

# Determinanten

Wir entwickeln eine Lösungsformel für Gleichungssysteme mit zwei Variablen.

$$\begin{array}{r} ax + cy = e \quad | \cdot (-b) \\ bx + dy = f \quad | \cdot a \\ \hline -abx - bcy = -be \\ abx + ady = af \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} ax + cy = e \\ bx + dy = f \end{array}} \right\} +$$
$$y(ad - bc) = af - be$$

$$y = \frac{af - be}{ad - bc} = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ b & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}} \quad \text{analog} \quad x = \frac{ed - cf}{ad - bc} = \frac{\begin{vmatrix} e & c \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}}$$

Man schreibt  $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$  für den Term  $ad - bc$  und nennt das Zahlenschema bzw. seinen Wert *Determinante*.

Determinanten sind für die Matrizenrechnung von grundlegender Bedeutung.

Zum besseren Verständnis der vielen Gesetzmäßigkeiten für Determinanten veranschaulichen wir uns

$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$ . Hierzu betrachten wir die beiden Spaltenvektoren  $\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  und  $\vec{y} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ , die die Matrix  $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  bilden.

1. Ermittle die Determinante.

a)  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$       b)  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

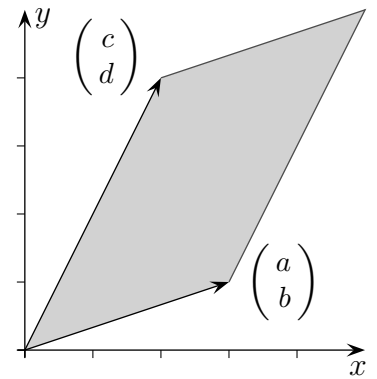
2. Was bedeutet die Determinante für zwei Vektoren in der Ebene? Stelle eine Vermutung auf.

3. Untersuche die Veränderung der Determinante  $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ , falls

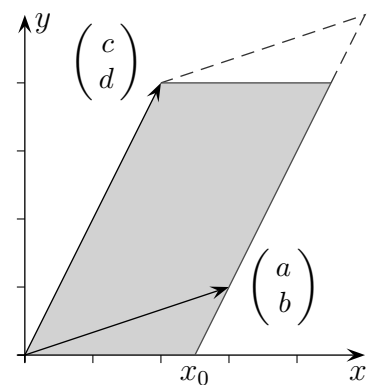
- die Spaltenvektoren vertauscht werden,
- ein Spaltenvektor mit einer Zahl multipliziert wird,
- zu einem Spaltenvektor das Vielfache des anderen Spaltenvektors addiert wird,
- die Spaltenvektoren linear abhängig (kollinear) sind,
- die Matrix transponiert wird, Zeilen und Spalten werden vertauscht, genauer: die 1. Spalte wird zur 1. Zeile, die 2. Spalte wird zur 2. Zeile.
- Beweise die unter 2. aufgestellte Vermutung.

3. f) soll bewiesen werden.

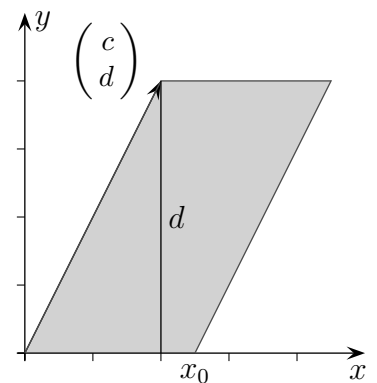
Der Determinante entspricht - vom Vorzeichen abgesehen - dem Flächeninhalt des von den Vektoren aufgespannten Parallelogramms.



Durch eine Scherung wird die Berechnung vereinfacht. Indem wir eine Geradengleichung aufstellen und eine Nullstelle berechnen, erhalten wir  $x_0 = a - \frac{b}{d} \cdot c$ .



Multiplizieren wir  $x_0$  mit der Höhe  $d$ , so erhalten wir den Inhalt  $ad - bc$  des Parallelogramms.



