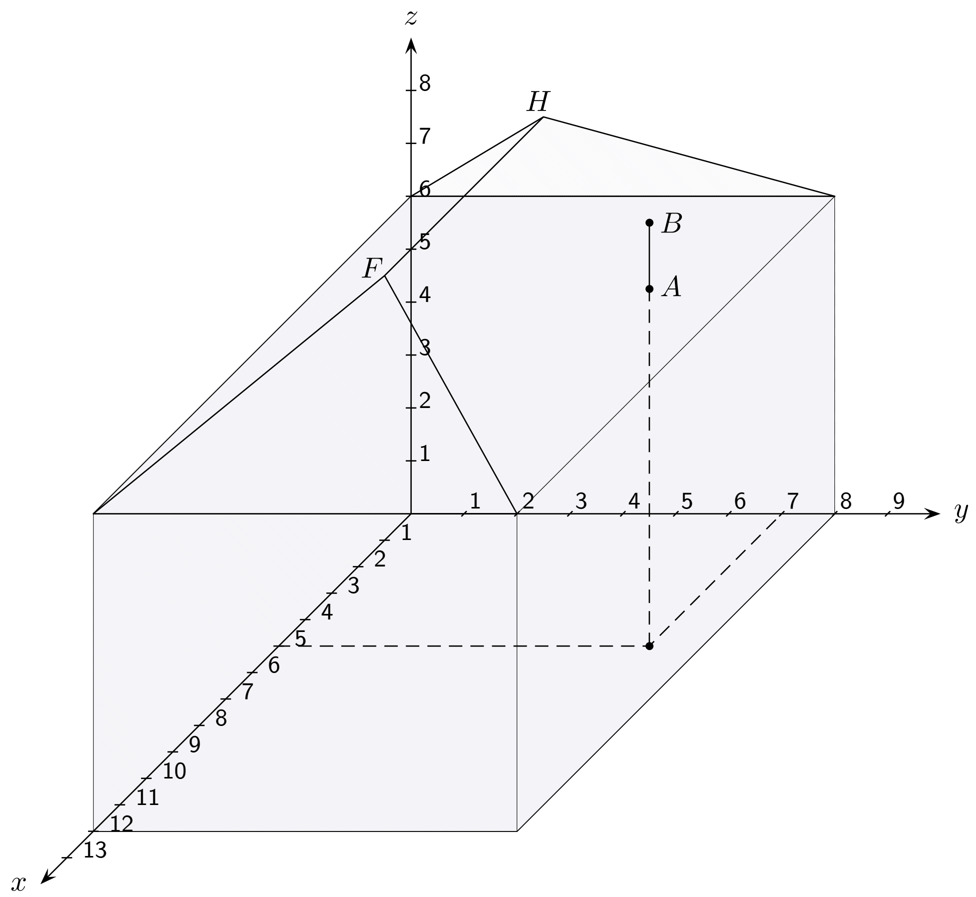
Aufgaben Vektorrechnung

Vektorrechnung Haus-Aufgabe



Der First des Walmdaches hat die Endpunkte $F(9\,|\,4\,|\,9)$ und $H(3\,|\,4\,|\,9)$ (in m).

a) Bestimmen Sie das Volumen des Hauses, einschließlich des Dachraumes.

b) Ermitteln Sie die Größe des Winkels, den eine kleine Dachfläche mit einer großen einschließt.

c) Ein $8\,m$ langes Abluftrohr (vom Boden aus gemessen) durchstößt das Dach im Punkt A und endet in B. Berechnen Sie die Koordinaten von A, sowie den Abstand von B zur Dachfläche, in der A liegt.

Haus-Aufgabe Ergebnisse

a) $V = 696\,m^3$

b) große Dachfläche: $3y + 4z = 48,$ kleine Dachfläche: $x + z = 18,$ $\alpha = 55{,}6°$

c) $A(5\,|\,7\,|\,6{,}75),$ $d = 1\,m$

Prisma-Aufgabe

Gegeben sind ein dreiseitiges Prisma $ABCDEF$ durch die Eckpunkte $A(12 \mid 0 \mid 0)$, $B(12 \mid 6 \mid 0)$, $C(0 \mid 6 \mid 0)$, $D(0 \mid 0 \mid 0)$, $E(12 \mid 0 \mid 3)$, $F(0 \mid 0 \mid 3)$ sowie die Gerade g durch die Punkte $G(6 \mid 8 \mid 5)$ und $H(6 \mid 6 \mid 3)$.

a) Stellen Sie das Prisma $ABCDEF$ in einem kartesischen Koordinatensystem dar.

b) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes und den Schnittwinkel der Geraden g mit der Ebene $BCFE$.

