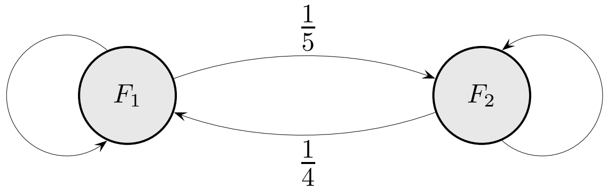
Austauschprozesse Kapitalfluss

Zwischen den Filialen F_1 und F_2 einer Bank findet pro Monat ein Kapitalfluss statt.

Die Übergangsmatrix lautet:

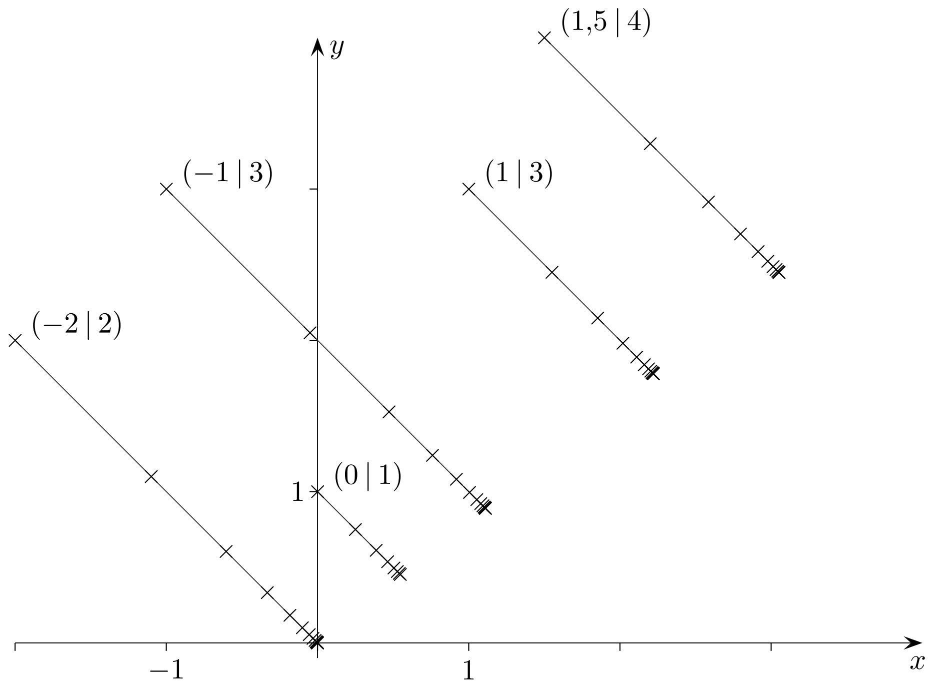
$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$



Der Startvektor sei z. B. $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ (in Millionen €).

Wie sieht die weitere Entwicklung aus? Variiere die Anfangsverteilung.

Mit $\vec{x}_{n+1} = \mathcal{A}\vec{x}_n$ und gegebenem $\vec{x}_0$ entsteht durch Iteration eine Punktfolge.



a) Warum liegen die Punktfolgen jeweils auf einer Geraden?
Wie lautet der Richtungsvektor dieser Geraden?

b) Was bedeuten in diesem Kontext negative Zahlen?

c) Die Grenzvektoren scheinen auch auf einer Geraden zu liegen. Untersuche dies. Beachte, dass für die Grenzvektoren $\vec{x}_\infty$ gilt: $\vec{x}_\infty = \mathcal{A}\vec{x}_\infty$.

d) In dem Gleichungssystem in c) ist eine Gleichung überflüssig. Warum?
Durch welche wird sie zweckmäßigerweise ersetzt?

e) Ermittle λ, so dass für $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ gilt: $\mathcal{A}\vec{x}_0 = \lambda\vec{x}_0$. Gilt diese Beziehung auch für Vektoren, die zu $\vec{x}_0$ kollinear sind?

f) Stelle $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von Vektoren aus c) und e) dar und untersuche hiermit die weitere Entwicklung.

Austauschprozesse, Methodisches

Mit $\vec{x_0}$ als Anfangszustand (Anfangsverteilung) erhalten wir nach einer Zeiteinheit $\vec{x_1} = \mathcal{A} \cdot \vec{x_0}$, nach 2 Zeiteinheiten: $\vec{x_2} = \mathcal{A} \cdot \vec{x_1} = \mathcal{A} \cdot (\mathcal{A} \cdot \vec{x_0})$, usw.

GTR: $[A] * [B] \to [B]$, ENTER-Taste (wiederholt), der Startvektor ist eine 2×1-Matrix.
Die Grenzverteilung ist hiermit erkennbar.

F_1	F_2
1,000	3,000
1,550	2,450
1,853	2,148
2,019	1,981
2,110	1,890
2,161	1,839
2,188	1,812
2,204	1,796
2,212	1,788
2,217	1,783
2,219	1,781
2,221	1,779
2,221	1,779

F_1	F_2
−1,000	3,000
−0,050	2,050
0,473	1,528
0,760	1,240
0,918	1,082
1,005	0,995
1,053	0,947
1,079	0,921
1,093	0,907
1,101	0,899
1,106	0,894
1,108	0,892
1,109	0,891

F_1	F_2
− 2,000	2,000
− 1,100	1,100
− 0,605	0,605
− 0,333	0,333
− 0,183	0,183
− 0,101	0,101
− 0,055	0,055
− 0,030	0,030
− 0,017	0,017
− 0,009	0,009
− 0,005	0,005
− 0,003	0,003
− 0,002	0,002

$\lambda = 0{,}55 = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$

Wie muss die Multiplikation $\mathcal{A} \cdot \mathcal{A} = \mathcal{A}^2$ von Matrizen beschaffen sein, damit gilt:

$\mathcal{A} \cdot (\mathcal{A} \cdot \vec{x_0}) = \mathcal{A}^2 \cdot \vec{x_0}\,?$

Die Frage beantwortet das Blatt Matrizenmultiplikation (Vektorrechnung Markow).

Für die grafische Darstellung der Punktfolgen eignen sich Excel, Derive, GeoGebra oder ein GTR: (siehe GTR Folgen)

$n\text{Min} = 0$
$\text{u}(n) = \frac{4}{5}\,\text{u}(n-1) + \frac{1}{4}\,\text{v}(n-1)$
$\text{u}(n\text{Min}) = 1$

$\text{v}(n) = \frac{1}{5}\,\text{u}(n-1) + \frac{3}{4}\,\text{v}(n-1)$
$\text{v}(n\text{Min}) = 3$

2nd FORMAT uv

Die zweite Möglichkeit, die Konvergenz zu untersuchen, besteht im Potenzieren der Matrix $\mathcal{A}$. Die Spalten von $\mathcal{A}^\infty$ sind gleich.
Sie stimmen mit dem stationären Vektor $\dfrac{1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ (Spaltensumme 1) überein.

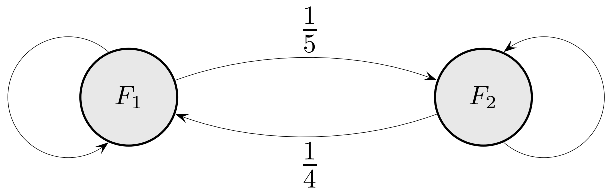
Durch Multiplikation mit S erhalten wir jede Grenzverteilung zu gegebener Spaltensumme.

