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -10 \\ -14 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \quad \text{mit } 0 \leq s \leq 20.$$

Ein zweites Flugzeug F_2 bewegt sich längs der Geraden h mit

$$h\colon\ \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Längeneinheit beträgt 1 km, s und t geben jeweils die Anzahl der Minuten an, die seit dem Start von F_1 vergangen sind.

a) Geben Sie an, in welchen Punkten sich die Flugzeuge F_1 und F_2 drei Minuten nach dem Start von F_1 befinden. F_1 in $D(-1\,|\,-2\,|\,1{,}5)$, F_2 in $E(12\,|\,7\,|\,4)$

Berechnen Sie, welchen Abstand die Flugzeuge zu diesem Zeitpunkt haben. 16,01 km

b) Das Flugzeug F_1 überfliegt den Gipfel $Q(2\,|\,2\,|\,1)$ eines nahe gelegenen Berges. Berechnen Sie, nach wie vielen Minuten die Bergspitze überflogen wird, und ermitteln Sie für diesen Zeitpunkt den Abstand zwischen der Bergspitze und dem Flugzeug. 4 *Min*, 1 km

c) Die kreisförmige horizontale Unterseite einer Gewitterwolke hat den Durchmesser $d = 4\,km$ und den Mittelpunkt $M(6\,|\,9\,|\,3)$. Untersuchen Sie, ob die Unterseite der Gewitterwolke von F_1 durchflogen wird.
Ermitteln Sie auch den Abstand von M zur Flugbahn von F_1. Interpretieren Sie das Ergebnis.
$d(M, R(8\,|\,10\,|\,3)) = 2{,}40\,km$ Gewitterwolke wird nicht durchflogen.
$d(M, g) = 1{,}02\,km$

d) Weisen Sie nach, dass sich die Flugbahnen von F_1 und F_2 nicht schneiden.

e) Sollte F_2 genau 1 km tiefer fliegen, schneiden sich die Flugbahnen von F_1 und F_2 im Punkt $S(8\,|\,10\,|\,3)$. Untersuchen Sie, ob es dann zu einer Kollision der beiden Flugzeuge kommt.
$s = 6\,Min,\ t = 2\,Min$ Es kommt nicht zur Kollision.

Variation

c) Die horizontale Unterseite einer Gewitterwolke hat die Form eines Dreiecks mit den Eckpunkten $A(6\,|\,9\,|\,3)$, $B(10\,|\,10\,|\,3)$ und $C(6\,|\,12\,|\,3)$. Untersuchen Sie, ob die Unterseite der Gewitterwolke von F_1 durchflogen wird. $R(8\,|\,10\,|\,3)$ liegt innerhalb des Dreiecks.

Ohne GTR

1. Gegeben seien die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ und die reellen Zahlen r und t.
   Kreuzen Sie in der folgenden Tabelle an, ob es sich bei dem Ausdruck um einen Vektor oder um eine Zahl handelt, oder ob der Ausdruck nicht definiert ist,
   Skalarmultiplikation $\cdot$, Skalarprodukt $\circ$.

Ausdruck	Vektor	Zahl	nicht definiert
$\vec{a} \circ (\vec{b} + r \cdot \vec{c})$			
$\lvert \vec{a} \rvert \times \vec{b}$			
$(r \cdot \vec{c}) - (\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot \vec{c}$			
$(\vec{a} \circ \vec{a}) + (r \cdot \lvert \vec{c} \rvert)^2$			
$\vec{c} \times (t \cdot \vec{a} - r \cdot \vec{b})^2$			
$\vec{b} \times (\vec{c} \circ (r \cdot \vec{a}))$			

2. Gegeben seien die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Geben Sie einen Term an, dessen Wert die Zahl Null ist und der nur aus den Symbolen $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\times$, $\cdot$ sowie Klammern besteht. Jedes der Symbole $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\times$, $\cdot$ muss dabei in dem Term mindestens einmal verwendet werden.

Ohne GTR

1. Gegeben seien die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ und die reellen Zahlen r und t.
Kreuzen Sie in der folgenden Tabelle an, ob es sich bei dem Ausdruck um einen Vektor oder um eine Zahl handelt, oder ob der Ausdruck nicht definiert ist, Skalarmultiplikation $\cdot$, Skalarprodukt $\circ$.

Ausdruck	Vektor	Zahl	nicht definiert
$\vec{a} \circ (\vec{b} + r \cdot \vec{c})$		$\times$	
$\lvert\vec{a}\rvert \times \vec{b}$			$\times$[1]
$(r \cdot \vec{c}) - (\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot \vec{c}$	$\times$		
$(\vec{a} \circ \vec{a}) + (r \cdot \lvert\vec{c}\rvert)^2$		$\times$	
$\vec{c} \times (t \cdot \vec{a} - r \cdot \vec{b})^2$			$\times$[1]
$\vec{b} \times (\vec{c} \circ (r \cdot \vec{a}))$			$\times$[1]

1 Das Vektorprodukt aus einem Vektor und einer Zahl ist nicht definiert.

2. Gegeben seien die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Geben Sie einen Term an, dessen Wert die Zahl Null ist und der nur aus den Symbolen $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\times$, $\cdot$ sowie Klammern besteht. Jedes der Symbole $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\times$, $\cdot$ muss dabei in dem Term mindestens einmal verwendet werden.

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$
Das Spatprodukt gibt das Volumen eines Spates an, der durch drei Vektoren aufgespannt wird.
Man könnte sich auch einen „Spat“ (bzw. dann eher ein Parallelogramm) vorstellen, der durch die die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird. Es ist klar, dass das Volumen dieses Parallelogramms 0 ist.