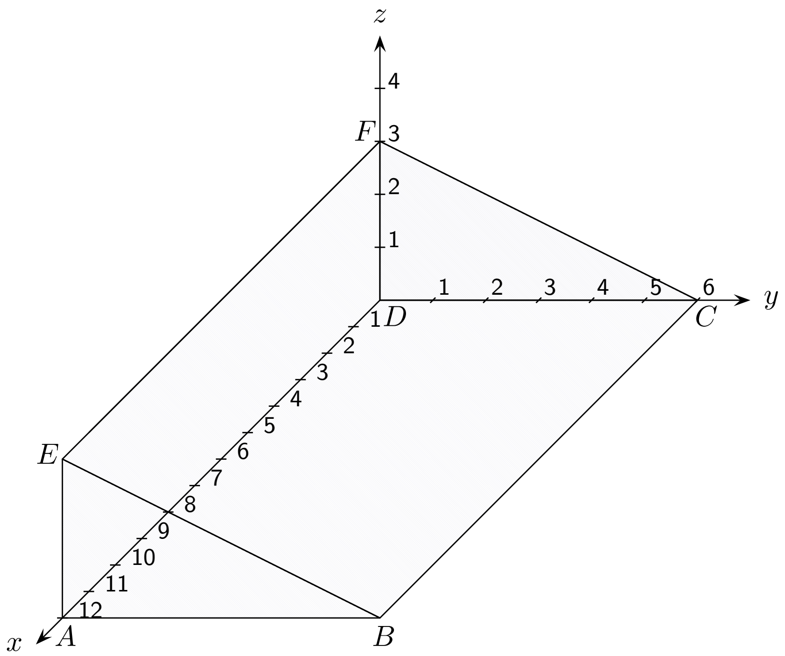
c) Berechnen Sie den Abstand des Punktes G von der Geraden EF.

d) Gegeben ist eine Ebenenschar E_k durch die Gleichung $x+ky = 12$, $k \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass alle Ebenen dieser Schar durch A und E gehen. Genau eine Ebene dieser Schar verläuft durch den Mittelpunkt der Strecke $\overline{CD}$. Bestimmen Sie den Wert von k für diese Ebene.

e) Auf der Strecke $\overline{BC}$ liegt ein Punkt $P(a \mid 6 \mid 0)$, so dass das Volumen der dreiseitigen Pyramide $PBDF$ genau 9 Volumeneinheiten beträgt. Berechnen Sie a.

Prisma-Aufgabe   Ergebnisse

a)



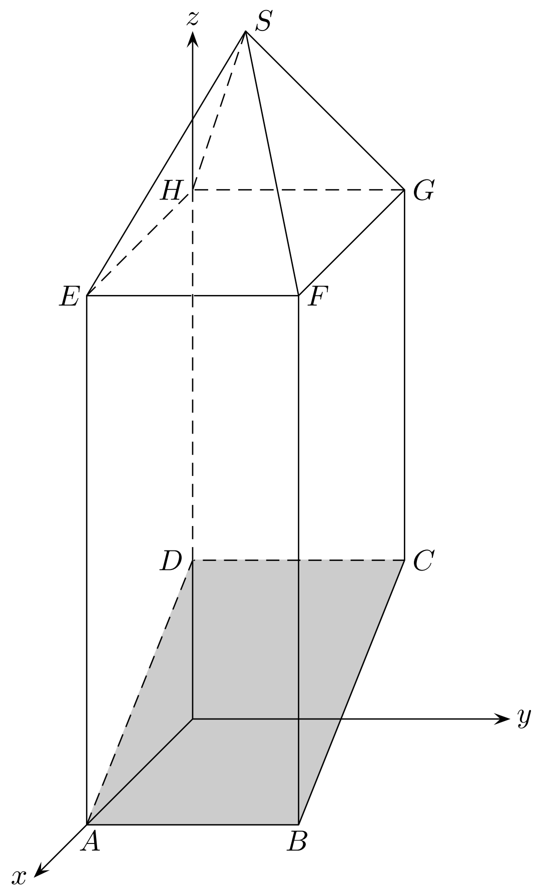
b) $S(6\,|\,4\,|\,1)$, $\alpha = 71{,}6°$

c) $d = 8{,}25\ LE$

d) $k = 4$

e) $a = 9$

Turm-Aufgabe



An einem Hang wird ein Turm errichtet. Dieser Turm kann als ein von einer Ebene geschnittener Quader mit aufgesetzter gerader Pyramide aufgefasst werden. Die Höhe der aufgesetzten Pyramide beträgt $4\,m$. Folgende Punkte sind bekannt: $A(4\,|\,0\,|\,0)$, $B(4\,|\,4\,|\,0)$, $D(0\,|\,0\,|\,3)$, $F(4\,|\,4\,|\,10)$ und $H(0\,|\,0\,|\,10)$ (in m).