Eigenvektoren

Zwischen den Filialen F_1 und F_2 einer Bank findet pro Monat ein Kapitalfluss statt.

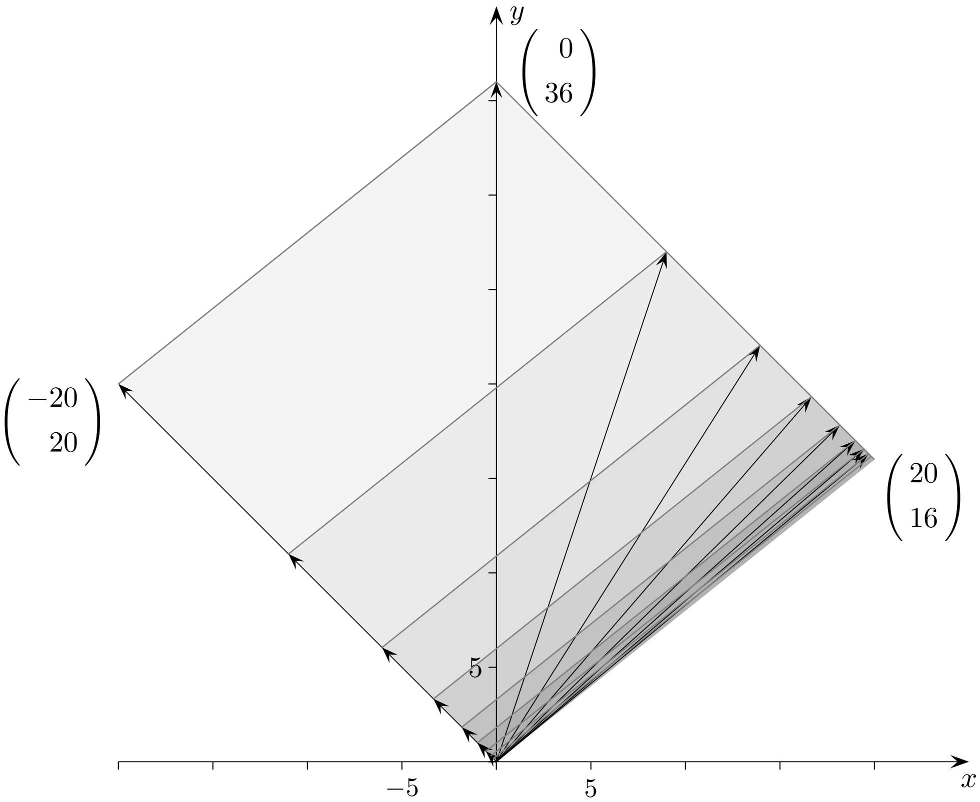
Die Übergangsmatrix lautet:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$



Der Startvektor sei $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 36 \end{pmatrix}$ (in Millionen €).

Der Austauschprozess soll mit einer weiterführenden Methode untersucht werden, die in unübersichtlichen Situationen nutzbringend angewandt werden kann. Hierzu ermitteln wir (z. B. aus der Gleichgewichtsbedingung $\mathcal{A} \cdot \vec{x} = \vec{x}$) einen Fixvektor und einen Richtungsvektor ($x + y = const$) für den Prozess. Der Startvektor kann als Linearkombination dieser Vektoren dargestellt werden.



$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 36 \end{pmatrix} = 20 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 \\ 16 \end{pmatrix}$ Ermittle λ: $\mathcal{A} \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 20 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -20 \\ 20 \end{pmatrix}$

Was folgt für: $\vec{x}_1 = \mathcal{A} \cdot \left[\begin{pmatrix} -20 \\ 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 \\ 16 \end{pmatrix} \right]$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, …?

Eigenvektoren   Ergebnisse

$$\mathcal{A}\cdot\begin{pmatrix}-20\\20\end{pmatrix} = \tfrac{11}{20}\begin{pmatrix}-20\\20\end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix}0\\36\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-20\\20\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}20\\16\end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_1 = \mathcal{A}\cdot\left[\begin{pmatrix}-20\\20\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}20\\16\end{pmatrix}\right] = \mathcal{A}\cdot\begin{pmatrix}-20\\20\end{pmatrix} + \mathcal{A}\cdot\begin{pmatrix}20\\16\end{pmatrix} = \tfrac{11}{20}\begin{pmatrix}-20\\20\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}20\\16\end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_2 = (\tfrac{11}{20})^2\begin{pmatrix}-20\\20\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}20\\16\end{pmatrix}$$

$$\dots$$

$$\vec{x}_n = (\tfrac{11}{20})^n\begin{pmatrix}-20\\20\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}20\\16\end{pmatrix}$$

Die Vektoren $\begin{pmatrix}-20\\20\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}20\\16\end{pmatrix}$ heißen Eigenvektoren.

Ihre zugehörigen Eigenwerte sind $\frac{11}{20}$ und 1.

Wird ein Startvektor als Linearkombination von Eigenvektoren dargestellt, dann ist die weitere Entwicklung offensichtlich. Das gilt natürlich nicht nur für 2×2-Matrizen.
Die Kenntnis der Eigenwerte einer Übergangsmatrix erlaubt Aussagen über die langfristige Entwicklung, z. B. wenn alle Eigenwerte kleiner 1 sind oder ein Eigenwert größer 1 ist.
Wie verhält es sich vermutlich bei Matrizen der Austauschprozesse (Spaltensumme 1)?

Eigenvektoren Fortsetzung

Ein Vektor mit der Eigenschaft $\mathcal{A} \cdot \vec{x} = \lambda \vec{x}$ heißt Eigenvektor zum Eigenwert λ.

Für die Matrix $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ bedeutet das:

$$\begin{array}{rcrcl} ax & + & by & = & \lambda x \\ cx & + & dy & = & \lambda y \end{array} \qquad \text{bzw.}$$

$$\begin{array}{rcrcl} (a-\lambda)x & + & by & = & 0 \\ cx & + & (d-\lambda)y & = & 0 \end{array} \qquad \text{d. h.} \qquad \begin{array}{rcr} (a-\lambda)x & = & -by \\ cx & = & -(d-\lambda)y \end{array}$$

Durch eine Division beider Seiten fallen x und y heraus: $\frac{a-\lambda}{c} = \frac{b}{d-\lambda}$

d. h. $(a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0$

oder in anderer Schreibweise: $\det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) = 0$

Es müssen also zuerst mit dieser Gleichung die Eigenwerte ermittelt werden und dann mit ihnen mit dem Gleichungssystem $\mathcal{A} \cdot \vec{x} = \lambda \vec{x}$ die zugehörigen Eigenvektoren.
Zu einem Eigenvektor ist auch ein Vielfaches Eigenvektor zum selben Eigenwert.

Sei $\vec{x}_0 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, Eigenwert von $\vec{e}_1$ sei λ_1, Eigenwert von $\vec{e}_2$ sei λ_2.

Ermittle $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, ...

Mit dem GTR werden Eigenwerte als Nullstellen ermittelt: Y-Editor: Y1=det([A]-identity(2)X)

1. Ermittle für die Matrix $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ Eigenwerte und Eigenvektoren.

2. Die Eigenwerte der Matrix $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ lauten: 1, -2 und 4.
   Bestimme die Eigenvektoren.

