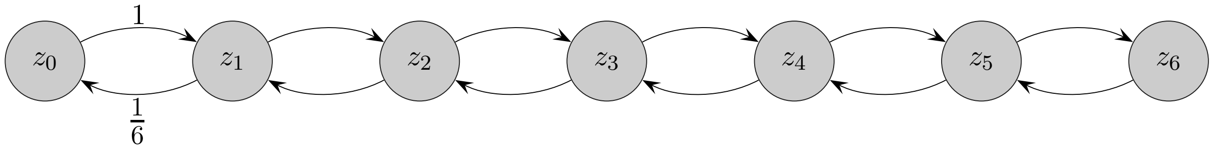
Münzen-Aufgabe

Sechs Münzen mit den Seiten 1 und 0 (Wappen) liegen anfänglich alle mit dem Wappen nach oben.
Jede Sekunde wird nun eine zufällig ausgewählte Münze umgedreht.
Untersuche die langfristige Verteilung für die Anzahl X der oben liegenden Einsen.

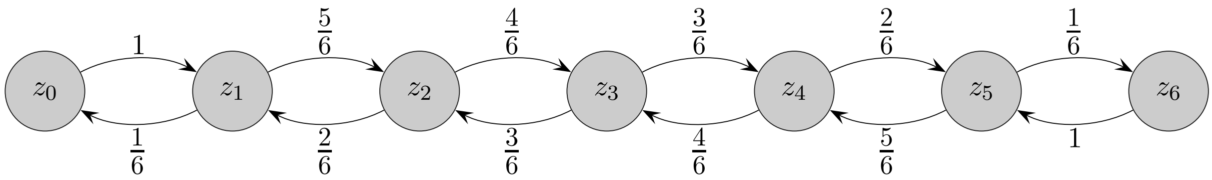


Zeige, dass $\overrightarrow{v_s} = (\frac{1}{64} \mid \frac{3}{32} \mid \frac{15}{64} \mid \frac{5}{16} \mid \frac{15}{64} \mid \frac{3}{32} \mid \frac{1}{64})^{\mathrm{T}}$ eine stationäre Verteilung ist.

Stelle den Bezug zur Ehrenfest-Kette her, bei der der Austausch von Partikeln zwischen zwei Behältern, die durch eine Membran getrennt sind, modelliert wird.

Münzen-Aufgabe

Sechs Münzen mit den Seiten 1 und 0 (Wappen) liegen anfänglich alle mit dem Wappen nach oben.
Jede Sekunde wird nun eine zufällig ausgewählte Münze umgedreht.
Untersuche die langfristige Verteilung für die Anzahl X der oben liegenden Einsen.



$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} & 0 & \frac{3}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{6} & 0 & \frac{4}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{6} & 0 & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{6} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix}$$

Die Konvergenz der Kette gegen die Verteilung $\overrightarrow{v_s} = (\frac{1}{64} \mid \frac{3}{32} \mid \frac{15}{64} \mid \frac{5}{16} \mid \frac{15}{64} \mid \frac{3}{32} \mid \frac{1}{64})^{\mathrm{T}}$
ist nicht gegeben, da die Kette periodisch ist.

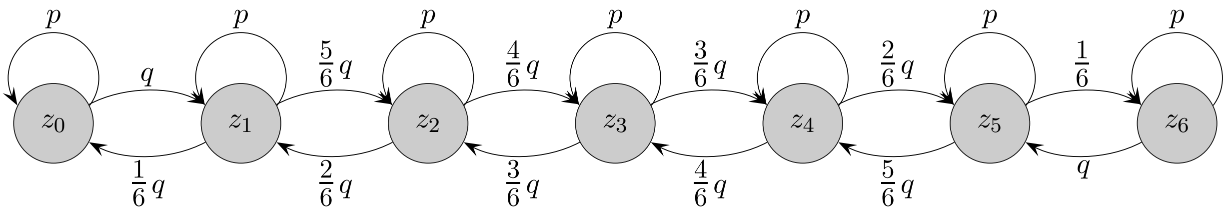
$$\overrightarrow{v_{30}} = (0{,}031 \mid 0 \mid 0{,}469 \mid 0 \mid 0{,}469 \mid 0 \mid 0{,}031)^{\mathrm{T}}$$

$$\overrightarrow{v_{31}} = (0 \mid 0{,}188 \mid 0 \mid 0{,}625 \mid 0 \mid 0{,}188 \mid 0)^{\mathrm{T}}$$

