

Aufgaben, gemischt

1. Die Ebene E ist gegeben durch die Punkte $A(0 \mid -2 \mid 1)$, $B(-1 \mid 0 \mid 2)$ und $C(1 \mid 1 \mid 0)$.
Wie groß ist der Abstand von E zum Ursprung?
 2. Wie groß ist der Abstand von $Q(1 \mid 0 \mid -1)$ zur Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?
 3. In einem Betrieb sind 200 Personen beschäftigt.
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person am Tag krank ist, beträgt 5%.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind täglich
 - a) höchstens 4 Personen,
 - b) zwischen 7 und 13 (Grenzen eingeschlossen),
 - c) mindestens 16 Personen krank?
 4. Die drei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ spannen einen Spat auf,
dessen Volumen 10 VE beträgt. Wie groß ist dann a ?
 5. Wir testen die Hypothesen auf dem 5%-Niveau. Wie lautet der Ablehnungsbereich?
(Binomialverteilung, $n = 200$)
 - a) $p \geq 0,4$
 - b) $p \leq 0,6$
 - c) $p = 0,5$ (beidseitig)
 6. In der Gesamtbevölkerung leiden (höchstens) 15% aller Kinder an einer Hausstaub-Allergie,
im Folgenden kurz als allergisch bezeichnet.
 - a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 300 zufällig ausgewählten Kindern
 - i) mindestens 60
 - ii) höchstens 35an dieser Allergie leiden?
 - b) Wie groß muss die Anzahl einer Kindergruppe mindestens sein, damit mit mindestens 95%iger Wahrscheinlichkeit sich mindestens ein allergisches Kind in der Gruppe befindet?
 - c) Einige Ärzte vermuten, dass sich der Anteil 15% allergischer Kinder vergrößert hat und wollen dies durch einen Test anhand 300 Kinder belegen. Entwickeln sie einen geeigneten Test auf dem 5%-Niveau.
-

Lösungen

1. $E: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 1 = 0, \quad \text{HNF}, \quad d = \frac{1}{\sqrt{2}}$

2. Fußpunkt $F(-1 \mid 2 \mid -1), \quad d(Q, g) = \sqrt{8}$

3. a) 2,6%

b) 74,6%

c) 4,4%

4. $a = 5$

5. a) $\bar{A} = \{0, \dots, 68\}$

b) $\bar{A} = \{132, \dots, 200\}$

c) $\bar{A} = \{0, \dots, 85\} \cup \{115, \dots, 200\}$

6. a) i) 1,2% ii) 5,9%

b) $n = 19$

c) $H_0: p \leq 15\%, \quad \bar{A} = \{56, \dots, 300\}$

Binomial- oder Normalverteilung

Aufgaben, gemischt

7. Wir testen die Hypothesen auf dem 5%-Niveau. Wie lautet der Ablehnungsbereich?
(Binomialverteilung, $n = 2000$, Näherung mit Normalverteilung, ohne Stetigkeitskorrektur)
- a) $p \geq 0,20$
b) $p \leq 0,35$
8. X sei eine normalverteilte Zufallsvariable mit $\mu = 100$ und $\sigma = 10$.
Für $Z = X + X + X + X + X$ (Summanden unabhängig voneinander) ist $P(Z > 550)$ zu ermitteln.
Beachten Sie: $V(X + X) = V(X) + V(X)$.

Lösungen:

7. a) $\mu = 400$
 $\sigma = 17,89$
 $\bar{A} = \{0, \dots, 370\}$
- b) $\mu = 700$
 $\sigma = 21,33$
 $\bar{A} = \{736, \dots, 2000\}$
8. $\mu = 500$
 $\sigma = \sqrt{5} \cdot 10$
 $P(Z > 550) = 1,3\%$

9. Gegeben ist die Ebenenschar $E_t : (t - 4)x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 2t = 0, \quad t \in \mathbb{R},$

und die Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

- a) Für welchen Wert von t ist E_t parallel zu g ?
- b) Die Ebene E^* geht durch den Punkt $P(2 | 1 | 11)$ und ist parallel zu E_7 .
Ermitteln Sie eine Normalengleichung von E^* und berechnen Sie den Abstand von E_7 und E^* .
- c) Zeigen Sie: Es gibt genau eine Ebene aus der Schar E_t , die auf keiner anderen Ebene der Schar senkrecht steht. Wie lautet ihre Gleichung?

Lösungshinweise

9. a) $t = -4$

b) $E^* : \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 70 = 0$
 $d = 8$

c) $(t - 4) \cdot (k - 4) + 40 = 0$
 $t = 4$

10. Gegeben ist die Ebenenschar $E_k: 4x + 2y + kz = 4k$ mit $k > 0$.
- Berechnen Sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.
 - Jede Ebene der Schar schließt mit den Koordinatenebenen eine Pyramide ein. Für welches k beträgt das Pyramidenvolumen $V = 12 \text{ VE}$?
 - Untersuchen Sie, ob die Ebenen der Schar gemeinsame Punkte haben (Anschauung ist möglich) und falls ja, erfassen Sie diese Punkte vektoriell.
 - An welche Ebene (Normalenform) nähern sich die Ebenen E_k an, falls k gegen Unendlich strebt? Begründen Sie dies auch algebraisch (*Tipp: Ebenengleichung durch k dividieren*).

Lösungshinweise

10. a) $A(k | 0 | 0)$, $B(0 | 2k | 0)$, $C(0 | 0 | 4)$
- b) $V_{\text{Quader}} = 8k^2$, $V_{\text{Pyramide}} = \frac{4}{3}k^2$, $k = 3$
- c) $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
- d) $z = 4$

11. Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist eine Ebenenschar E_a gegeben durch $E_a: ax + (8 - a)y + 8z - 4 = 0$.

Die Gerade g hat die Gleichung $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$.

- Bestimmen Sie a so, dass g orthogonal zu E_a ist.
Zeigen Sie, dass g für keinen Wert von a parallel zu E_a verläuft.
Für welchen Wert von a ist der Winkel zwischen g und E_a 30° ?
- Welche Beziehung besteht zwischen a und a^* , wenn E_a und E_{a^*} orthogonal zueinander sind?
- Für welche Werte von a beträgt der Abstand des Ursprungs zu E_a $\frac{1}{8}\sqrt{8}$ LE?
Welche Ebene der Schar hat vom Ursprung den maximalen Abstand?

Lösungshinweise

11. a) $a = 4$

Der Richtungsvektor von g ist für kein a orthogonal zum Normalenvektor der Ebene E_a .

$$\sin \alpha = \left| \frac{\vec{n} \cdot \vec{u}}{|\vec{n}| |\vec{u}|} \right| \iff \frac{24}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2a^2 - 16a + 128}} = \frac{1}{2}$$

$$a_1 = 16, \quad a_2 = -8$$

b) $a = \frac{4a^* - 64}{a^* - 4}, \quad a^* \neq 4$

c) HNF

$$\frac{4}{\sqrt{2a^2 - 16a + 128}} = \frac{1}{8}\sqrt{8}$$

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 8$$

Maximum von $d(a) = \frac{4}{\sqrt{2a^2 - 16a + 128}}$ an der Stelle $a = 4$, also E_4