3. Eine Bevölkerungsentwicklung werde durch eine Matrix $\mathcal{A}$ beschrieben.
   a) Die Grenzmatrix $\mathcal{A}^\infty$ enthalte eine Nullspalte. Was bedeutet das?
   b) Es soll eine jährliche, konstante Einwanderung $\vec{c}$ berücksichtigt werden.
   Die Anfangsverteilung sei $\vec{v}_0$. Wie sieht die weitere Entwicklung aus?

Aufgaben

4. Die Matrix beschreibt die Entwicklung einer Population.

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 5 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Überpüfe, ob $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e_3} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Eigenvektoren sind.

b) Stelle den Startvektor $\vec{v_0} = \begin{pmatrix} 123 \\ 61 \\ 20 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ und $\vec{e_3}$ dar.

Wie lautet $\vec{v_n}$?

Gibt es eine Grenzverteilung? Wenn ja, wie wäre sie?

5. Zwei Anbieter A, B eines Produktes teilen sich den Markt. Innerhalb eines Monats wechselt ein Anteil p der Kunden von A zu B, während $p + 0{,}2$ der Kunden von B aufgrund geringerer Markentreue zu A wechseln. Die übrigen Kunden verbleiben bei dem jeweiligen Anbieter. Die Gesamtzahl der Kunden bleibt gleich.
Langfristig kann sich jeder der Anbieter nur dann am Markt halten, wenn er mindestens 30 % Marktanteil aufweist. Für welche Werte p wird B vom Markt verschwinden?

6. Für einen Startvektor $\vec{v}$ gelte: $\mathcal{A} \cdot \vec{v} = q \cdot \vec{v}$.
Was kann über $\vec{v}_\infty$ in Abhängigkeit von q ausgesagt werden?

7. Wie kann ein vermuteter Grenzvektor eines Austauschprozesses auf einfache Weise (ohne GTR) nachgewiesen werden?

8. Sei
$\mathcal{M}^\infty = \begin{pmatrix} p_1 & p_1 & p_1 \\ p_2 & p_2 & p_2 \\ p_3 & p_3 & p_3 \end{pmatrix}$, Startvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, Spaltensumme $a_1 + a_2 + a_3 = S$

Die Grenzverteilung ist unabhängig von der Anfangsverteilung. Erläutere dies.

$$\mathcal{M}^\infty \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} p_1 \cdot a_1 + p_1 \cdot a_2 + p_1 \cdot a_3 \\ p_2 \cdot a_1 + p_2 \cdot a_2 + p_2 \cdot a_3 \\ p_3 \cdot a_1 + p_3 \cdot a_2 + p_3 \cdot a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \cdot (a_1 + a_2 + a_3) \\ p_2 \cdot (a_1 + a_2 + a_3) \\ p_3 \cdot (a_1 + a_2 + a_3) \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

Aufgaben Ergebnisse

1. $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

   Eigenwert, Eigenvektor

   $$ew_1 = 1, \quad \vec{e_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   $$ew_2 = 4, \quad \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

   Eigenwert, Eigenvektor

   $$ew_1 = 4, \quad \vec{e_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad ew_2 = 1, \quad \vec{e_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad ew_3 = -2, \quad \vec{e_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

4. $\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 5 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   a) Eigenwert, Eigenvektor

   $$ew_1 = \frac{1}{2}, \quad \vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad ew_2 = -\frac{1}{4}, \quad \vec{e_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad ew_3 = 1, \quad \vec{e_3} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

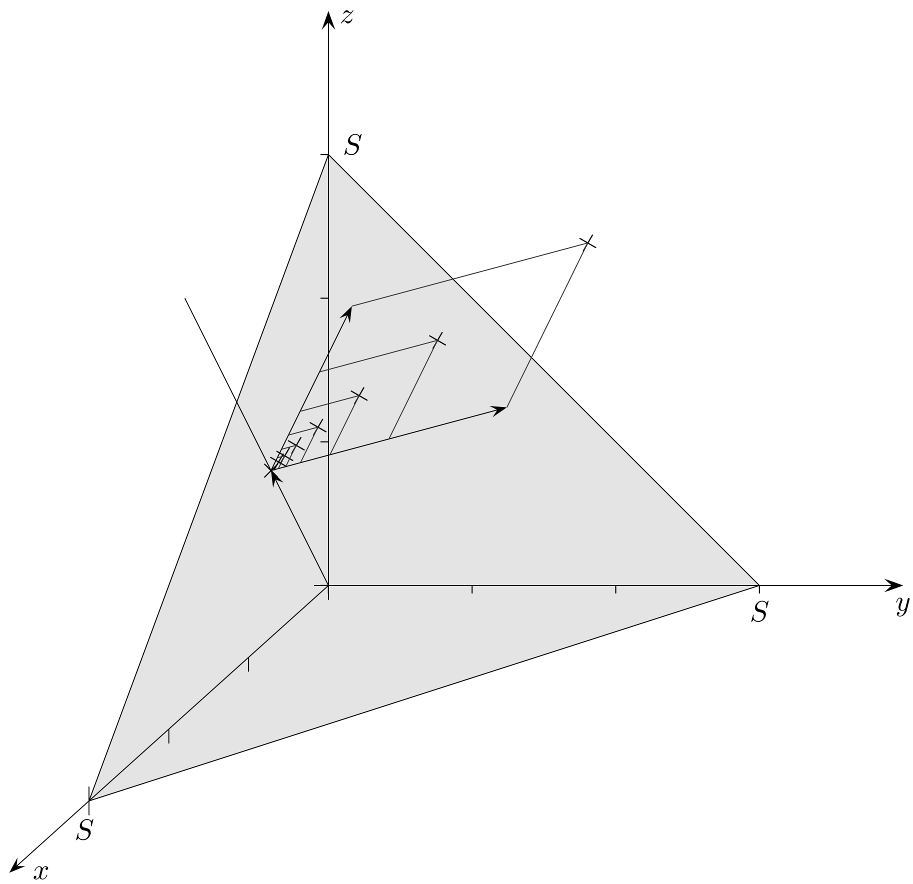
   b) $\vec{v_0} = \begin{pmatrix} 123 \\ 61 \\ 20 \end{pmatrix} = 15\vec{e_1} + 6\vec{e_2} + 20\vec{e_3}, \qquad \vec{v}_\infty = \begin{pmatrix} 120 \\ 40 \\ 20 \end{pmatrix}$

6. $|\, q \,| < 1 \implies \vec{v}_\infty$ ist der Nullvektor, das System zerfällt
   $|\, q \,| > 1 \implies \vec{v}_\infty$ existiert nicht, das System expandiert
   $q = 1 \implies \vec{v}_\infty = \vec{v}$
   $q = -1 \implies$ periodische Entwicklung mit $\pm\vec{v}$

7. $\mathcal{A} \cdot \vec{v} = \vec{v}$

Konvergenzverhalten stochastischer Matrizen

Die Veranschaulichung des Grenzprozesses für eine 3×3-Matrix gelingt im $\mathbb{R}^3$.
Die Punktfolge liegt auf der Ebene $x + y + z = S$, wobei S die Spaltensumme des Startvektors ist.
Die Grenzverteilung ergibt sich als Schnitt der Ebene mit einer Ursprungsgeraden, deren Richtungs- vektor der Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist. Auf dieser Geraden liegen die stationären Verteilungen.
Um den Konvergenzprozess näher zu untersuchen, wird der Startvektor als Linearkombination der 3 Eigenvektoren dargestellt.



