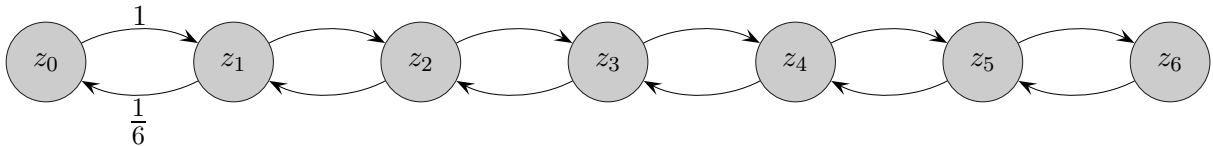


Münzen-Aufgabe

Sechs Münzen mit den Seiten 1 und 0 (Wappen) liegen anfänglich alle mit dem Wappen nach oben. Jede Sekunde wird nun eine zufällig ausgewählte Münze umgedreht. Untersuche die langfristige Verteilung für die Anzahl X der oben liegenden Einsen.

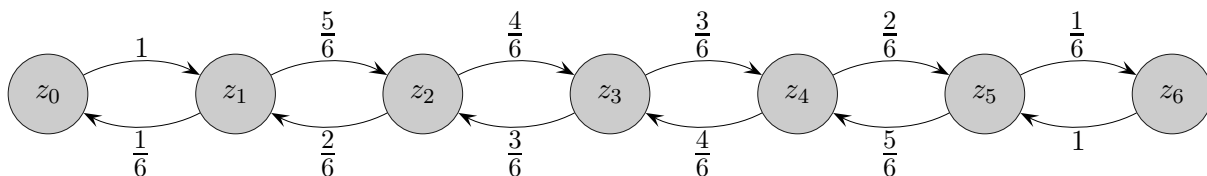


Zeige, dass $\vec{v}_s = (\frac{1}{64} \mid \frac{3}{32} \mid \frac{15}{64} \mid \frac{5}{16} \mid \frac{15}{64} \mid \frac{3}{32} \mid \frac{1}{64})^T$ eine stationäre Verteilung ist.

Stelle den Bezug zur Ehrenfest-Kette her, bei der der Austausch von Partikeln zwischen zwei Behältern, die durch eine Membran getrennt sind, modelliert wird.

Münzen-Aufgabe

Sechs Münzen mit den Seiten 1 und 0 (Wappen) liegen anfänglich alle mit dem Wappen nach oben. Jede Sekunde wird nun eine zufällig ausgewählte Münze umgedreht. Untersuche die langfristige Verteilung für die Anzahl X der oben liegenden Einsen.



$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} & 0 & \frac{3}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{6} & 0 & \frac{4}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{6} & 0 & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{6} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix}$$

Die Konvergenz der Kette gegen die Verteilung $\vec{v}_s = (\frac{1}{64} \mid \frac{3}{32} \mid \frac{15}{64} \mid \frac{5}{16} \mid \frac{15}{64} \mid \frac{3}{32} \mid \frac{1}{64})^T$ ist nicht gegeben, da die Kette periodisch ist.

$$\vec{v}_{30} = (0,031 \mid 0 \mid 0,469 \mid 0 \mid 0,469 \mid 0 \mid 0,031)^T$$

$$\vec{v}_{31} = (0 \mid 0,188 \mid 0 \mid 0,625 \mid 0 \mid 0,188 \mid 0)^T$$

Variation

Das Ehrenfest-Modell kann so geändert werden, dass das ausgewählte Teilchen mit der Wahrscheinlichkeit p im Behälter verbleibt, mit Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ erfolgt ein Wechsel in der beschriebenen Weise. Dadurch wird die Kette aperiodisch und konvergiert für jede Anfangsverteilung gegen die stationäre Verteilung:

$$P(X = k) = \binom{6}{k} \frac{1}{2^6}, \quad k = 0, \dots, 6.$$

