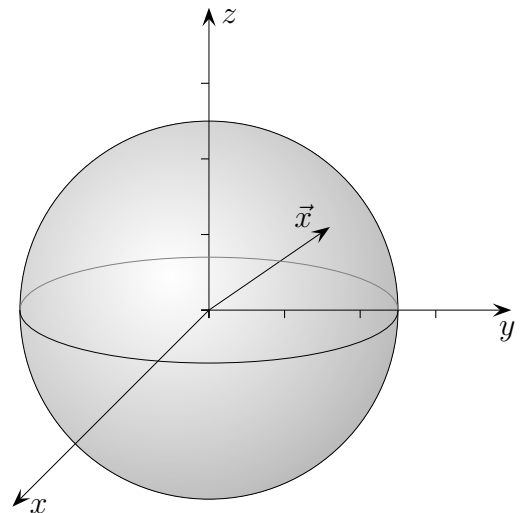


Kugel



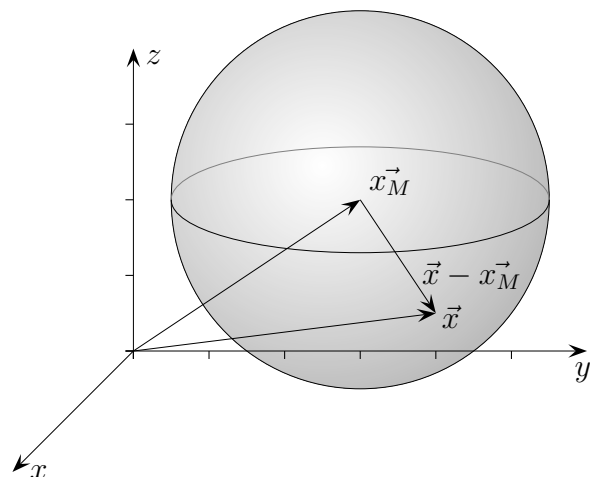
Eine Kugel, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt, ist durch den Radius r festgelegt. Für einen Vektor \vec{x} , der zu einem Punkt auf der Kugeloberfläche führt, muss gelten: $|\vec{x}| = r$, wobei mit $|\vec{x}|$ die Länge von \vec{x} gemeint ist.

Nun gilt: $|\vec{x}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\vec{x}^2}$, wobei x, y, z die Koordinaten von \vec{x} sind. Durch Quadrieren erhalten wir die *Kugelgleichung*:

$$\vec{x}^2 = r^2$$

1. Gegeben ist eine Kugel mit dem Mittelpunkt im Ursprung und dem Radius $r = 6$. In welchen Punkten schneidet die Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{die Kugel?}$$



Eine Kugel mit *beliebigem Mittelpunkt* ist durch den Vektor \vec{x}_M , der zum Mittelpunkt führt, und dem Radius r festgelegt. Für einen Vektor, der zu einem Punkt auf der Kugeloberfläche führt, muss gelten: $|\vec{x} - \vec{x}_M| = r$.

Durch Quadrieren erhalten wir die *allgemeine Kugelgleichung*:

$$(\vec{x} - \vec{x}_M)^2 = r^2$$

Kugel

1. Gegeben ist eine Kugel mit dem Mittelpunkt im Ursprung und dem Radius $r = 6$. In welchen Punkten schneidet die Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{die Kugel?}$$

Lösung:

$$\text{Schnittbedingung:} \quad \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]^2 = 36$$

$$4. \text{ Rechenregel} \quad 66 + 40\lambda + 10\lambda^2 = 36$$

$$\lambda_{1/2} = -2 \pm \sqrt{4 - 3}$$

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -3$$

Die λ -Werte in die Geradengleichung eingesetzt, ergeben die Schnittpunkte: $S_1(2 \mid 4 \mid 4)$ und $S_2(-4 \mid 2 \mid 4)$.