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte C, E, G und S.

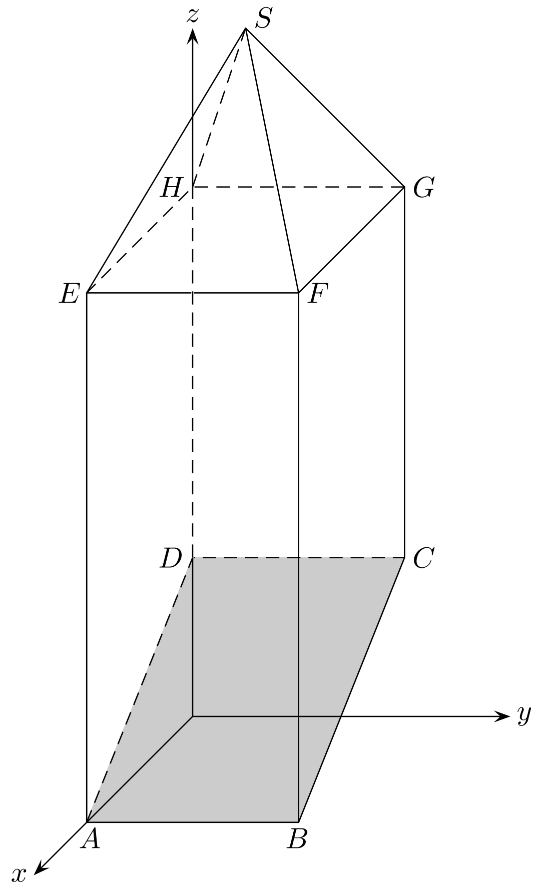
b) Der Steilhang liegt in der Ebene, die durch die Punkte A, B, C und D geht. Stellen Sie eine Gleichung dieser Ebene in Koordinatenform auf.

c) Ein Sonnenstrahl, dessen Richtung durch den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ beschrieben werden kann, erzeugt auf dem Hang im Punkt S' einen Schatten der Turmspitze S. Bestimmen Sie die Koordinaten des Schattenpunktes S' und berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem der Sonnenstrahl auf den Hang trifft.

d) An den Punkten F und H wird ein $6\,m$ langes Seil befestigt. Genau in die Mitte T des durchhängenden Seiles wird eine schwere Lampe gehängt. Bestimmen Sie die Koordinaten des tiefsten Punktes des Seiles.

e) Zur besseren Stabilisierung soll der Turm am Eckpunkt H durch ein möglichst kurzes Stahlseil mit dem Berghang verbunden werden. Bestimmen Sie die minimale Länge des Stahlseils.

Turm-Aufgabe



An einem Hang wird ein Turm errichtet. Dieser Turm kann als ein von einer Ebene geschnittener Quader mit aufgesetzter gerader Pyramide aufgefasst werden. Die Höhe der aufgesetzten Pyramide beträgt $4\,m$. Folgende Punkte sind bekannt: $A(4\,|\,0\,|\,0)$, $B(4\,|\,4\,|\,0)$, $D(0\,|\,0\,|\,3)$, $F(4\,|\,4\,|\,10)$ und $H(0\,|\,0\,|\,10)$ (in m).

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte C, E, G und S.
$C(0\,|\,4\,|\,3),\ E(4\,|\,0\,|\,10),\ G(0\,|\,4\,|\,10),\ S(2\,|\,2\,|\,14)$

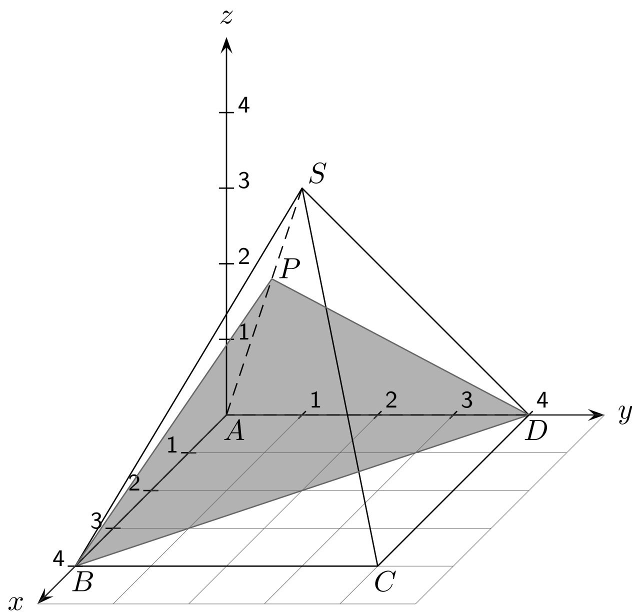
b) Der Steilhang liegt in der Ebene, die durch die Punkte A, B, C und D geht. Stellen Sie eine Gleichung dieser Ebene in Koordinatenform auf. $3x + 4z = 12$

