eA Jg 11 Mathematikarbeit Name:

1. Gegeben sind die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und der Punkt $A(4\,|\,2\,|\,2)$.

   a) Fälle von A das Lot auf g. Bestimme die Koordinaten des Lotfußpunkts F.
   b) Ermittle einen Punkt auf g, der von A 5 LE entfernt ist (hier mit Brüchen rechnen).

2. Gegeben sind die Ebene

$$E: \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 14 = 0 \qquad \text{und die Gerade } g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ a \\ 7 \end{pmatrix}$$

   Gibt es ein a, so dass die Gerade g

   a) parallel zur Ebene E verläuft?
   b) senkrecht zu E verläuft? *(Begründung verlangt)*

3. Gegeben sind die Punkte $A(6\,|\,-2\,|\,0)$ und $B(3\,|\,2\,|\,3)$. Untersuche, ob es Punkte P auf der x-Achse gibt, für die gilt: $\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{PB}$, von denen aus die Punkte A und B also unter einem rechten Winkel erscheinen. Falls es solche Punkte gibt, ermittle sie (möglichst ohne GTR).

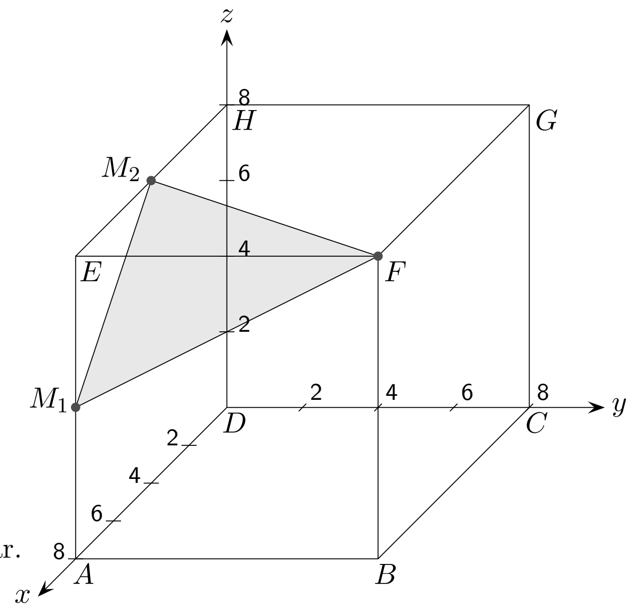
4. Es sind die Punkte $A(2\,|\,3\,|\,12)$, $B(10\,|\,-1\,|\,4)$ und $C(8\,|\,3\,|\,0)$ gegeben.

   a) Weise nach (vollständig, übersichtlich und möglichst auf kürzestem Wege), dass die drei Punkte durch einen weiteren Punkt D zu einem Rechteck $ABCD$ ergänzt werden können.
   Bezeichnung der Eckpunkte im Gegenuhrzeigersinn, erläuternder Text verlangt!
   Bestimme die Koordinaten des Punktes D.
   Berechne die Koordinaten des Diagonalenschnittpunktes M.

   b) Durch das Rechteck $ABCD$ und den Punkt $S_1(4\,|\,5\,|\,13)$ ist eine Pyramide mit der Spitze S_1 gegeben. Schildere (keine Rechnung) eine Lösungsidee, wie ohne eine Ermittlung von Längen oder Winkeln überprüft werden kann, ob die Pyramide schief ist.

   c) Berechne die Koordinaten der Spitze S_2 einer senkrechten Pyramide mit derselben Grundfläche und einem Volumen von 144 *VE*. Berechne alle Möglichkeiten, falls es mehrere gibt.

In einem würfelförmigen Ausstellungsraum mit der Kantenlänge 8 Meter ist ein dreieckiges Segeltuch aufgespannt. Es ist im Punkt F sowie in den Kantenmitten M_1 und M_2 befestigt (siehe Abbildung).
Es wird angenommen, dass das Segeltuch nicht durchhängt. In einem Koordinatensystem stellen die Punkte $A(8\,|\,0\,|\,0)$, $C(0\,|\,8\,|\,0)$ und $H(0\,|\,0\,|\,8)$ die entsprechenden Ecken des Raumes dar.