2. Berechne die Schnittpunkte von der Geraden g und der Kugel K .

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad K: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right]^2 = 13^2$$

Kugel

2. Berechne die Schnittpunkte von der Geraden g und der Kugel K .

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad K: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right]^2 = 13^2$$

Lösung:

$$\text{Schnittbedingung:} \quad \left[\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right]^2 = 169$$

$$\text{zusammenfassen} \quad 257 + 50\lambda + 3\lambda^2 = 169$$

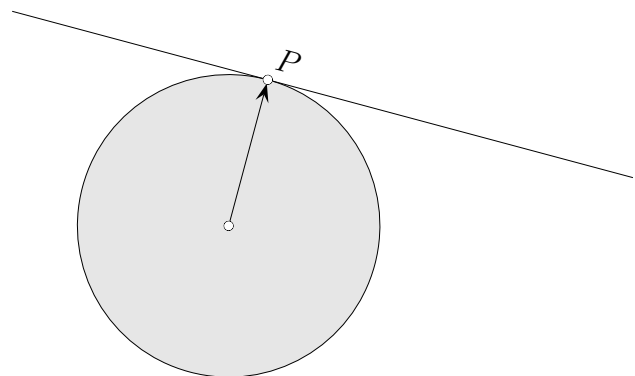
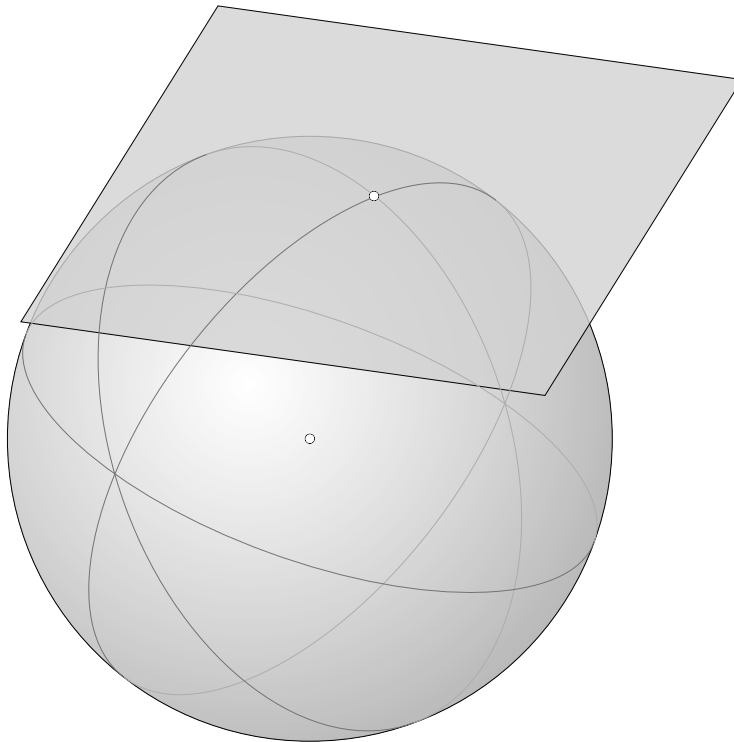
$$\lambda^2 + \frac{50}{3}\lambda + \frac{88}{3} = 0$$

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -\frac{44}{3}$$

Die λ -Werte in die Geradengleichung eingesetzt, ergeben die Schnittpunkte:

$$S_1(4 \mid 6 \mid 2) \quad \text{und} \quad S_2\left(-\frac{26}{3} \mid -\frac{20}{3} \mid -\frac{32}{3}\right).$$

Tangentialebene



Die Normalenform der Tangentialebene einer Kugel, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt, kann unmittelbar angegeben werden (Berührungspunkt sei P):

$$\vec{OP} \cdot (\vec{x} - \vec{OP}) = 0$$

Für eine Kugel mit dem Mittelpunkt M lautet die Normalenform allgemeiner:

$$\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{OP}) = 0 \quad \text{mit} \quad \vec{n} = \vec{OP} - \vec{OM}$$

Koordinatenform der Kugelgleichung

Die Kugelgleichung

$$\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]^2 = 25$$

kann auch in der Form

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 25$$

oder

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z = 11$$

geschrieben werden.

Umgekehrt kann eine Koordinatenform

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 2z = 4$$

durch binomische Ergänzungen

$$x^2 + (y^2 - 4y + 4) + (z^2 + 2z + 1) = 4 + 4 + 1$$

$$x^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 9$$

in eine Vektorform

$$\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right]^2 = 9$$

überführt werden,

aus der dann der Mittelpunkt und der Radius erkennbar sind.

Bestimme den Mittelpunkt und den Radius der Kugel: $x^2 + 10x + y^2 + z^2 - 8z = 8$

Lösung:

$$M(-5 \mid 0 \mid 4), \quad r = 7$$