Gauß-Verfahren zur Lösung von Gleichungssystemen

Mit dieser Vorgehensweise können Gleichungssysteme (auch unbestimmte) übersichtlich gelöst werden.

$$
\begin{array}{ll}
(1) & 2x - 3y + z = -2 \\
(2) & x - 4y - 2z = 4 \\
(3) & 3x + y + 2z = 1
\end{array}
$$

Wir schreiben das Koeffizientenschema auf:

x	y	z	
2	−3	1	−2
1	−4	−2	4
3	1	2	1

Schrittweises Umformen soll eine Dreiecksform ergeben:

x	y	z	
$*$	$*$	$*$	$*$
0	$*$	$*$	$*$
0	0	$*$	$*$

Aus ihr kann die Lösung durch rückwärtiges Einsetzen ermittelt werden.

Die folgende Umformungen sind erlaubt.
Zeilen darf man

1) vertauschen
2) mit einer Zahl multiplizieren
3) durch eine Zahl dividieren
4) addieren (subtrahieren ist nicht zu empfehlen).

Es ist ratsam, Brüche zu vermeiden (durch Multiplikation mit dem Hauptnenner).

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
(1) & 2x & - & 3y & + & z & = & -2 \\
(2) & x & - & 4y & - & 2z & = & 4 \\
(3) & 3x & + & y & + & 2z & = & 1
\end{array}
$$

Koeffizientenschema:

$$
\begin{array}{rrr|r}
x & y & z & \\
\hline
2 & -3 & 1 & -2 \\
1 & -4 & -2 & 4 \\
3 & 1 & 2 & 1
\end{array}
$$

Dreiecksform:

$$
\begin{array}{rrr|r}
x & y & z & \\
\hline
3 & 1 & 2 & 1 \\
0 & 13 & 8 & -11 \\
0 & 0 & 1 & -3
\end{array}
$$

$x = 2, \quad y = 1, \quad z = -3$

Gegeben ist das Gleichungssystem:

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
(1) & 2x & + & 3y & + & 5z & = & 13 \\
(2) & -2x & + & 2y & & & = & -8 \\
(3) & & & y & + & z & = & 2
\end{array}
$$

a) Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem keine Lösung hat.

b) Es gibt eine Zahl, durch die man die Zahl 2 auf der rechten Seite der dritten Gleichung ersetzen kann, so dass das geänderte Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat. Geben Sie diese Zahl an und begründen sie Ihre Antwort.

Gegeben ist das Gleichungssystem:

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
(1) & 2x & + & 3y & + & 5z & = & 13 \\
(2) & -2x & + & 2y & & & = & -8 \\
(3) & & & y & + & z & = & 2
\end{array}
$$

a) Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem keine Lösung hat.

b) Es gibt eine Zahl, durch die man die Zahl 2 auf der rechten Seite der dritten Gleichung ersetzen kann, so dass das geänderte Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat. Geben Sie diese Zahl an und begründen sie Ihre Antwort.

a) Dreiecksform mit Zwischenstufen:

$$
\begin{array}{rrr|r}
x & y & z & \\
\hline
2 & 3 & 5 & 13 \\
-2 & 2 & 0 & -8 \\
0 & 1 & 1 & 2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrr|r}
x & y & z & \\
\hline
2 & 3 & 5 & 13 \\
0 & 5 & 5 & 5 \\
0 & 1 & 1 & 2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrr|r}
x & y & z & \\
\hline
2 & 3 & 5 & 13 \\
0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & -1
\end{array}
$$

Das Gleichungssystem enthält einen Widerspruch, $\mathbb{L} = \{\ \}$.

b) Wird in Zeile (3) die 2 durch eine 1 ersetzt, beschreibt die Matrix

$$
\begin{array}{rrr|r}
x & y & z & \\
\hline
2 & 3 & 5 & 13 \\
0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

ein unterbestimmtes Gleichungssystem.

Ohne GTR

1. Gegeben ist das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
(1) & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 23 \\
(2) & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 10 \\
(3) & & & x_2 & + & 2x_3 & = & 13 \\
(4) & & & x_2 & + & x_3 & = & 8
\end{array}$$

   a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems.

   b) Eine der letzten beiden Gleichungen des Gleichungssystems kann weggelassen werden, ohne dass sich die Lösungsmenge ändert.
   Geben Sie diese Gleichung an und begründen Sie Ihre Angabe.

2. Gegeben ist das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
(1) & -x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = & -1 \\
(2) & & + & 3x_2 & + & x_3 & = & -2 \\
(3) & & & -3x_2 & + & 2x_3 & = & 5
\end{array}$$

   a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems.

   b) Dem Gleichungssystem soll eine vierte Gleichung der Form (4) $ax_1 + 4x_2 + 2x_3 = 2$ hinzugefügt werden, ohne dass sich die Lösungsmenge ändert.
   Geben Sie den geeigneten Wert von a an und begründen Sie Ihre Angabe.

Ohne GTR

1. Gegeben ist das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
(1) & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 23 \\
(2) & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 10 \\
(3) & & & x_2 & + & 2x_3 & = & 13 \\
(4) & & & x_2 & + & x_3 & = & 8
\end{array}$$

   a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems. $L = \{(2;3;5)\}$

   b) Eine der letzten beiden Gleichungen des Gleichungssystems kann weggelassen werden, ohne dass sich die Lösungsmenge ändert.
   Geben Sie diese Gleichung an und begründen Sie Ihre Angabe.

   $(3) = (1) - (2)$

   (3) kann weggelassen werden.

2. Gegeben ist das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
(1) & -x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = & -1 \\
(2) & & + & 3x_2 & + & x_3 & = & -2 \\
(3) & & & -3x_2 & + & 2x_3 & = & 5
\end{array}$$

   a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems. $L = \{(2;-1;1)\}$

   b) Dem Gleichungssystem soll eine vierte Gleichung der Form (4) $ax_1 + 4x_2 + 2x_3 = 2$ hinzugefügt werden, ohne dass sich die Lösungsmenge ändert.
   Geben Sie den geeigneten Wert von a an und begründen Sie Ihre Angabe.

   $a = 2$

   $(1) \cdot (-2) = (4)$