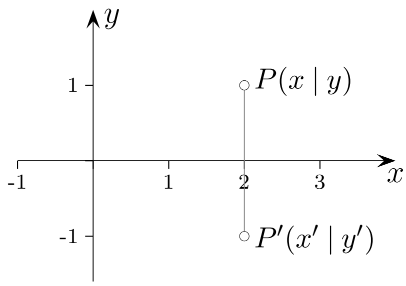
Abbildungen der Ebene, Abbildungsmatrix

a) Spiegelung an der x-Achse

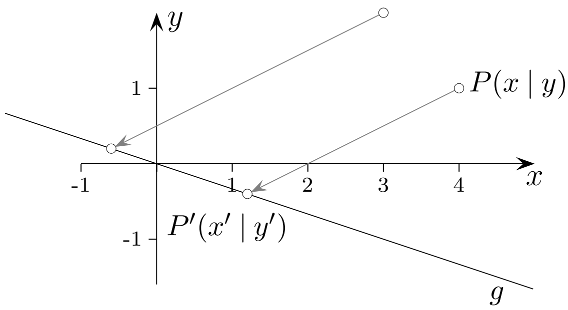


$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= -y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x' &= 1x \; + 0y \\ y' &= 0x \; - 1y \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

b) Parallelprojektion auf eine Ursprungsgerade g, Projektionsrichtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$



Schnitt der Geraden $\vec{x} = \overrightarrow{OP} + t\vec{v}$ und g: $x + 3y = 0$ ergibt (Einsetzen) $t = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}y$.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (\tfrac{1}{5}x + \tfrac{3}{5}y)\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

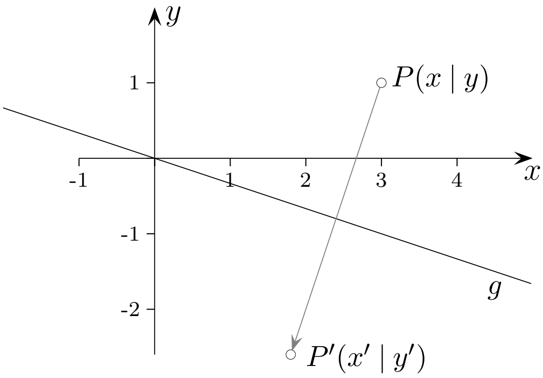
$$\dots$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Bei einer orthogonalen Projektion auf die Gerade g ist der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Die Abbildungsmatrix lautet: $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

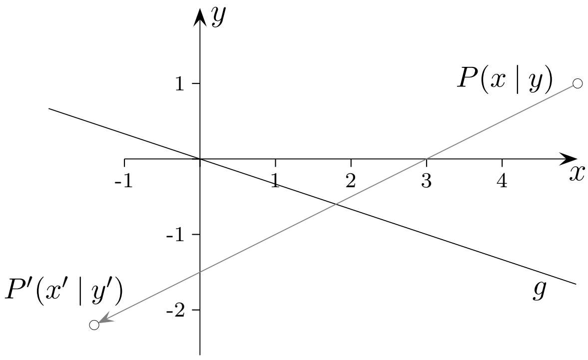
c) Spiegelung an einer Ursprungsgeraden g



Schnitt der Geraden $\vec{x} = \overrightarrow{OP} + t\vec{n}$ und g: $x + 3y = 0$
ergibt (Einsetzen) $t = \frac{1}{10}x + \frac{3}{10}y$,
siehe orthogonale Projektion. t wird verdoppelt.
Es ist nicht nötig, den Schnittpunkt zu berechnen.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2\left(\frac{1}{10}x + \frac{3}{10}y\right)\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$
$$\ldots$$
$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

d) Schrägspiegelung an g, Projektionsrichtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

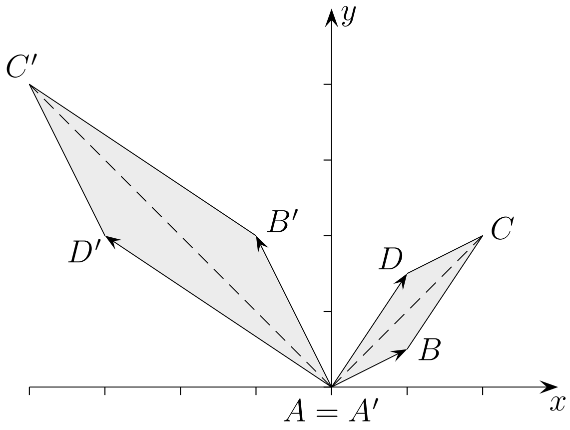


Schnitt der Geraden $\vec{x} = \overrightarrow{OP} + t\vec{v}$ und g: $x + 3y = 0$
ergibt (Einsetzen) $t = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}y$.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2\left(\frac{1}{5}x + \frac{3}{5}y\right)\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\ldots$$
$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -12 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Lineare Abbildungen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ dx + ey \end{pmatrix}$$



a) Die Bilder der Einheitsvektoren sind die Spalten der Abbildungsmatrix.