c) Ein Sonnenstrahl, dessen Richtung durch den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ beschrieben werden kann, erzeugt auf dem Hang im Punkt S' einen Schatten der Turmspitze S. Bestimmen Sie die Koordinaten des Schattenpunktes S' und berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem der Sonnenstrahl auf den Hang trifft. $S'(-8\,|\,7\,|\,9),\ \alpha = 54{,}7°$

d) An den Punkten F und H wird ein $6\,m$ langes Seil befestigt. Genau in die Mitte T des durchhängenden Seiles wird eine schwere Lampe gehängt. Bestimmen Sie die Koordinaten des tiefsten Punktes des Seiles. $T(2\,|\,2\,|\,9)$ (Pythagoras)

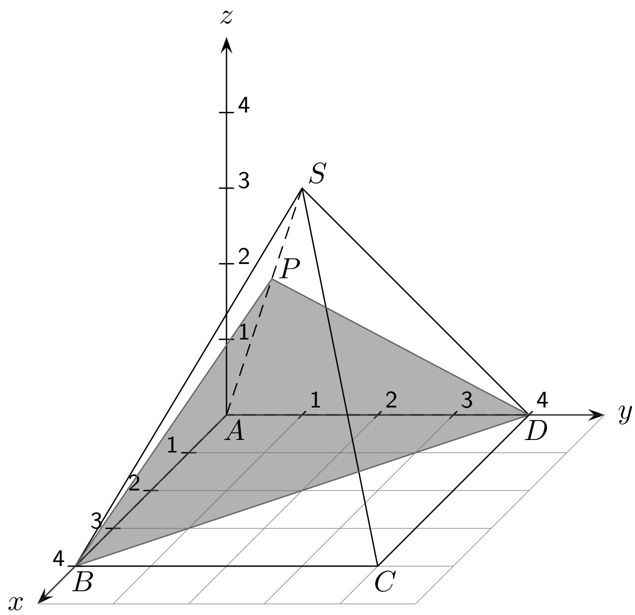
e) Zur besseren Stabilisierung soll der Turm am Eckpunkt H durch ein möglichst kurzes Stahlseil mit dem Berghang verbunden werden. Bestimmen Sie die minimale Länge des Stahlseils. $5{,}6\,m$

Pyramide



Gegeben ist eine quadratische Pyramide mit der Spitze $S(2\,|\,2\,|\,4)$.
Die Pyramide wird von Ebenen E_P geschnitten, die durch B, D und P verlaufen,
P liegt auf der Kante AS.
Für welchen Punkt P ist der Winkel $\measuredangle BPD$ maximal?
Gibt es mehrere Punkte P, für die der Winkel $\measuredangle BPD$ 90° beträgt?

Pyramide



Gegeben ist eine quadratische Pyramide mit der Spitze $S(2\,|\,2\,|\,4)$.
Die Pyramide wird von Ebenen E_P geschnitten, die durch B, D und P verlaufen,
P liegt auf der Kante AS.
Für welchen Punkt P ist der Winkel $\measuredangle BPD$ maximal?