Variation

Das Ehrenfest-Modell kann so geändert werden, dass das ausgewählte Teilchen mit der Wahrscheinlichkeit p im Behälter verbleibt, mit Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ erfolgt ein Wechsel in der beschriebenen Weise. Dadurch wird die Kette aperiodisch und konvergiert für jede Anfangsverteilung gegen die stationäre Verteilung:

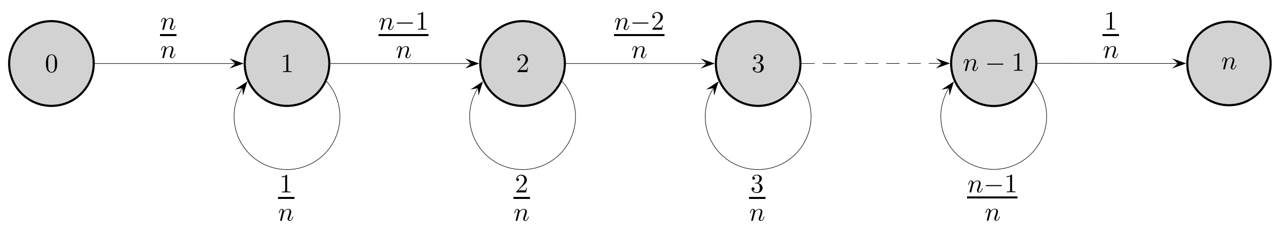
$$P(X = k) = \binom{6}{k} \frac{1}{2^6}, \quad k = 0, \ldots, 6.$$



Vollständige Serie

Ein Würfel wird $k = 13$ (27) mal geworfen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten dabei alle sechs möglichen Augenzahlen mindestens einmal auf?

Vollständige Serie



Ein Zufallsversuch mit n möglichen Ergebnissen wird k-mal wiederholt.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten alle Ergebnisse mindestens einmal auf? Anders formuliert:
Aus einer Urne mit n nummerierten Kugeln wird zufällig jeweils eine gezogen und wieder zurückgelegt. Dies wird k-mal wiederholt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird jede Kugel mindestens einmal gezogen?
In der Grafik geben die Zustände 0 bis n die Anzahl der gesammelten Nummern an.
Für das Werfen eines Würfels gibt der Zustand 2 dabei z. B. an, dass 2 verschiedene Augenzahlen bis zu diesem Zeitpunkt aufgetreten sind. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 2/6 würfelt man dann eine bereits erhaltene Augenzahl und mit einer Wahrscheinlichkeit von 4/6 erzielt man eine neue Augenzahl.
Im absorbierenden Zustand 6 hat man die vollständige Serie erhalten.

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} & \frac{2}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{6} & \frac{3}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{6} & \frac{4}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix}$$

Der Startvektor ist $\overrightarrow{v_0} = (1 \mid 0 \mid 0 \mid 0 \mid 0 \mid 0 \mid 0)^{\mathrm{T}}$.

Die Wahrscheinlichkeit für eine vollständige Serie nach (maximal) 13 Würfen beträgt 51,4 %,
nach (maximal) 27 Würfen sind es 95,7 %.

Ergänzung:
Die Wahrscheinlichkeit für eine vollständige Serie in genau 14 Würfen beträgt $58{,}28\,\% - 51{,}39\,\% = 6{,}9\,\%$,
in genau 11 Würfen $35{,}62\,\% - 27{,}18\,\% = 8{,}4\,\%$ (Maximum).