b) Durch Nachrechnen wird bestätigt: $A\cdot(\lambda\vec{x}) = \lambda(A\cdot\vec{x})$ und $A\cdot(\vec{x}+\vec{y}) = A\cdot\vec{x}+A\cdot\vec{y}$
Das Bild einer Summe zweier Vektoren $\vec{x}$, $\vec{y}$ kann auch als Summe
der beiden Bildvektoren $A\cdot\vec{x}$, $A\cdot\vec{y}$ erhalten werden (siehe obige Grafik).
Parallelogramme werden auf Parallelogramme abgebildet.

c) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$

Sei C durch $B\cdot(A\cdot\vec{x}) = C\cdot\vec{x}$ festgelegt. Dann gilt: $C = \begin{pmatrix} ea+fc & eb+fd \\ ga+hc & gb+hd \end{pmatrix}$

C wird als Produkt der Matrizen B und A aufgefasst: $C = B\cdot A$

Für die Bildung des Produkts gibt es eine einfache Merkregel:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \end{array}$$

Drehung um den Ursprung

Die Drehung ist eine lineare Abbildung, da die Linearitätsbedingungen anschaulich erfüllt sind. Daher ergibt sich die Abbildungsmatrix durch die Abbildung der Einheitsvektoren.

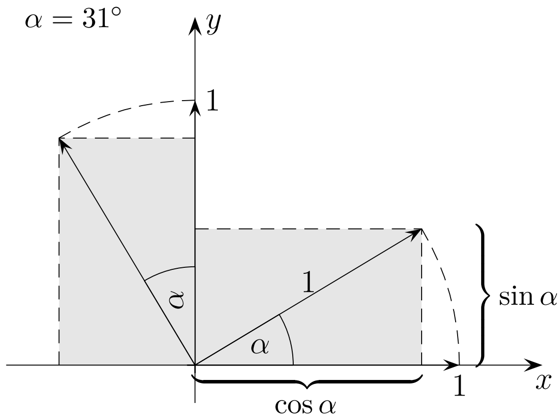
Erläutere:

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \circlearrowleft \begin{pmatrix}\cos\alpha\\\sin\alpha\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \circlearrowleft \begin{pmatrix}-\sin\alpha\\\cos\alpha\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix} \circlearrowleft \begin{pmatrix}a\cos\alpha\\a\sin\alpha\end{pmatrix}$$

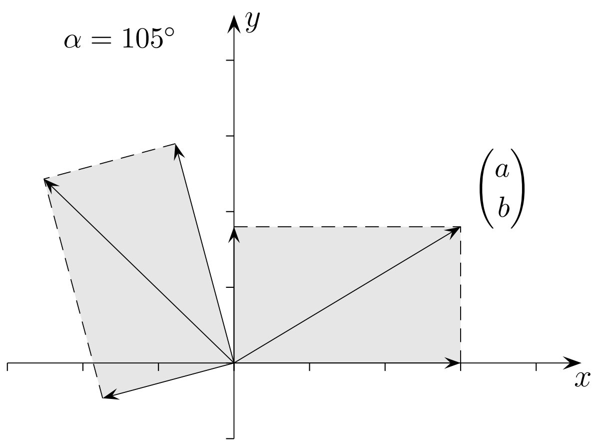
$$\begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix} \circlearrowleft \begin{pmatrix}-b\sin\alpha\\b\cos\alpha\end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \circlearrowleft \ ?$$

$$\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix} \circlearrowleft \begin{pmatrix}a\cos\alpha\\a\sin\alpha\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-b\sin\alpha\\b\cos\alpha\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \circlearrowleft \begin{pmatrix}a\cos\alpha - b\sin\alpha\\a\sin\alpha + b\cos\alpha\end{pmatrix}$$



In Matrix-Schreibweise:

$$\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

Parallelprojektion auf die yz-Ebene

Diese Abbildungsart ist rechnerisch einfach, wenn
die Projektionsrichtung durch den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ festgelegt wird.

