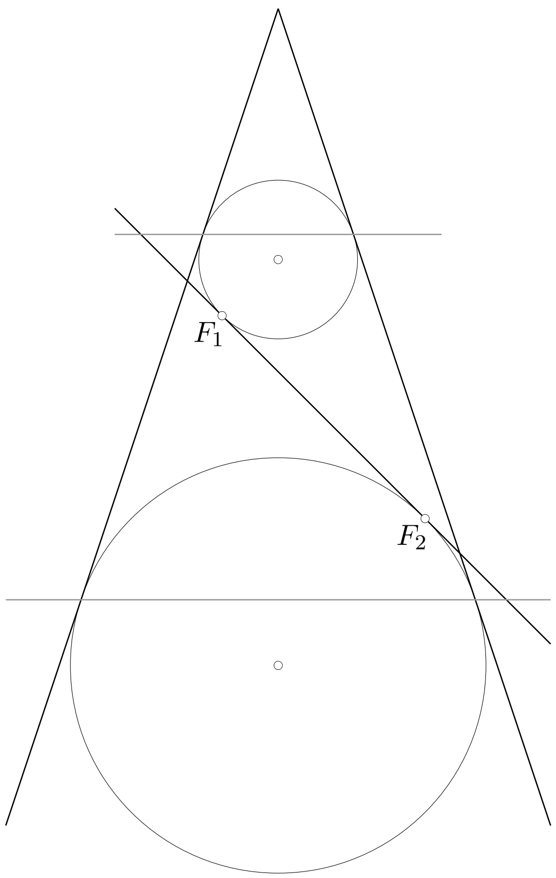
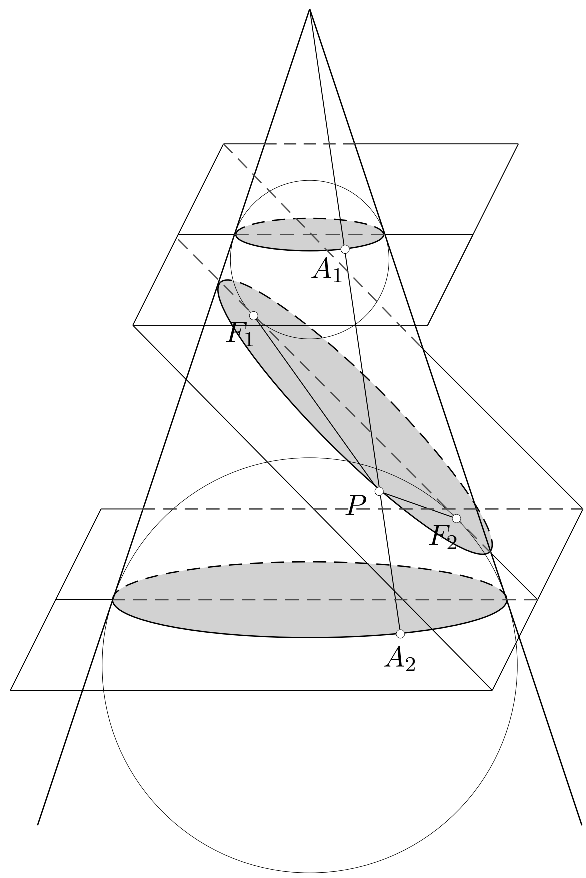
Ellipse

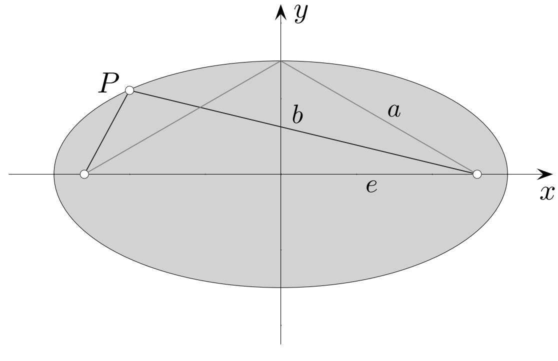
Beim Schnitt eines Kegels mit einer Ebene entstehen die Kurven Kreis, Ellipse, Parabel und Hyperbel. Wir untersuchen die Ellipse und denken uns in den Kegel zwei Kugeln derart gelegt, dass diese den Kegelmantel in je einem Kreis und die Schnittfläche von oben und unten in je einem Punkt F_1, F_2 berühren. Diese Kugeln nennt man nach dem belgischen Ingenieur Dandelin (1794-1847) *Dandelinsche Kugeln*. Die Berührpunkte F_1, F_2 heißen die Brennpunkte der Ellipse.



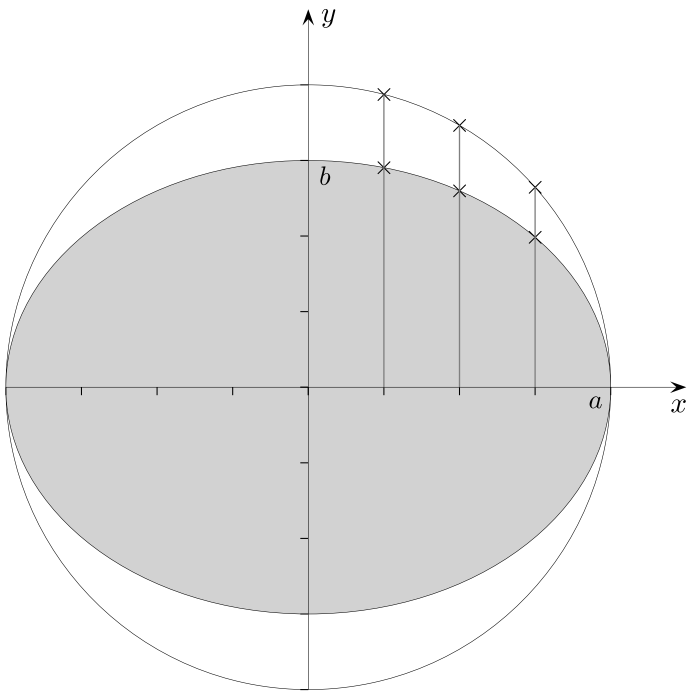


Es sei nun P ein beliebiger Ellipsenpunkt. Begründe:

1. Die Strecken $\overline{PF_1}$ und $\overline{PA_1}$ sowie $\overline{PF_2}$ und $\overline{PA_2}$ sind gleich lang.
2. Es gilt die Beziehung: $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{PA_1} + \overline{PA_2} = \overline{A_1A_2}$
3. Für jeden Ellipsenpunkt P ist die Summe der Abstände zu den Brennpunkten konstant.
4. In einem xy-Koordinatensystem seien die Brennpunkte $F_1(-e \mid 0)$ und $F_2(e \mid 0)$, die konstante Entfernungssumme sei $2a$. Dann gilt für einen beliebigen Ellipsenpunkt $P(x \mid y)$
   $\sqrt{(x+e)^2+y^2} + \sqrt{(x-e)^2+y^2} = 2a$.
   Nach zweimaligem Isolieren der Wurzel, Quadrieren und Abkürzen mit $b^2 = a^2 - e^2$ erhalten wir schließlich
   die Ellipsengleichung: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\,.$
5. Die Längen der Halbachsen sind a und b.



Ellipsengleichung



Die Ellipse ist ein gestauchter Kreis.

Aus der Kreisgleichung

$$x^2 + y^2 = a^2$$

erhalten wir die Funktionsgleichung für den oberen/unteren Halbkreis:

$$y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$$

Die y-Werte werden nun mit $\frac{b}{a}$ multipliziert.

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Durch Quadrieren und Umformen erhalten wir die Ellipsengleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$