5. a) Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene S, in der das Segeltuch liegt.

[mögliches Teilergebnis: $S\colon\ 2x - y + 2z = \ldots$]

Ermittle den Abstand des Segeltuchs von der Ecke E.
Bestimme (elementar, ohne Vektorrechnung) den Anteil des Volumens oberhalb des Segeltuches vom Gesamtvolumen des Raumes.
Ermittle den Winkel, den die Ebene S mit dem Boden des Ausstellungsraums einschließt.

b) Auf der Diagonale AC steht eine 6 Meter hohe Stange senkrecht auf dem Boden. Das obere Ende der Stange berührt das Segeltuch. Ermittle die Stelle auf dem Boden, wo sich das untere Ende der Stange befindet.

c) Wir nehmen nun an, dass der Ausstellungsraum mit dem Segeltuch nur aus Kanten besteht, ohne Wände.
Der Raum befindet sich im Freien und die Richtung der Sonnenstrahlen ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Weise nach (möglichst kurz): Der Schatten des Segeltuchs ist nur eine Strecke.
Erläutere (<u>keine</u> Rechnung), wie die Länge dieser Strecke ermittelt werden kann.

6. Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = x \cdot e^{-\frac{x}{k} - 1}, \quad x \geq 0,\ k > 0$

An welchen Stellen liegen waagerechte Tangenten vor?

7. Gegeben ist die Funktion $f(x) = e^{-\frac{x}{4}}$.

Wie lautet die Gleichung der Tangente an der Stelle $x = a$?
Für welches a bildet die Tangente mit den Koordinatenachsen ein gleichschenkliges Dreieck?
(möglichst exaktes Ergebnis $a = -4 \ln \ldots$)

1. a) Schnitt der Geraden g mit $E: \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 12 = 0$, $\;-6 + 36\lambda - 12 = 0$, $\;\lambda = \frac{1}{2}$, $\;F(6\,|\,3\,|\,0)$

   b) $\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\;d(F,g) = 3$, $\;\overrightarrow{OB_1} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 26 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

   $$\overrightarrow{OB_2} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 10 \\ 17 \\ -4 \end{pmatrix}$$

2. a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ a \\ 7 \end{pmatrix} = 0 \implies a = 8$

   b) Es gibt kein a.
   Der Richtungsvektor der Geraden müsste kollinear zum Normalenvektor der Ebene verlaufen.

3. $\overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix} 6-a \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\;\overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} 3-a \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\;a^2 - 9a + 14 = 0$, $\;P_1(7\,|\,0\,|\,0)$, $P_2(2\,|\,0\,|\,0)$

4. a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$, $\;\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}$, $\;D(0\,|\,7\,|\,8)$

   $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\;M(5\,|\,3\,|\,6)$

   b) Normalenform der Ebene, in der die Grundfläche liegt: $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 22 = 0$

   Schnitt mit der Geraden: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ergibt den Höhenfußpunkt $A \neq M$ $\;(\lambda = -1)$

   oder: S_1 liegt nicht auf der Geraden durch M mit dem Normalenvektor als Richtungsvektor.

   c) $G = 72 \implies h = 6 \implies \overrightarrow{OS_2} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\;\overrightarrow{OS_3} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

5. a) $S\colon 2x - y + 2z = 24$, $\;d = \frac{8}{3}$, Anteil $\frac{1}{24}$, $\;\alpha = 48{,}2^\circ$

   b) E mit der Geraden h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}$ schneiden, $\;\lambda = \frac{1}{6}$, $\;Q\left(\frac{20}{3}\,|\,\frac{4}{3}\,|\,0\right)$

   c) Richtungsvektor ist orthogonal zum Normalenvektor, ...

6. $f_k'(x) = \frac{1}{k}(k - x) \cdot e^{-\frac{x}{k} - 1}$, $\;x = k$

7. $t(x) = -\frac{1}{4} e^{-\frac{a}{4}}(x - a) + e^{-\frac{a}{4}}$, $\;t'(x) = -1$ oder mit $\;t(0) = \frac{1}{4} e^{-\frac{a}{4}}(a + 4)$, $\;t(a+4) = 0$, $\;a = -4 \ln 4$