Eine Gerade durch $P(x_0 \mid y_0 \mid z_0)$ mit dem Richtungsvektor $\vec{v}$ ist mit der yz-Ebene zu schneiden.
Ergebnis: $\lambda = x_0$
P wird somit auf $P'(0 \mid a\,x_0 + y_0 \mid b\,x_0 + z_0)$ abgebildet, insbesondere $Q(1 \mid 0 \mid 0)$ auf $Q'(0 \mid a \mid b)$.

Die Abbildungsgleichungen lauten dann $(x_0' = 0)$:

$$\begin{aligned} y_0' &= ax_0 + y_0 \\ z_0' &= bx_0 + z_0 \end{aligned}$$

oder in Matrix-Schreibweise:

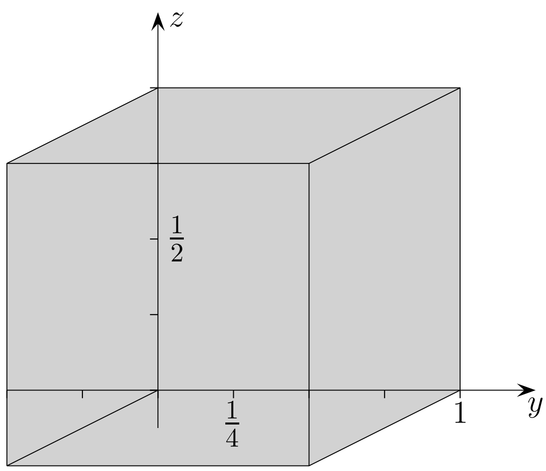
$$\begin{pmatrix} y_0' \\ z_0' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

Die zweidimensionalen Spaltenvektoren der Matrix sind die Bilder
der dreidimensionalen Basisvektoren $\vec{e_i}$.

Betrachten wir nun die Abbildung des Einheitswürfels für $a = -\frac{1}{2}$ und $b = -\frac{1}{4}$.
Hierbei gilt z. B.:

$$\begin{aligned} E_1(1 \mid 0 \mid 0) &\longrightarrow E_1'\left(0 \mid -\tfrac{1}{2} \mid -\tfrac{1}{4}\right) \\ E_2(1 \mid 1 \mid 0) &\longrightarrow E_2'\left(0 \mid \tfrac{1}{2} \mid -\tfrac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich das Bild:



Diese Art der Berechnung von Punktkoordinaten für Schrägbilder ist seit 2018 im KC Ni enthalten.

Parallelprojektion auf eine Ebene

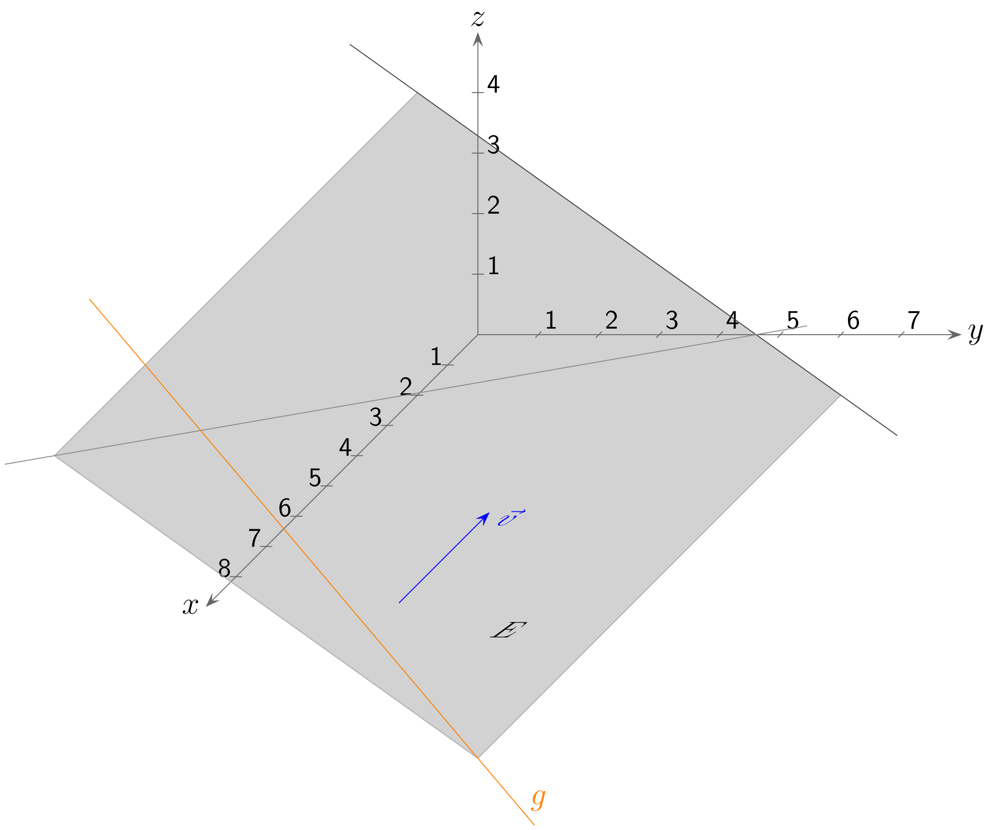
Wie lautet die Matrix A der Projektion, die beliebige Raumpunkte $P(x \mid y \mid z)$