Mit dieser Deutung sind die meisten der für Determinanten gültigen Regeln offensichtlich. Die Überlegungen können auf Determinanten  $n$ -reihiger quadratischer Matrizen ausgeweitet werden.

Wie werden wohl Determinanten dreireihiger quadratischer Matrizen veranschaulicht?

# Cramersche Regel

Wir entwickeln eine Lösungsformel für Gleichungssysteme mit drei Variablen.

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 &= u_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 &= u_2 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 &= u_3 \end{aligned} \quad \text{oder} \quad A \vec{x} = \vec{u}$$

mit  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$

Eine mühsame Rechnung führt zu (Nenner ungleich Null vorausgesetzt):

$$x_1 = \frac{u_1 a_{22} a_{33} - u_1 a_{32} a_{23} - u_2 a_{12} a_{33} + u_2 a_{32} a_{13} + u_3 a_{12} a_{23} - u_3 a_{22} a_{13}}{a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{32} a_{23} - a_{21} a_{12} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{31} a_{12} a_{23} - a_{31} a_{22} a_{13}}$$

Übersichtlicher wird es mit der Determinantenschreibweise:

$$x_1 = \frac{u_1 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}{a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}$$

Wenn wir eine  $3 \times 3$  Determinante durch

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

definieren, ergibt sich schließlich

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & a_{12} & a_{13} \\ u_2 & a_{22} & a_{23} \\ u_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\det A} \quad \text{und analog} \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & u_1 & a_{13} \\ a_{21} & u_2 & a_{23} \\ a_{31} & u_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\det A}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & u_3 \end{vmatrix}}{\det A}$$

Nun ist die Regelmäßigkeit zu erkennen. Die sogenannten Unterdeterminanten ergeben sich durch Streichen von Zeilen und Spalten (welchen?).

Die Determinante wurde hier durch Entwicklung nach der 1. Spalte definiert. Jede andere Spalte oder Zeile wäre möglich gewesen, wobei sich die Vorzeichen gemäß des Schemas abwechseln.

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{array}$$

## Inverse Matrix $n = 2$

Die Lösungsformel für Gleichungssysteme  $A \vec{x} = \vec{u}$  mit zwei Variablen lautet, falls es eindeutig lösbar ist:

$$\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = u_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = u_2 \end{array}$$

---

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & a_{12} \\ u_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{u_1 a_{22} - u_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}} = \frac{u_1 a_{22} - u_2 a_{12}}{\det A}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & u_1 \\ a_{21} & u_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{a_{11} u_2 - a_{21} u_1}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}} = \frac{a_{11} u_2 - a_{21} u_1}{\det A}$$

Dies kann auch in Matrizenform geschrieben werden:  $\vec{x} = A^{-1} \vec{u}$  mit

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Setzen wir  $\vec{x} = A^{-1} \vec{u}$  in  $A \vec{x} = \vec{u}$  ein, so ergibt sich  $A A^{-1} \vec{u} = \vec{u}$  und damit  $A A^{-1} = E$

mit der Einheitsmatrix  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Nun wird auch die Schreibweise der zu  $A$  inversen Matrix  $A^{-1}$  verständlich.

$$\text{Beispiel: } A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

## Inverse Matrix $n = 3$

Nach dem Vorigen lautet die Lösung des linearen Gleichungssystems  $A \vec{x} = \vec{u}$  mit 3 Variablen, falls es eindeutig lösbar ist:

$$x_1 = \frac{1}{\det A} \left( u_1 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \right)$$

$$x_2 = \frac{1}{\det A} \left( -u_1 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + u_2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - u_3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \right)$$

$$x_3 = \frac{1}{\det A} \left( u_1 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \right)$$

Dies kann auch in Matrizenform geschrieben werden:  $\vec{x} = A^{-1} \vec{u}$  mit

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Setzen wir  $\vec{x} = A^{-1} \vec{u}$  in  $A \vec{x} = \vec{u}$  ein, so ergibt sich  $A A^{-1} \vec{u} = \vec{u}$  und damit  $A A^{-1} = E$

mit der Einheitsmatrix  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

$$\text{Beispiel: } A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 8 & -5 & 2 \\ -11 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

# Eigenwerte und Eigenvektoren

Es sei  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  eine quadratische Matrix. Durch Multiplikation mit  $A$  wird einem Vektor  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  ein Vektor  $\vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  zugeordnet. Die Abbildung lautet:  $A\vec{x} = \vec{u}$ .