Bei stochastischen Matrizen bleibt die Spaltensumme durch den Übergang von $\vec{x}$ nach $\mathcal{A}\vec{x}$ erhalten.
Für einen Eigenvektor $\vec{u}$ bedeutet dies, dass seine Spaltensumme mit der von $\lambda\vec{u}$ übereinstimmt.
Das ist nur möglich, wenn $\lambda = 1$ oder die Spaltensumme Null ist, d. h. $u_1 + u_2 + u_3 = 0$,
der Eigenvektor also parallel zur Ebene $x_1 + x_2 + x_3 = S$ verläuft (beachte den Normalenvektor).
Da der Prozess konvergiert, müssen die Eigenwerte dieser Eigenvektoren kleiner Null sein.
Nun ist auch ersichtlich, dass die Grenzverteilung von der Anfangsverteilung (bei gleicher Spaltensumme) unabhängig ist.

Zeige: Aus $\mathcal{A}^\infty \cdot \begin{pmatrix} S \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathcal{A}^\infty \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ S \\ 0 \end{pmatrix} = \mathcal{A}^\infty \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ S \end{pmatrix}$ folgt, dass die Spalten von $\mathcal{A}^\infty$ gleich sind und mit der stationären Verteilung übereinstimmen.

Grenzmatrix

Betrachte die 1. Zeilen (2. Zeilen) der Matrizen.
Welche Vermutung liegt nahe? Beweis?

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}7 \\ 0{,}8 & 0{,}3 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}^2 = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}35 \\ 0{,}4 & 0{,}65 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}^3 = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}525 \\ 0{,}6 & 0{,}475 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}^4 = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}438 \\ 0{,}5 & 0{,}563 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}^5 = \begin{pmatrix} 0{,}45 & 0{,}481 \\ 0{,}55 & 0{,}519 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}^{10} = \begin{pmatrix} 0{,}467 & 0{,}466 \\ 0{,}533 & 0{,}534 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}^{15} = \begin{pmatrix} 0{,}467 & 0{,}467 \\ 0{,}533 & 0{,}533 \end{pmatrix}$$

Grenzmatrix

Die kleinere Zahl der jeweils 1. Zeile (2. Zeile) wird mit höheren Potenzen immer größer, die größere Zahl wird immer kleiner.
Die Differenzen streben vermutlich gegen Null ($d^n \longrightarrow 0,\ d < 1$, siehe 41., Aufg.5, Seite 8).

$$\begin{array}{r|l} & \begin{pmatrix} p & \cdot \\ 1-p & \cdot \end{pmatrix} = \mathcal{A} \\ \hline \mathcal{A}^n = \begin{pmatrix} a & b \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \blacksquare & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \mathcal{A}^{n+1} \end{array}$$

Sei $a < b$

$\blacksquare = a \cdot p + b \cdot (1-p) > a$

(Gleichheit für $a = b$)

Für $N \times N$-Matrizen wächst die kleinste Zahl je Zeile monoton, die Größte fällt monoton.

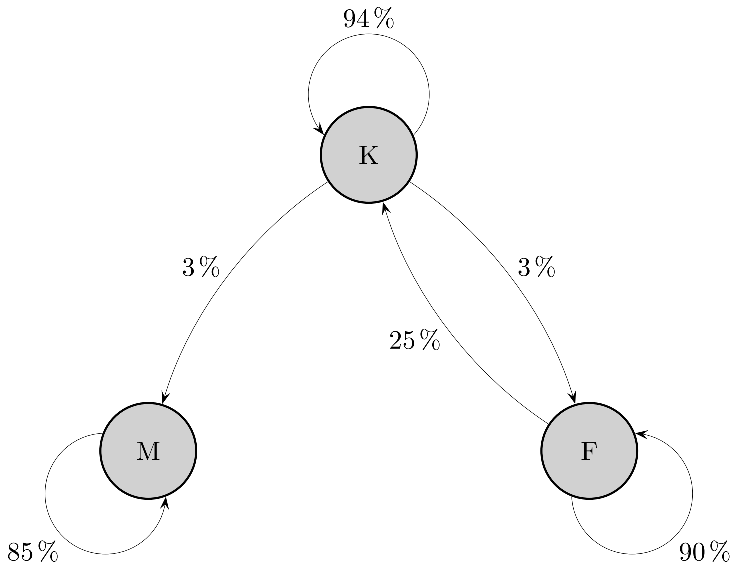
Sei also $\mathcal{A}^\infty = \begin{pmatrix} p_1 & p_1 \\ p_2 & p_2 \end{pmatrix}$.

Für einen Startvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ mit der Spaltensumme $a_1 + a_2 = S$ ist dann die Grenzverteilung unabhängig von der Anfangsverteilung. Erläutere dies.

$$\lim_{x \to \infty} (\mathcal{A}^n \cdot \vec{a}) = \mathcal{A}^\infty \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} p_1 & p_1 \\ p_2 & p_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \cdot a_1 + p_1 \cdot a_2 \\ p_2 \cdot a_1 + p_2 \cdot a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \cdot (a_1 + a_2) \\ p_2 \cdot (a_1 + a_2) \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

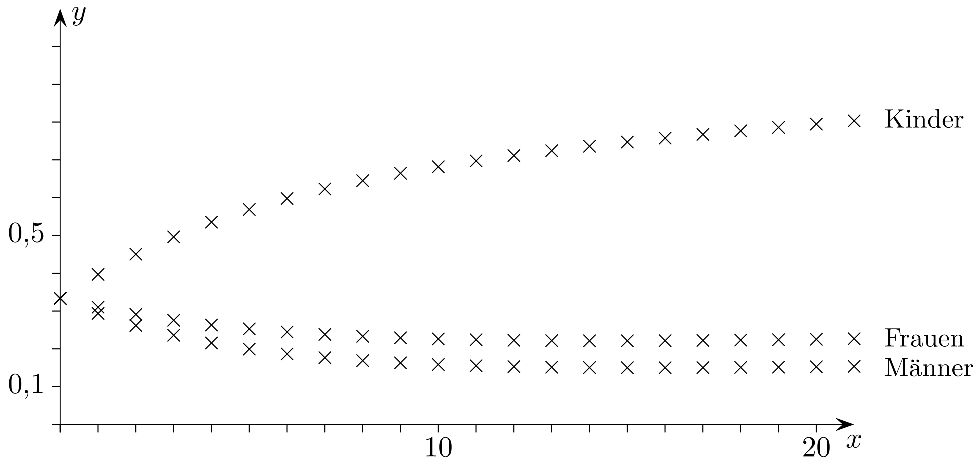
1. Die Bevölkerung eines Landes mit 30 Millionen Einwohnern sei gleichmäßig in Männer, Frauen und Kinder aufgeteilt. lm beobachteten Zeitraum von einem Jahr erreichen jeweils 3 % der männlichen und weiblichen Kinder das Erwachsenenalter. lm Durchschnitt bekommen 25 % der Frauen in diesem Jahr ein Kind. Die Sterblichkeit betrage bei den Männern 15 % und bei den Frauen 10 %. Wie wird sich die Bevölkerung weiter entwickeln?