$$P_\lambda(2\lambda\,|\,2\lambda\,|\,4\lambda)$$

$$\cos\alpha = \frac{3\lambda^2 - 2\lambda}{3\lambda^2 - 2\lambda + 2}$$

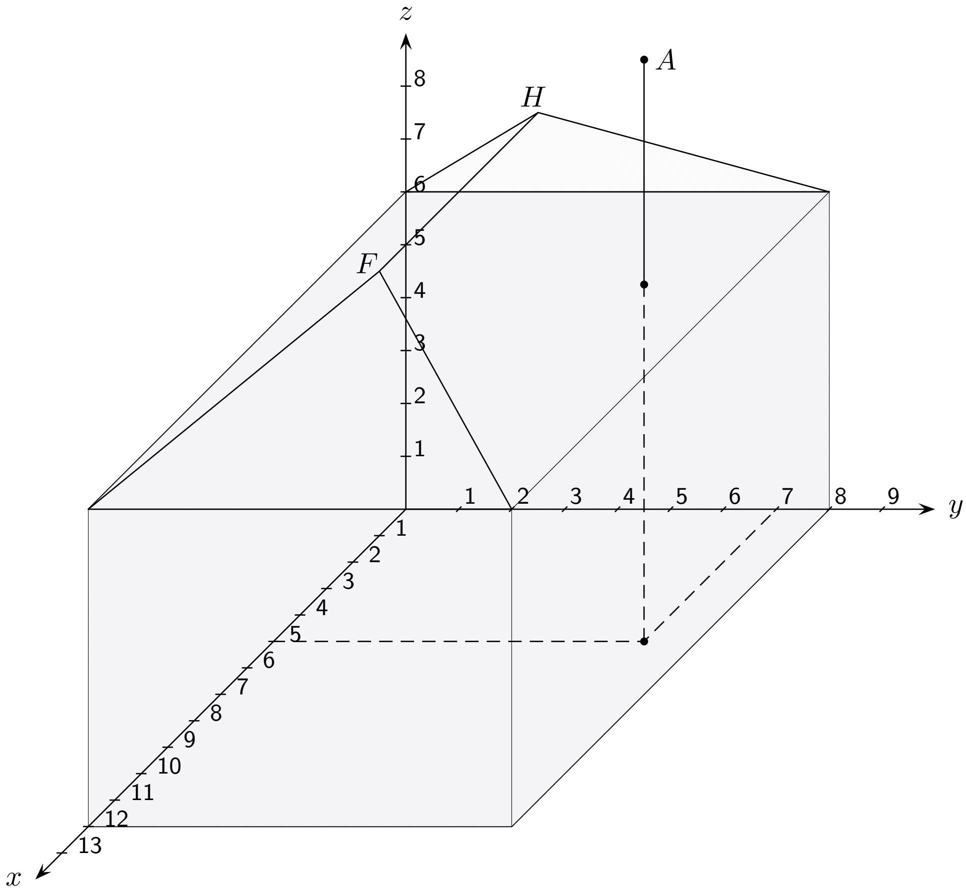
$$\alpha_{\max} = 101{,}5^\circ \text{ für } \lambda = \frac{1}{3}$$

Gibt es mehrere Punkte P, für die der Winkel $\measuredangle BPD$ 90° beträgt?

$$\cos\alpha = 0$$

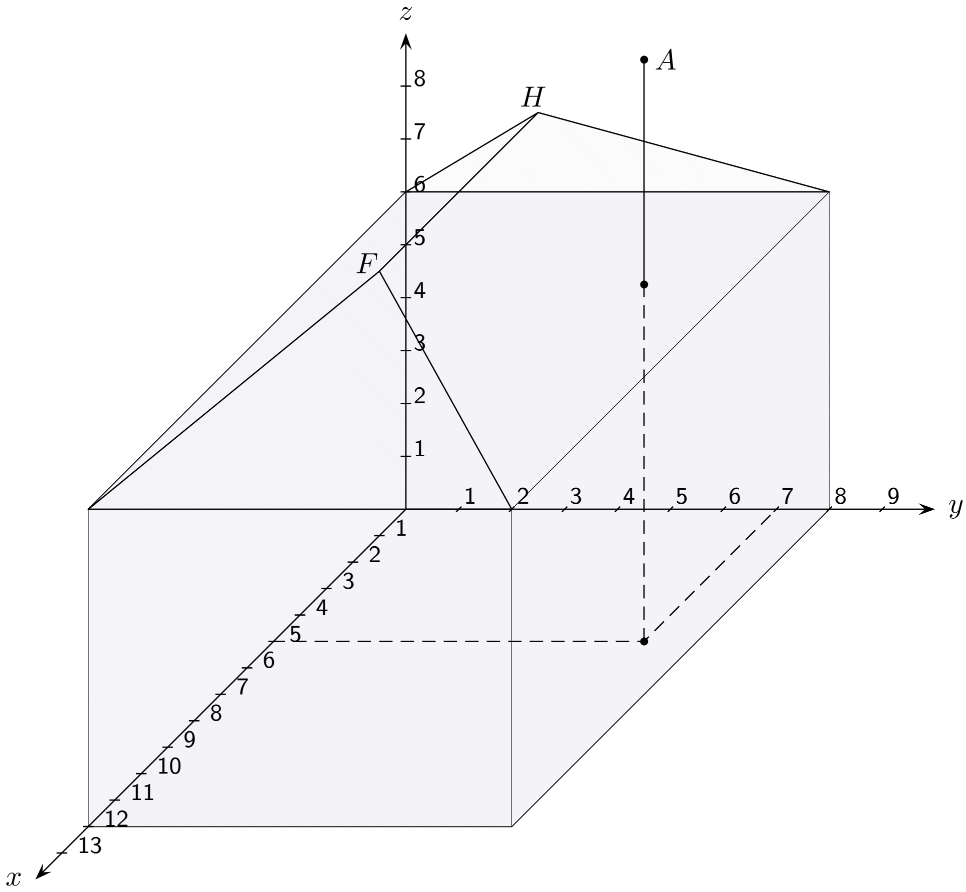
$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \frac{2}{3}$$

Antennenmast



Der First des Walmdaches hat die Endpunkte $F(9\,|\,4\,|\,9)$ und $H(3\,|\,4\,|\,9)$ (in m).
In A endet ein Antennenmast in $11\,m$ Höhe.
Wieviel ist vom Antennenmast vom Punkt $C(10\,|\,9\,|\,2)$ aus zu sehen?