parallel in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ auf die Ebene $E:\ x - y + z = 0$ abbildet?

Schnitt der Gerade $\vec{x} = \overrightarrow{OP} + t\vec{v}$ mit E ergibt (Einsetzen) $t = -x + y - z$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (-x + y - z)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &\dots \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Parallelprojektion auf die yz-Ebene

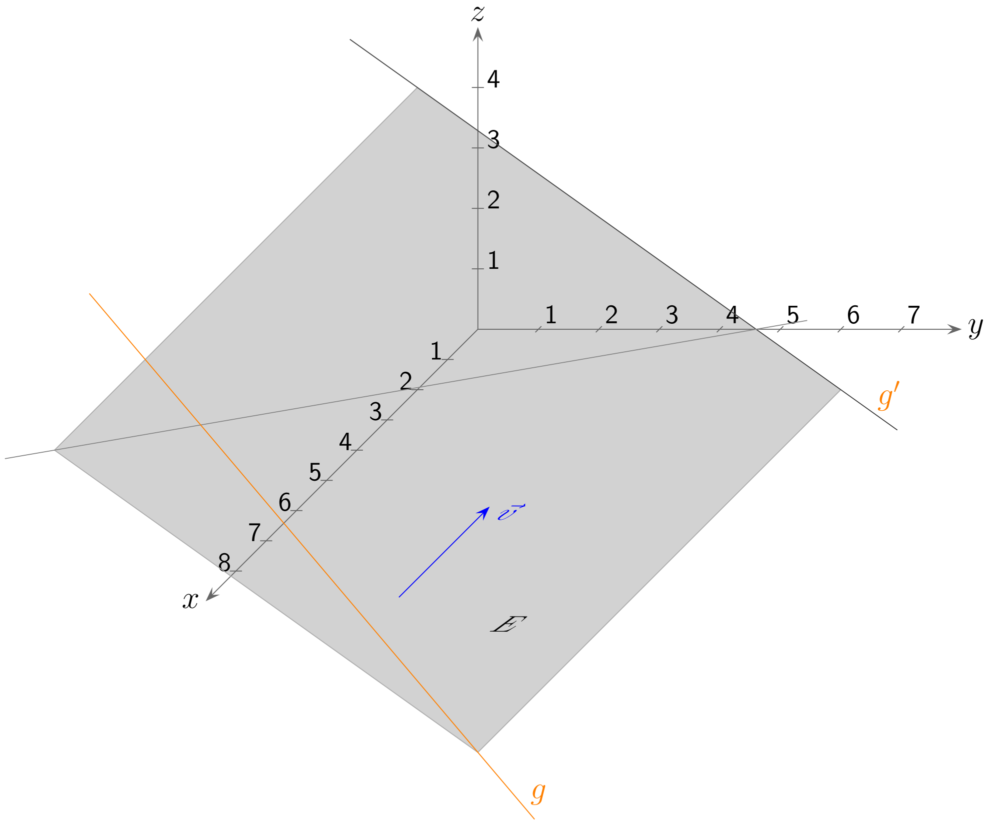


Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gibt die Projektionsrichtung an.

Ermittle das Bild der Geraden $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Die Grafik enthält die Spurgerade von E in der xy-Ebene.

Parallelprojektion auf die yz-Ebene



Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gibt die Projektionsrichtung an.