   Die im Text gegebenen lnformationen lassen sich in einem Übergangsgraphen veranschaulichen.



und in einer Übergangsmatrix übersichtlich anordnen:

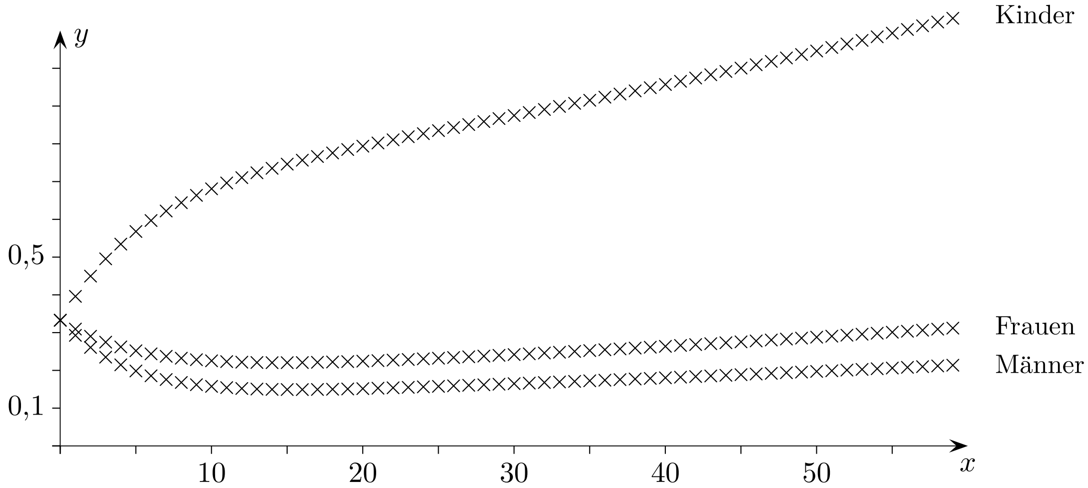
$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0 & 0{,}03 \\ 0 & 0{,}9 & 0{,}03 \\ 0 & 0{,}25 & 0{,}94 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} M_{n+1} &= 0{,}85\,M_n + 0{,}03\,K_n \\ F_{n+1} &= 0{,}9\,F_n + 0{,}03\,K_n \\ K_{n+1} &= 0{,}25\,F_n + 0{,}94\,K_n \end{aligned}$$



$$\overrightarrow{v_0} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v_{10}} = \begin{pmatrix} 0{,}158 \\ 0{,}226 \\ 0{,}682 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v_{20}} = \begin{pmatrix} 0{,}152 \\ 0{,}225 \\ 0{,}795 \end{pmatrix}$$

Für den Zustandsvektor zur anfänglichen Gleichverteilung können absolute oder relative Werte verwendet werden. Die durch die Grafik nahegelegte Vermutung hinsichtlich der weiteren Entwicklung ist falsch.

Die Einwohnerzahl wächst schließlich immer weiter an, desgleichen die Zahl der Männer und Frauen.



$$\overrightarrow{v_0} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v_{20}} = \begin{pmatrix} 0{,}152 \\ 0{,}225 \\ 0{,}795 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v_{50}} = \begin{pmatrix} 0{,}198 \\ 0{,}289 \\ 1{,}047 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v_{100}} = \begin{pmatrix} 0{,}308 \\ 0{,}449 \\ 1{,}629 \end{pmatrix}$$

Eine Grenzmatrix existiert nicht.
Die Bevölkerungsentwicklung ist natürlich von der Anfangsverteilung abhängig.
Die Matrix

$$\mathcal{A}^{50} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}413 & 0{,}180 \\ 0 & 0{,}603 & 0{,}263 \\ 0 & 2{,}188 & 0{,}953 \end{pmatrix}$$

belegt, dass die Bevölkerungszahl nach 50 Jahren weitgehend unabhängig von der anfänglichen Anzahl der Männer ist.

Im vorliegenden Beispiel ist die Zeilensumme in der dritten Zeile der Übergangsmatrix $\mathcal{A}$ größer als 1, die hohe Geburtenrate sichert das Wachstum der Bevölkerung. Die Einträge in der Ubergangsmatrix $\mathcal{A}$ sind nicht kleiner als Null.

Allgemein gilt dann, dass das durch die Matrix beschriebene System (bei positiven Startkomponenten)

(1) konvergiert, wenn alle Zeilensummen gleich 1 sind,

(2) expandiert, wenn alle Zeilensummen größer als 1 sind,

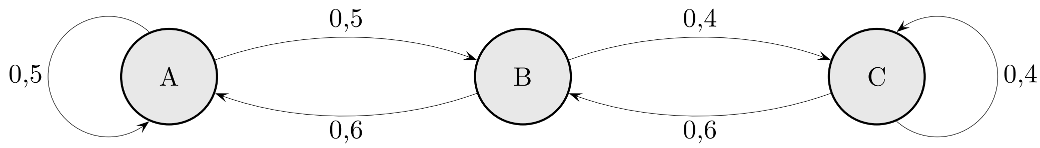
(3) zerfällt, wenn alle Zeilensummen der Matrix kleiner als 1 sind.

Eine Betrachtung der Eigenwerte und -vektoren der Matrix $\mathcal{A}$ ist aufschlussreich.

$$ew_1 = 0{,}85\,, \quad \vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad ew_2 = 0{,}831\,, \quad \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 1{,}589 \\ 0{,}436 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad ew_3 = 1{,}009\,, \quad \vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0{,}189 \\ 0{,}276 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Begründe:
Die Verteilung der Einwohner auf die betrachteten Bevölkerungsgruppen bleibt schließlich stabil. Der Anteil der Männer an der Gesamtbevölkerung konvergiert gegen 12,9 %, der Anteil der Frauen gegen 18,8 % und der der Kinder gegen 68,3 %.

2. Für eine Haftpflichtversicherung gibt es die Tarifklassen A, B und C. C ist die Ungünstigste. Bleibt man während eines Kalenderjahres schadensfrei, steigt man im folgenden Jahr in die nächstgünstigere Klasse auf oder verbleibt in A. Im Schadensfall ist es umgekehrt. Der Übergangsgraph enthält die Umstufungsanteile. Die Gesamtzahl der Versicherten sei als konstant anzunehmen.



a) Die Gesamtzahl der Versicherten betrage 4300. Im Jahr 2009 sind dabei 1500 Versicherte in die Tarifklasse A, 1500 in B und der Rest in C eingestuft. Berechnen Sie die Verteilungen der Jahre 2008, 2010 und 2011.

b) Welche Verteilung stellt sich auf lange Sicht ein?

c) Die langfristig sich einstellende Anzahl der Versicherten in der Tarifklasse A ist dem Unternehmen zu hoch. Es erwägt, bei größeren Schadensfällen eine direkte Rückstufung von A nach C einzuführen. Wie groß müsste dieser Anteil sein (mit dem die Schadensgrenze ermittelt werden könnte), damit sich langfristig nur noch 1600 Versicherte in Klasse A befänden? Wie viele Versicherte wären dann in den übrigen Klassen?