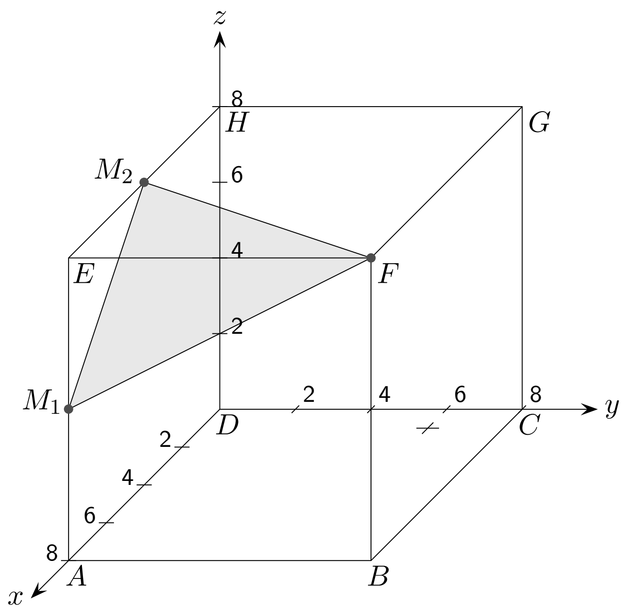
Antennenmast



Der First des Walmdaches hat die Endpunkte $F(9\,|\,4\,|\,9)$ und $H(3\,|\,4\,|\,9)$ (in m).
In A endet ein Antennenmast in $11\,m$ Höhe.
Wieviel ist vom Antennenmast vom Punkt $C(10\,|\,9\,|\,2)$ aus zu sehen?

Die x-Koordinate von C hat keinen Einfluss auf das Ergebnis.
Die Aufgabe kann mit einer Strahlensatzfigur gelöst werden.
Alternativ wird die Ebene, auf der die Punkte C, $P(12\,|\,8\,|\,6)$ und $Q(0\,|\,8\,|\,6)$ liegen, mit der Geraden, die durch A und parallel zur z-Achse verläuft, geschnitten.
Die Ebenengleichung lautet $4y + z = 38$, der Schnittpunkt ist $S(5\,|\,7\,|\,10)$.
Es ist daher 1 Meter vom Mast zu sehen.

Segeltuch



In einem würfelförmigen Ausstellungsraum mit der Kantenlänge 8 Meter ist ein dreieckiges Segeltuch aufgespannt. Es ist im Punkt F sowie in den Kantenmitten M_1 und M_2 befestigt (siehe Abbildung).
Es wird angenommen, dass das Segeltuch nicht durchhängt. In einem Koordinatensystem stellen die Punkte $A(8\,|\,0\,|\,0)$, $C(0\,|\,8\,|\,0)$ und $H(0\,|\,0\,|\,8)$ die entsprechenden Ecken des Raumes dar.

a) Bestimmen Sie eine Parametergleichung und eine Koordinatengleichung der Ebene S, in der das Segeltuch liegt. [mögliches Ergebnis: $S\colon\ 2x - y + 2z = 24$]
Zeigen Sie, dass das Segeltuch die Form eines gleichschenkligen Dreiecks hat.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Segeltuchs.
Ermitteln Sie den Abstand des Segeltuchs von der Ecke E.
Bestimmen Sie den Anteil des Volumens oberhalb des Segeltuches zum Gesamtvolumen des Raumes.
Ermitteln Sie den Winkel, den die Ebene S mit dem Boden des Ausstellungsraums einschließt.