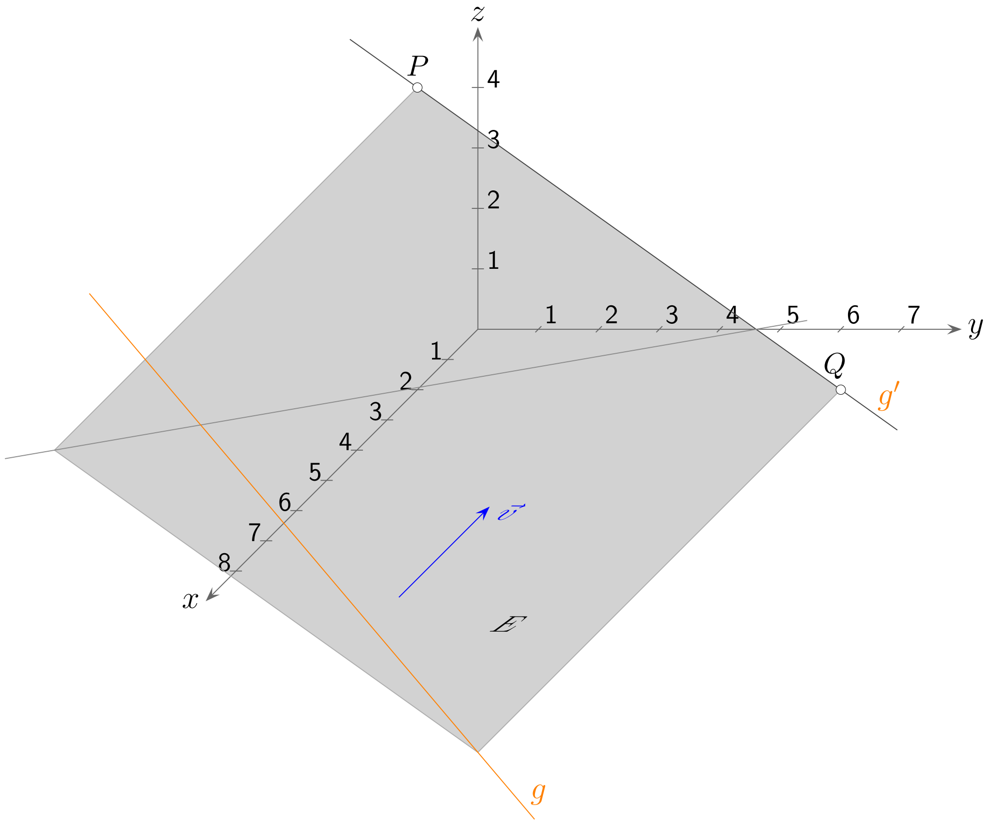
Ermittle das Bild der Geraden $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Abbildungsgleichung:

$$\begin{pmatrix} y_0' \\ z_0' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \qquad a = 1,\ b = 1$$

$g'\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\qquad$ g in die Abbildungsgleichung einsetzen und ausrechnen

Parallelprojektion auf die yz-Ebene



Der Vektor $\color{blue}{\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$ gibt die Projektionsrichtung an.

$$\color{orange}{g}\color{black}{:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}}$$

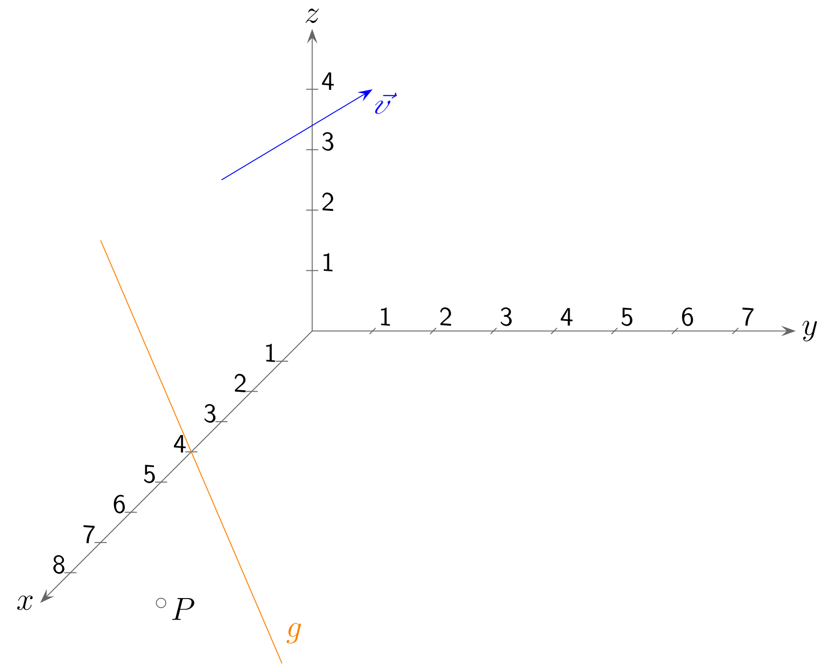
Alle Geraden in E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} \color{blue}{+ t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$ sowie E werden auf $\color{orange}{g'}$ abgebildet.