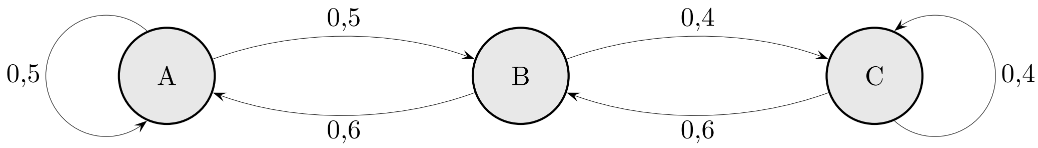
3. Zwei Firmen stellen die miteinander konkurrierenden Kaffeemischungen K_1 und K_2 her. Marktuntersuchungen haben ergeben, dass 80 % der Kunden der Kaffeesorte K_1 je Übergangsperiode treu bleiben, während 30 % von K_2 nach K_1 wechseln. Die Firma, die K_2 produziert, plant die Einführung einer neuen Kaffeemischung K_3, um ihren Marktanteil zu erhöhen.
Hierbei ergab eine vorbereitende Marktanalyse, dass bei einer Einführung von K_3 80 % bei K_1 bleiben und 10 % von K_1 zu K_3 wechseln. Die Kunden von K_2 bleiben zu 60 % ihrer Marke treu, sie lehnen K_3 ab. Die neue Marke K_3 behält zu 50 % ihre neuen Kunden, 40 % wechseln zu K_2.

Zur Zeit (vor Einführung der neuen Sorte) liegt der Marktanteil bei 65 % für K_1 und 35 % für K_2.

a) Welche Marktstrategie sollte der Produzent von K_2 verfolgen, wenn er einen größeren Marktanteil erzielen will?

b) Bewerte das zugrundeliegende mathematische Modell für die Einführung einer neuen Kaffeesorte.

2. Für eine Haftpflichtversicherung gibt es die Tarifklassen A, B und C. C ist die Ungünstigste. Bleibt man während eines Kalenderjahres schadensfrei, steigt man im folgenden Jahr in die nächstgünstigere Klasse auf oder verbleibt in A. Im Schadensfall ist es umgekehrt. Der Übergangsgraph enthält die Umstufungsanteile. Die Gesamtzahl der Versicherten sei als konstant anzunehmen.



a) Die Gesamtzahl der Versicherten betrage 4300. Im Jahr 2009 sind dabei 1500 Versicherte in die Tarifklasse A, 1500 in B und der Rest in C eingestuft. Berechnen Sie die Verteilungen der Jahre 2008, 2010 und 2011.

$$\vec{v}_{2008} = \begin{pmatrix} 1050 \\ 1625 \\ 1625 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_{2010} = \begin{pmatrix} 1650 \\ 1530 \\ 1120 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_{2011} = \begin{pmatrix} 1743 \\ 1497 \\ 1060 \end{pmatrix}$$

b) Welche Verteilung stellt sich auf lange Sicht ein?

$$\vec{v}_{\infty} = \begin{pmatrix} 1800 \\ 1500 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

c) Die langfristig sich einstellende Anzahl der Versicherten in der Tarifklasse A ist dem Unternehmen zu hoch. Es erwägt, bei größeren Schadensfällen eine direkte Rückstufung von A nach C einzuführen. Wie groß müsste dieser Anteil sein (mit dem die Schadensgrenze ermittelt werden könnte), damit sich langfristig nur noch 1600 Versicherte in Klasse A befänden? Wie viele Versicherte wären dann in den übrigen Klassen?

$$\mathcal{M}^* = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}6 & 0 \\ a & 0 & 0{,}6 \\ 0{,}5 - a & 0{,}4 & 0{,}4 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}^*_{\infty} = \begin{pmatrix} 1600 \\ b \\ 2700 - b \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}^* \cdot \vec{v}^*_{\infty} = \vec{v}^*_{\infty} \quad \Longrightarrow \quad b = 1333{,}33, \quad a = 0{,}32$$

$$\vec{v}^*_{\infty} = \begin{pmatrix} 1600 \\ 1333{,}33 \\ 1367{,}67 \end{pmatrix}$$

3. Zwei Firmen stellen die miteinander konkurrierenden Kaffeemischungen K_1 und K_2 her. Marktuntersuchungen haben ergeben, dass 80 % der Kunden der Kaffeesorte K_1 je Übergangsperiode treu bleiben, während 30 % von K_2 nach K_1 wechseln. Die Firma, die K_2 produziert, plant die Einführung einer neuen Kaffeemischung K_3, um ihren Marktanteil zu erhöhen.
Hierbei ergab eine vorbereitende Marktanalyse, dass bei einer Einführung von K_3 80 % bei K_1 bleiben und 10 % von K_1 zu K_3 wechseln. Die Kunden von K_2 bleiben zu 60 % ihrer Marke treu, sie lehnen K_3 ab. Die neue Marke K_3 behält zu 50 % ihre neuen Kunden, 40 % wechseln zu K_2.

Zur Zeit (vor Einführung der neuen Sorte) liegt der Marktanteil bei 65 % für K_1 und 35 % für K_2.

a) Welche Marktstrategie sollte der Produzent von K_2 verfolgen, wenn er einen größeren Marktanteil erzielen will?

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$$

langfristige Marktanteile vor Einführung der neuen Sorte: $K_1 = 60\,\%$, $K_2 = 40\,\%$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

langfristige Anteile mit Einführung von K_3: $K_1 = 60{,}1\,\%$, $K_2 = 27{,}3\,\%$, $K_3 = 12{,}1\,\%$

Gesamtanteil von K_2 und K_3: $39{,}4\,\%$

Durch die Einführung der neuen Sorte verkleinert sich der Marktanteil etwas.

b) Bewerte das zugrundeliegende mathematische Modell für die Einführung einer neuen Kaffeesorte.

4. Für einen Austauschprozess sei $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix}$. Der Startvektor sei $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 150 \\ 200 \end{pmatrix}$.

   a) Bestimmen Sie $\vec{x}_1$, $\vec{x}_5$, $\vec{x}_{-1}$, $\vec{x}_{-2}$, $\mathcal{A}^\infty$ und damit $\vec{x}_\infty$ (Was muss zu $\vec{x}_{-2}$ angemerkt werden?).

   b) Weisen Sie nach, dass $\vec{a} = \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \end{pmatrix}$ ein Fixvektor ist. Wie hätte man ihn ohne GTR errechnen können?

   c) Ermitteln Sie k, so dass für $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt: $\mathcal{A}\vec{b} = k\vec{b}$. Gilt diese Beziehung auch für Vektoren, die zu $\vec{b}$ kollinear sind?

   d) Stellen Sie $\vec{y}_0 = \begin{pmatrix} 600 \\ 100 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ (aus b) und c)) dar und beschreiben Sie hiermit die weitere Entwicklung.

4. Für einen Austauschprozess sei $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix}$. Der Startvektor sei $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 150 \\ 200 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie $\vec{x}_1$, $\vec{x}_5$, $\vec{x}_{-1}$, $\vec{x}_{-2}$, $\mathcal{A}^\infty$ und damit $\vec{x}_\infty$ (Was muss zu $\vec{x}_{-2}$ angemerkt werden?).

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 185 \\ 165 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_5 = \begin{pmatrix} 199{,}88 \\ 150{,}12 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_{-1} = \begin{pmatrix} 33{,}33 \\ 316{,}66 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_{-2} = \begin{pmatrix} -355,56 \\ 705,56 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}^\infty = \begin{pmatrix} 0{,}57 & 0{,}57 \\ 0{,}43 & 0{,}43 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_\infty = \begin{pmatrix} 0{,}57 \cdot 350 \\ 0{,}43 \cdot 350 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 199{,}5 \\ 150{,}5 \end{pmatrix}$$

b) Weisen Sie nach, dass $\vec{a} = \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \end{pmatrix}$ ein Fixvektor ist. Wie hätte man ihn ohne GTR errechnen können?

