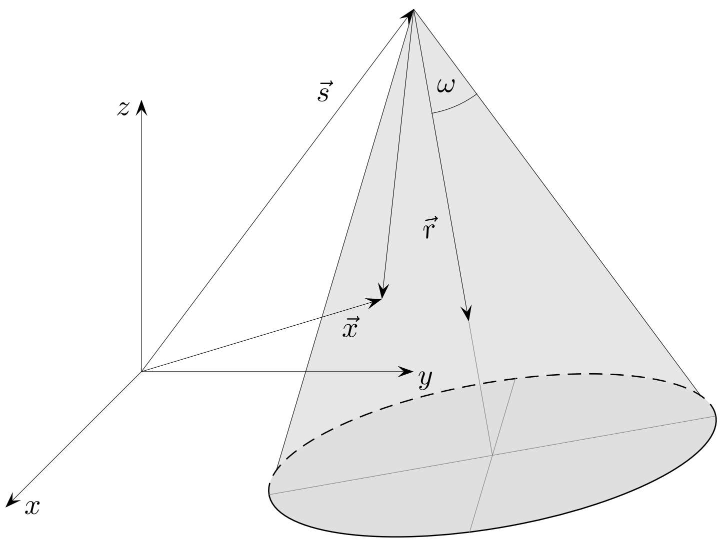
Kegelschnitte



Die allgemeine Kegelgleichung lautet:

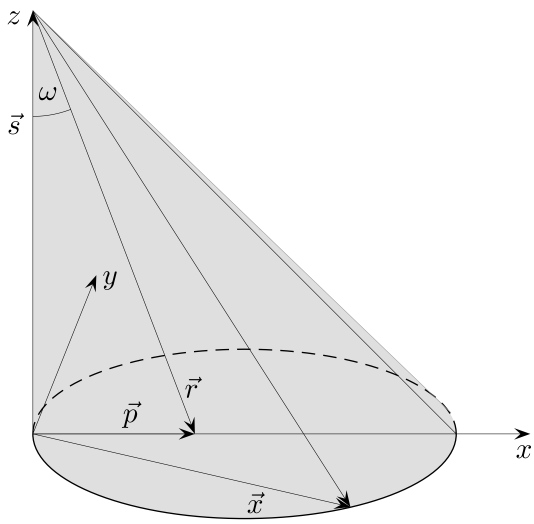
$(\vec{x} - \vec{s}) \cdot \vec{r} \; = |\, \vec{x} - \vec{s}\,| \cdot |\, \vec{r}\,| \cdot \cos\omega$

Beispiel: $\omega = 60°, \quad \vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

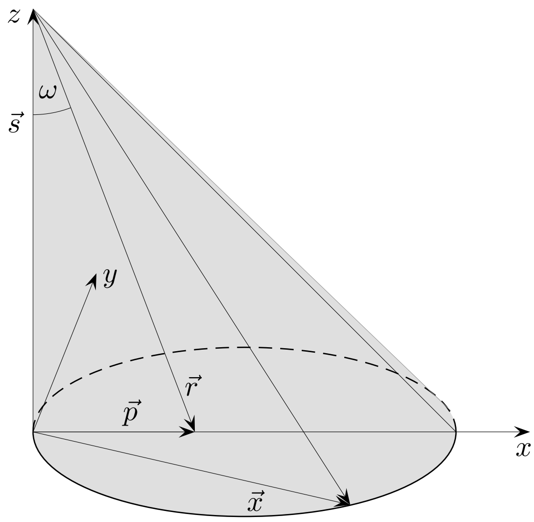
Kegelgleichung: $x^2 + y^2 - 3z^2 + 6z = 3$

Schnitt mit der xy-Ebene: $x^2 + y^2 = 3$

Wir wollen auch die Gleichungen der Kurven ermitteln, die beim schrägen Schnitt eines Kegels mit einer Ebene auftreten. Als Kegel wählen wir einen sogenannten Steilkegel (Mantellinie auf der z-Achse), als Ebene die xy-Ebene.



Kegelschnitte



$$\begin{aligned}
-\vec{s}\,\vec{r} &= |\,\vec{s}\,|\cdot|\,\vec{r}\,|\cdot\cos\omega \\
(\vec{x}-\vec{s})\,\vec{r} &= |\,\vec{x}-\vec{s}\,|\cdot|\,\vec{r}\,|\cdot\cos\omega \\
\frac{-\vec{s}\,\vec{r}}{|\,\vec{s}\,|\cdot|\,\vec{r}\,|} &= \frac{(\vec{x}-\vec{s})\,\vec{r}}{|\,\vec{x}-\vec{s}\,|\cdot|\,\vec{r}\,|} && |\ \cdot|\,\vec{r}\,|,\ \ \vec{r}=\vec{p}-\vec{s},\ \ \vec{s}\perp\vec{p} \\
\frac{\vec{s}^{\,2}}{|\,\vec{s}\,|} &= \frac{(\vec{x}-\vec{s})\cdot(\vec{p}-\vec{s})}{\sqrt{(\vec{x}-\vec{s})^2}} && |\ \ |\,\vec{s}\,|=\sqrt{\vec{s}^{\,2}},\ \ |\,\vec{s}\,|^2=\vec{s}^{\,2},\ \ \vec{x}\perp\vec{s} \\
|\,\vec{s}\,| &= \frac{\vec{x}\cdot\vec{p}+\vec{s}^{\,2}}{\sqrt{\vec{x}^{\,2}+\vec{s}^{\,2}}} && |\ \ (\ \ )^2 \\
\vec{x}^{\,2}-\frac{(\vec{x}\cdot\vec{p})^2}{\vec{s}^{\,2}} &= 2\,\vec{x}\cdot\vec{p} && |\ \ \vec{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix},\ \ \vec{p}=\begin{pmatrix}p\\0\\0\end{pmatrix},\ \ \vec{s}=\begin{pmatrix}0\\0\\s\end{pmatrix} \\
\dots & && |\ \ \epsilon=\frac{p}{s}
\end{aligned}$$