Bei vielen Anwendungen stellt sich die Frage, ob ein Vektor  $\vec{x}$  existiert, der durch die Abbildung auf sich selbst oder auf ein Vielfaches von sich selbst abgebildet wird.

Es werden also Lösungen der Gleichung  $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$  bei gegebenen  $A$  gesucht.

Betrachten wir ein Beispiel. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Die Fragestellung führt auf das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= \lambda x \\ 2x - 2y &= \lambda y \end{aligned}$$

Um es zu lösen, formen wir um:

$$\begin{aligned} (3 - \lambda)x - 2y &= 0 \\ 2x - (2 + \lambda)y &= 0 \end{aligned}$$

Für dieses Gleichungssystem existiert eine triviale Lösung:  $x = 0$  und  $y = 0$ .

Eine nichttriviale Lösung existiert genau dann, wenn die Spaltenvektoren kollinear (linear abhängig) sind, die Determinante der Koeffizienten mithin verschwindet. Somit ist die Gleichung

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & -2 \\ 2 & -(2 + \lambda) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \quad \text{zu lösen,}$$

die die *charakteristische Gleichung* des Problems heißt. Die Lösungen, genannt *Eigenwerte*, sind

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 2$$

Zu jedem Eigenwert kann nun ein dazugehörige sogenannte Eigenvektor bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \text{Zu } \lambda_1 = -1 \text{ erhalten wir} \quad & 4x - 2y = 0 \\ & 2x - y = 0 \end{aligned}$$

Die beiden Gleichungen sind voneinander abhängig, eine von ihnen kann weggelassen werden.

Eine mögliche Lösung ist  $x_1 = 1$ ,  $y_1 = 2$ , zusammengefasst:  $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

Jedes Vielfache von  $\vec{x}_1$  wäre ebenfalls ein Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_1 = -1$ . Analog erhalten wir zum Eigenwert  $\lambda_2 = 2$  den Eigenvektor  $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  oder jedes Vielfachen davon.

## Eigenwerte Beispiel

Gesucht sind die Eigenwerte der Matrix  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & 10 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$

Zunächst ist  $\lambda$  von jedem Diagonalelement zu subtrahieren. Dies kann übersichtlich mit der Einheitsmatrix  $E$  durchgeführt werden:

$$(A - \lambda E) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & 10 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -2 & 8 \\ 0 & 10 - \lambda & -3 \\ 0 & 7 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Nun ist die Determinante der entstandenen Matrix gleich Null zu setzen:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 & 8 \\ 0 & 10 - \lambda & -3 \\ 0 & 7 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Entwickeln wir die Determinante nach der 1. Spalte, so ergibt sich

$$(1 - \lambda) \begin{vmatrix} 10 - \lambda & -3 \\ 7 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

und weiter

$$(1 - \lambda)(\lambda^2 - 10\lambda + 21) = 0$$

mit den Lösungen (Eigenwerten)

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 7$$

Für das charakteristische Polynom gilt für  $n = 2$ :  $p(\lambda) = \lambda^2 - \text{Spur } A \lambda + \det A$ , wobei die Spur einer Matrix die Summe der Elemente auf der Hauptdiagonalen (links oben bis rechts unten) ist.

Für  $n = 3$  gilt:  $p(\lambda) = -\lambda^3 + \text{Spur } A \lambda^2 - c\lambda + \det A$ ,

$$\text{hierbei ist für } A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} \quad c = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c \\ g & j \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & f \\ h & j \end{vmatrix}.$$