$\mathcal{A} \cdot \vec{a} = \vec{a}$

$\mathcal{A} \cdot \vec{x} = \vec{x}$, zweite Zeile durch $x + y = 350$ ersetzen

ansonsten gilt für stochastische Matrizen: $\mathcal{A}^\infty \cdot \vec{x}_0 = \vec{a}$

Als Startvektor kann jeder Vektor mit derselben Spaltensumme genommen werden.

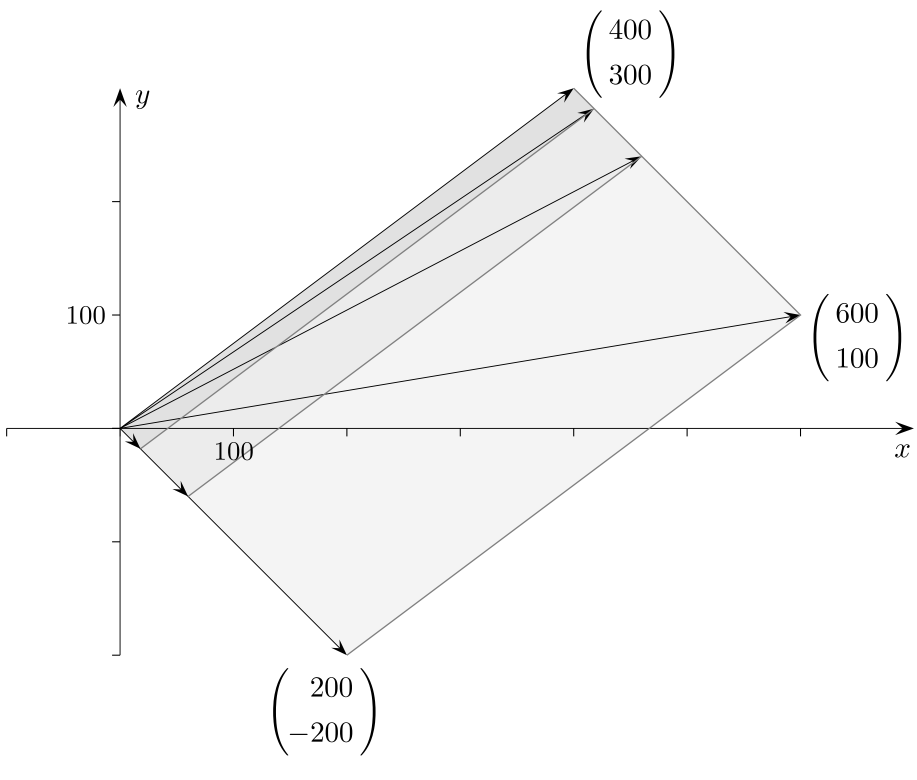
c) Ermitteln Sie k, so dass für $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt: $\mathcal{A}\vec{b} = k\vec{b}$. Gilt diese Beziehung auch für Vektoren, die zu $\vec{b}$ kollinear sind?

$k = 0{,}3$ ja

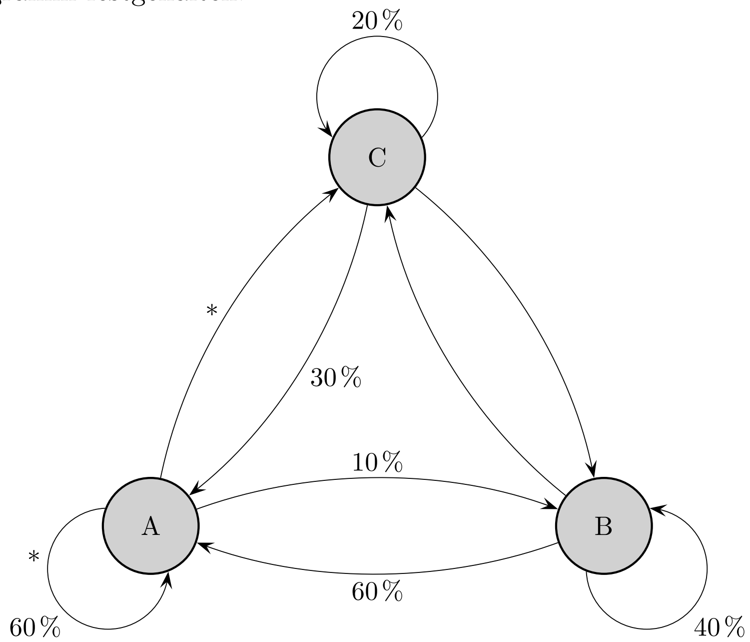
d) Stellen Sie $\vec{y}_0 = \begin{pmatrix} 600 \\ 100 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ (aus b) und c)) dar und beschreiben Sie hiermit die weitere Entwicklung.

$\vec{y}_0 = 2\vec{a} - 200\vec{b}$

$$\vec{y}_n = \begin{pmatrix} 400 \\ 300 \end{pmatrix} + 0{,}3^n \begin{pmatrix} 200 \\ -200 \end{pmatrix}$$



5. In einem abgeschlossenen Wildreservat
   - unterteilt in die Bereiche A, B und C -
   untersuchen Biologen die monatliche Wanderungsbewegung der Bären.
   Die Ergebnisse sind in dem Diagramm festgehalten.



a) Ergänzen Sie das Diagramm und stellen Sie das Wechselverhalten in einer Übergangsmatrix $\mathcal{Q}$ dar.

b) Bestimmen Sie alle Fixvektoren zur Matrix $\mathcal{Q}$.

c) ln einem bestimmten Monat halten sich in A 400, in B und C jeweils 200 Bären auf. Berechnen Sie für die nächsten drei Monate die Verteilung (gerundet) der Bären auf die drei Gebiete. Welche Verteilung stellt sich langfristig ein?

d) ln einem bestimmten Monat halten sich 1800 Bären in A, B und C im Verhältnis 4 : 3 : 2 auf. Wie viele Bären sind das in den einzelnen Bereichen?

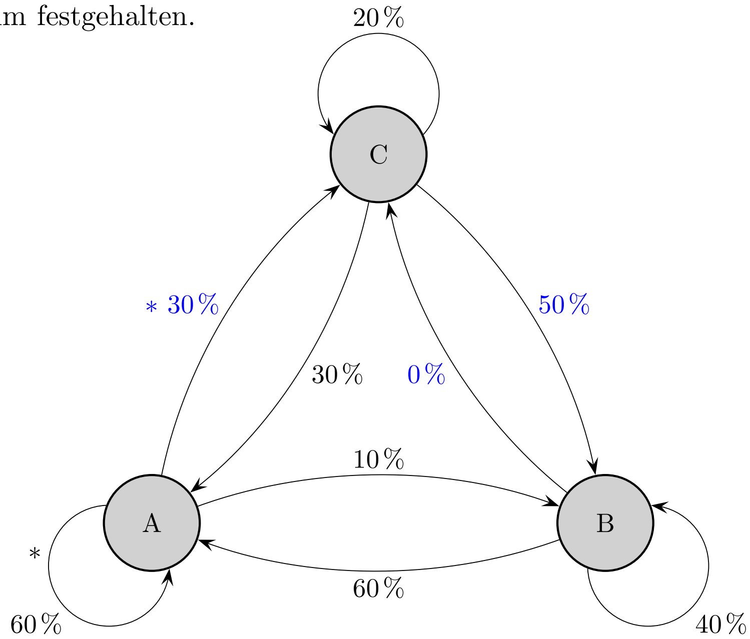
e) Einige Biologen streben folgende Grenzverteilung an: in A 300, in B 250 und in C 240 Bären. Hierzu sollen die markierten Übergänge ($*$) verändert werden (in A könnten z.B. die Lebensbedingungen erschwert werden). Untersuchen Sie, ob dies möglich ist.

f) Einige Biologen vermuten, dass sich die ursprüngliche Übergangsmatrix verändert hat zu:

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} . & . & 0 \\ . & . & 0 \\ a & b & 1 \end{pmatrix}$$

Erörtern Sie (ohne Rechnung) die möglichen Konsequenzen (Fallunterscheidung a, b größer null Prozent, a, b nahezu null). Nennen Sie auch mögliche Ursachen.
Gehen Sie jeweils auf die Existenz einer Grenzverteilung ein.