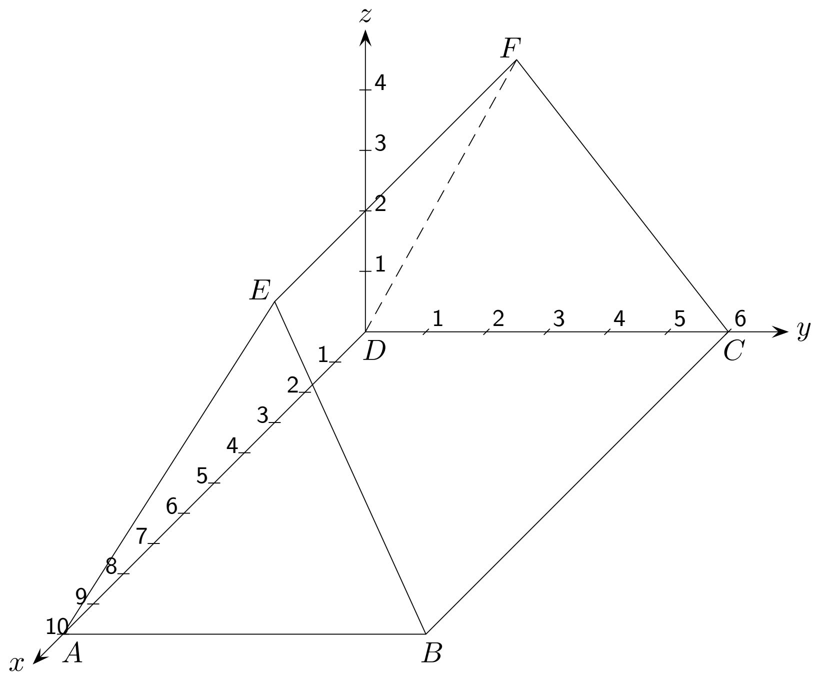
b) Auf der Diagonale AC steht eine 6 Meter hohe Stange senkrecht auf dem Boden. Der obere Teil der Stange berührt das Segeltuch. Ermitteln Sie die Stelle auf dem Boden, wo sich das untere Ende der Stange befindet.

c) Die Markierung (s. Abbildung) auf dem Boden ist 1 Meter von der hinteren Wand $DCGH$ und 2 Meter von der Wand $BCGF$ entfernt. Dort ist in einer Höhe von 2 Meter ein Laserpointer in Richtung $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$ angebracht. Untersuchen Sie, ob der Laserstrahl das Segeltuch trifft.

d) Wir nehmen nun an, dass der Ausstellungsraum mit dem Segeltuch nur aus Kanten besteht, ohne Wände. Der Raum befindet sich im Freien und die Richtung der Sonnenstrahlen ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Weisen Sie nach: Der Schatten des Segeltuchs ist nur eine Strecke.
Berechnen Sie die Länge dieser Strecke.

e) Berechnen Sie den Winkel, den das Segeltuch im Punkt M_1 bildet.
Stellen Sie sich nun die Spitze des Segeltuches in M_1 auf der Kante $\overline{AE}$ beweglich vor.
Dabei wird das Segeltuch auf der Stange $\overline{M_2F}$ aufgerollt, so dass es straff gespannt bleibt.
Ermitteln Sie den minimalen Winkel in M_1.
Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass für einen Punkt M_1 der Winkel 60° beträgt.

Walmdach

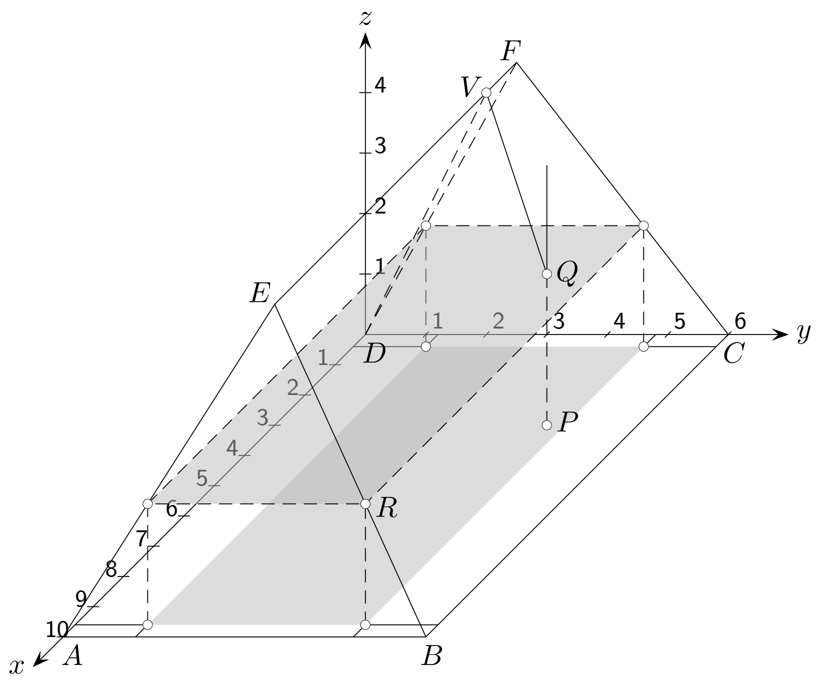


Das Walmdach eines Hauses wird durch die Punkte $A(10\,|\,0\,|\,0)$, $B(10\,|\,6\,|\,0)$, $C(0\,|\,6\,|\,0)$, $D(0\,|\,0\,|\,0)$, $E(9\,|\,3\,|\,5)$ und $F(1\,|\,3\,|\,5)$ beschrieben (Koordinatenangaben in Meter).