Scheitelform: $$y^2 = 2\,x\,p\ -\ (1-\epsilon^2)\,x^2$$

Parabel	für	$\epsilon^2 = 1$	*paraballein*	gr. gleichsetzen
Ellipse		$\epsilon^2 < 1$	*elleipein*	fehlenlassen
Hyperbel		$\epsilon^2 > 1$	*hyperballein*	übertreffen

Die Quadratfläche y^2 wird mit der Rechteckfläche $2p\,x$ verglichen.

1. Von einem Kegel sind gegeben:

   $$\vec{s}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\0\\\sqrt{3}\end{pmatrix},\quad \vec{r}=\begin{pmatrix}1\\0\\-\sqrt{3}\end{pmatrix},\qquad \omega=30^\circ$$

   Ermittle die Gleichung der Schnittkurve mit der xy-Ebene.

2. Von einem Steilkegel sind gegeben:

   $$\vec{s}=\begin{pmatrix}0\\0\\\sqrt{3}\end{pmatrix},\quad \vec{p}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

   Ermittle die Gleichung der Schnittkurve mit der xy-Ebene, ohne die Formel für die Scheitelform zu benutzen. Verschiebe die Schnittkurve so, dass eine symmetrische Form entsteht.

Kegelschnitte Kurzfassung

Die allgemeine Kegelgleichung lautet:

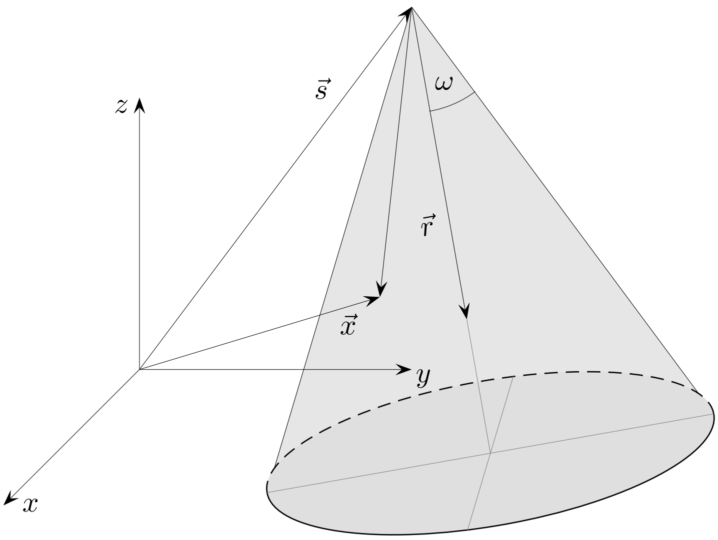
$(\vec{x}-\vec{s})\cdot\vec{r} = |\,\vec{x}-\vec{s}\,|\cdot|\,\vec{r}\,|\cdot\cos\omega$

Beispiel:

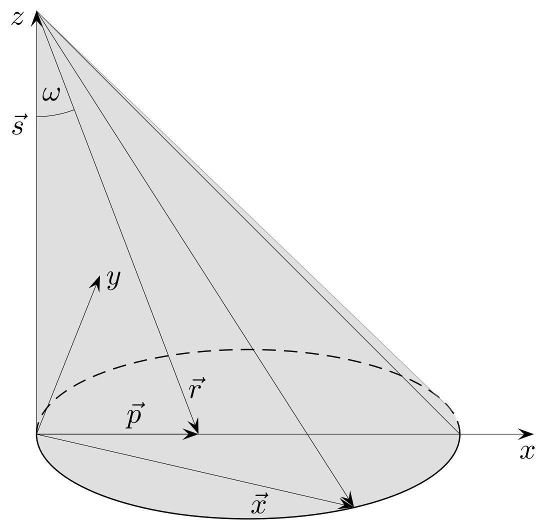
$$\omega = 60°, \quad \vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Kegelgleichung: $x^2+y^2-3z^2+6z=3$

Schnitt mit der xy-Ebene: $x^2+y^2=3$



Wir wollen auch die Gleichungen der Kurven ermitteln, die beim schrägen Schnitt eines Kegels mit einer Ebene auftreten.



1. Von einem Kegel sind gegeben:

   $$\vec{s} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \omega = 30°$$

   Ermittle die Gleichung der Schnittkurve mit der xy-Ebene.

2. Von einem Steilkegel (Mantellinie auf der z-Achse) sind gegeben:

   $$\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Ermittle die Gleichung der Schnittkurve mit der xy-Ebene.
   Verschiebe die Schnittkurve so, dass eine symmetrische Form entsteht.

Lösungen:

1. $2x^2+3y^2 = \dfrac{9}{2}$

2. $y^2 = 2\,x - \dfrac{2\,x^2}{3}$, *Verschiebung:* $a = \dfrac{3}{2}$, $2x^2+3y^2 = \dfrac{9}{2}$