5. In einem abgeschlossenen Wildreservat
- unterteilt in die Bereiche A, B und C -
untersuchen Biologen die monatliche Wanderungsbewegung der Bären.
Die Ergebnisse sind in dem Diagramm festgehalten.



a) Ergänzen Sie das Diagramm und stellen Sie das Wechselverhalten in einer Übergangsmatrix $\mathcal{Q}$ dar.

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

b) Bestimmen Sie alle Fixvektoren zur Matrix $\mathcal{Q}$.

$$\vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 48 \\ 23 \\ 18 \end{pmatrix}$$

c) In einem bestimmten Monat halten sich in A 400, in B und C jeweils 200 Bären auf. Berechnen Sie für die nächsten drei Monate die Verteilung (gerundet) der Bären auf die drei Gebiete. Welche Verteilung stellt sich langfristig ein?

$$\overrightarrow{p_0} = \begin{pmatrix} 400 \\ 200 \\ 200 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{p_1} = \begin{pmatrix} 420 \\ 220 \\ 160 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{p_2} = \begin{pmatrix} 432 \\ 210 \\ 158 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{p_3} = \begin{pmatrix} 433 \\ 206 \\ 161 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{p_\infty} = \begin{pmatrix} 431 \\ 207 \\ 162 \end{pmatrix}$$

d) In einem bestimmten Monat halten sich 1800 Bären in A, B und C im Verhältnis 4 : 3 : 2 auf. Wie viele Bären sind das in den einzelnen Bereichen?

A 800, B 600, C 400

e) Einige Biologen streben folgende Grenzverteilung an: in A 300, in B 250 und in C 240 Bären. Hierzu sollen die markierten Übergänge (∗) verändert werden (in A könnten z.B. die Lebensbedingungen erschwert werden). Untersuchen Sie, ob dies möglich ist.

$$\begin{pmatrix} a & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}5 \\ b & 0 & 0{,}2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 250 \\ 240 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 250 \\ 240 \end{pmatrix}$$

$a = 0{,}26, \quad b = 0{,}64$

f) Einige Biologen vermuten, dass sich die ursprüngliche Übergangsmatrix verändert hat zu:

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} . & . & 0 \\ . & . & 0 \\ a & b & 1 \end{pmatrix}$$

Erörtern Sie (ohne Rechnung) die möglichen Konsequenzen (Fallunterscheidung a, b größer null Prozent, a, b nahezu null). Nennen Sie auch mögliche Ursachen.
Gehen Sie jeweils auf die Existenz einer Grenzverteilung ein.

Es wandern keine Bären mehr aus C ab.
Falls a und b ungleich Null sind, ist C absorbierend, Ursachen ...
Es existiert eine Grenzverteilung.
Falls a und b nahezu Null sind, findet keine Wanderbewegung zwischen C und den anderen Gebieten statt.
Eine Grenzverteilung muss nicht existieren;
die Tiere können zwischen den Bereichen A und B periodisch wechseln.

alternativ

f) Einige Biologen vermuten, dass sich die ursprüngliche Übergangsmatrix in der 3. Zeile und in der 3. Spalte verändert hat:

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} . & . & 0 \\ . & . & 0 \\ 0{,}04 & 0{,}04 & 1 \end{pmatrix}$$

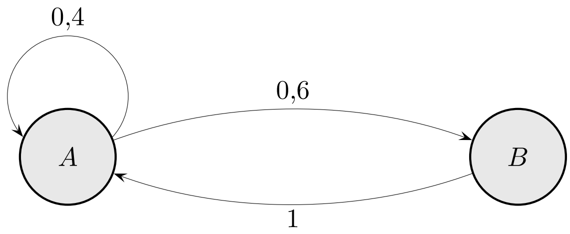
Beschreiben Sie (ohne Rechnung) die langfristigen Auswirkungen.

Die Gesamtanzahl der Bären in den Gebieten A und B sei anfänglich 600.

Welche Funktion $B(t)$ erfasst die Gesamtanzahl der Bären in diesen Gebieten?

C ist absorbierend.
$B(t) = 600 \cdot 0{,}96^t$

ohne GTR



In einem System verteilt sich ein Gesamtbestand auf die Zustände A und B.
Pro Zeiteinheit finden zwischen den Zuständen die in der Abbildung dargestellten Übergänge statt.

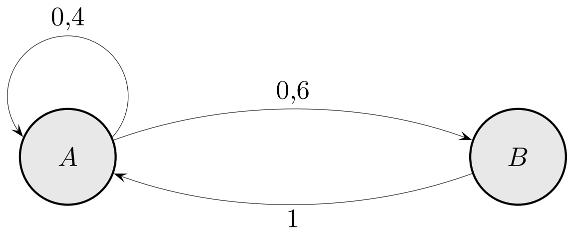
a) Geben Sie die Übergangsmatrix $\mathcal{M}$ an.
Bestimmen Sie die Matrix $\mathcal{N}$, die die Übergänge in zwei aufeinanderfolgenden Zeiteinheiten zusammenfassend beschreibt.

b) Weisen Sie nach, dass

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

die Grenzmatrix ist.

ohne GTR



In einem System verteilt sich ein Gesamtbestand auf die Zustände A und B.
Pro Zeiteinheit finden zwischen den Zuständen die in der Abbildung dargestellten Übergänge statt.

a) Geben Sie die Übergangsmatrix $\mathcal{M}$ an.
Bestimmen Sie die Matrix $\mathcal{N}$, die die Übergänge in zwei aufeinanderfolgenden Zeiteinheiten zusammenfassend beschreibt.

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 1 \\ 0{,}6 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{N} = \mathcal{M}^2 = \begin{pmatrix} 0{,}76 & 0{,}4 \\ 0{,}24 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

b) Weisen Sie nach, dass

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

die Grenzmatrix ist.

$$\begin{pmatrix} 0{,}4 & 1 \\ 0{,}6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{8} \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix} \quad \text{(Grenzverteilung)}$$

ohne GTR

Gegeben ist die Matrix

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Ermitteln Sie die fehlenden Einträge in der zugehörigen inversen Matrix:

$$\mathcal{M}^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & \square & 8 \\ -12 & 4 & 8 \\ \square & -3 & \square \end{pmatrix}$$

ohne GTR

Gegeben ist die Matrix

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Ermitteln Sie die fehlenden Einträge in der zugehörigen inversen Matrix:

$$\mathcal{M}^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & \square & 8 \\ -12 & 4 & 8 \\ \square & -3 & \square \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 8 \\ -12 & 4 & 8 \\ 21 & -3 & -15 \end{pmatrix}$$

Es fällt auf, dass die Spaltensumme wieder 1 ist.
Ist das Zufall?