a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, in der die Dachfläche ABE liegt.
Berechnen Sie den Flächeninhalt der Dachfläche ABE.
Die Dachfläche $BCFE$ liegt in der Ebene E: $5y + 3z = 30$.
Berechnen Sie den Winkel zwischen den beiden Dachflächen ABE und $BCFE$.

b) Das Dachgeschoss des Hauses soll ausgebaut werden.
Als vollwertige Wohnfläche gilt nur die Fläche des Dachgeschosses, über der die Raumhöhe mindestens 2 m beträgt. Ermitteln Sie den Flächeninhalt der vollwertigen Wohnfläche.

c) Im Punkt $P(3\,|\,4{,}5\,|\,0)$ steht senkrecht zum Dachboden ein Antennenmast.
Der Mast durchstößt das Dach im Punkt Q. Von Q aus soll ein möglichst kurzes Antennenkabel über das Dach zum Punkt D gezogen werden. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes, in dem das Kabel den Dachfirst EF überquert. Wie lang ist dieses Kabel?



Das Walmdach eines Hauses wird durch die Punkte $A(10\,|\,0\,|\,0)$, $B(10\,|\,6\,|\,0)$, $C(0\,|\,6\,|\,0)$, $D(0\,|\,0\,|\,0)$, $E(9\,|\,3\,|\,5)$ und $F(1\,|\,3\,|\,5)$ beschrieben (Koordinatenangaben in Meter).

a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, in der die Dachfläche ABE liegt.
Berechnen Sie den Flächeninhalt der Dachfläche ABE. $A_{\mathrm{D}} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{26}$ 15,3 m^2
Die Dachfläche $BCFE$ liegt in der Ebene E: $5y + 3z = 30$.
Berechnen Sie den Winkel zwischen den beiden Dachflächen ABE und $BCFE$. $\beta = 95{,}8°$

Der Schnittwinkel der Ebenen, in denen die Dachflächen enthalten sind, beträgt $\beta = 84{,}2°$.

Die Dachflächen schließen den Winkel $\alpha = 180° - 84{,}2° = 95{,}8°$ ein $(\alpha > 90°)$.

b) Das Dachgeschoss des Hauses soll ausgebaut werden.
Als vollwertige Wohnfläche gilt nur die Fläche des Dachgeschosses, über der die Raumhöhe mindestens 2 m beträgt. Ermitteln Sie den Flächeninhalt der vollwertigen Wohnfläche.

Denke dir eine in 2 m Höhe eingezogene Decke.

Es genügt (Symmetrie), den Schnittpunkt R der Kante BE mit der Ebene $z = 2$ zu bestimmen.

$R(9{,}6\,|\,4{,}8\,|\,2)$

$a = 4{,}8 - (6 - 4{,}8) = 3{,}6$

$b = 9{,}6 - (10 - 9{,}6) = 9{,}2$

$A = a \cdot b = 33{,}12$ [m^2]

c) Im Punkt $P(3\,|\,4{,}5\,|\,0)$ steht senkrecht zum Dachboden ein Antennenmast.
Der Mast durchstößt das Dach im Punkt Q. Von Q aus soll ein möglichst kurzes Antennenkabel über das Dach zum Punkt D gezogen werden. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes, in dem das Kabel den Dachfirst EF überquert. Wie lang ist dieses Kabel?

Der Schnitt einer senkrechten Geraden durch P mit der Ebene E ergibt $Q(3\,|\,4{,}5\,|\,2{,}5)$.

Ein Punkt V auf dem First hat die Koordinaten $V(1 + s\,|\,3\,|\,5)$ mit $0 \le s \le 8$.

Länge des Kabels: $d(s) = |\overrightarrow{QV}| + |\overrightarrow{DV}| = \sqrt{(1+s)^2 + 34} + \sqrt{(2-s)^2 + 8{,}5}$

Minimum für $s = 1$ mit $d_{\min} = 9{,}25$ [m]

$V(2\,|\,3\,|\,5)$

Alternativ: Eine Projektion in die xy-Ebene führt zum Schnitt der Geraden $y = \dfrac{4{,}5}{3}x$ und $y = 3$ mit $x = 2$. Alternativ: V liegt in der Ebene DPQ.