E: $12x + 5y + 7z = 23$, Spurpunkte in der yz-Ebene: $P(0\,|\,-1\,|\,4)$ und $Q(0\,|\,6\,|\,-1)$

Beachte: $\vec{n} \perp \color{blue}{\vec{v}}$

Die Bildgerade einer Ebene E^* mit $\vec{n}^* \perp \color{blue}{\vec{v}}$ kann mit zwei Spurpunkten ermittelt werden, für $\vec{n}^* \not\perp \color{blue}{\vec{v}}$ ist das Bild die yz-Ebene.

Parallelprojektion auf die yz-Ebene



Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ gibt die Projektionsrichtung an.

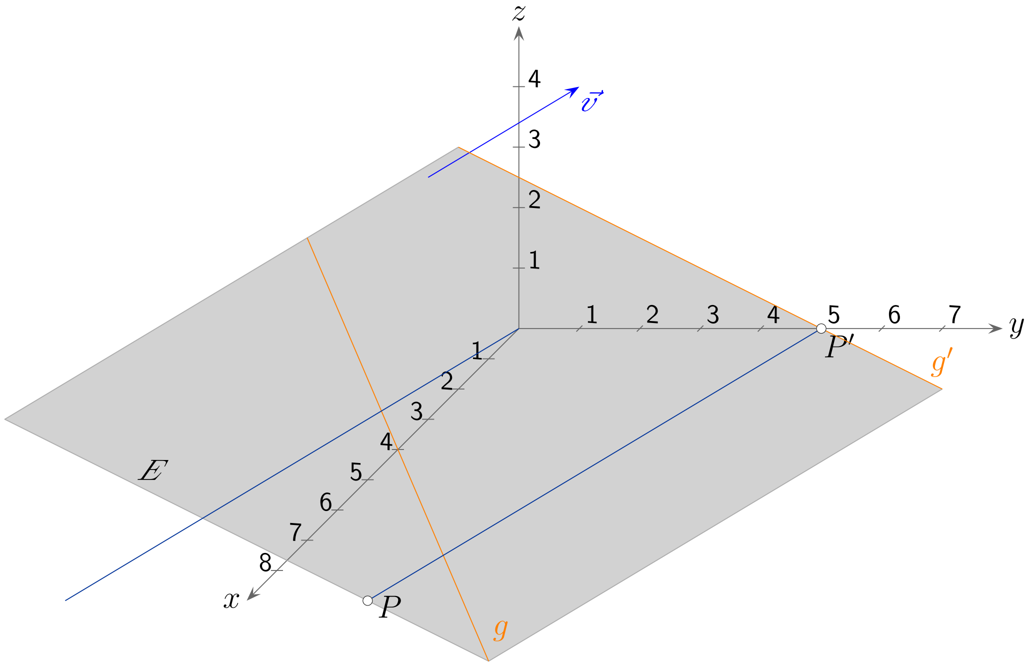
a) Ermittle die Bilder von $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $P(3\,|\,-1\,|\,-3)$.

b) Welche Punkte werden auch auf P' (Bild von P) abgebildet?

c) Ermittle die Normalenform der Ebene E, in der P und g liegen.

d) Untersuche, ob das Bild von g die Spurgerade von E in der yz-Ebene ist.

Parallelprojektion auf die yz-Ebene



Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ gibt die Projektionsrichtung an.

a) Ermittle die Bilder von $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $P(3\,|\,-1\,|\,-3)$.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad a = 2,\ b = 1,\qquad g'\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\quad P'(0\,|\,5\,|\,0)$$

b) Welche Punkte werden auch auf P' (Bild von P) abgebildet? $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Kern der Abbildung}}$

Der Kern einer Abbildung besteht aus allen Ortsvektoren, die auf den Nullvektor abgebildet werden.

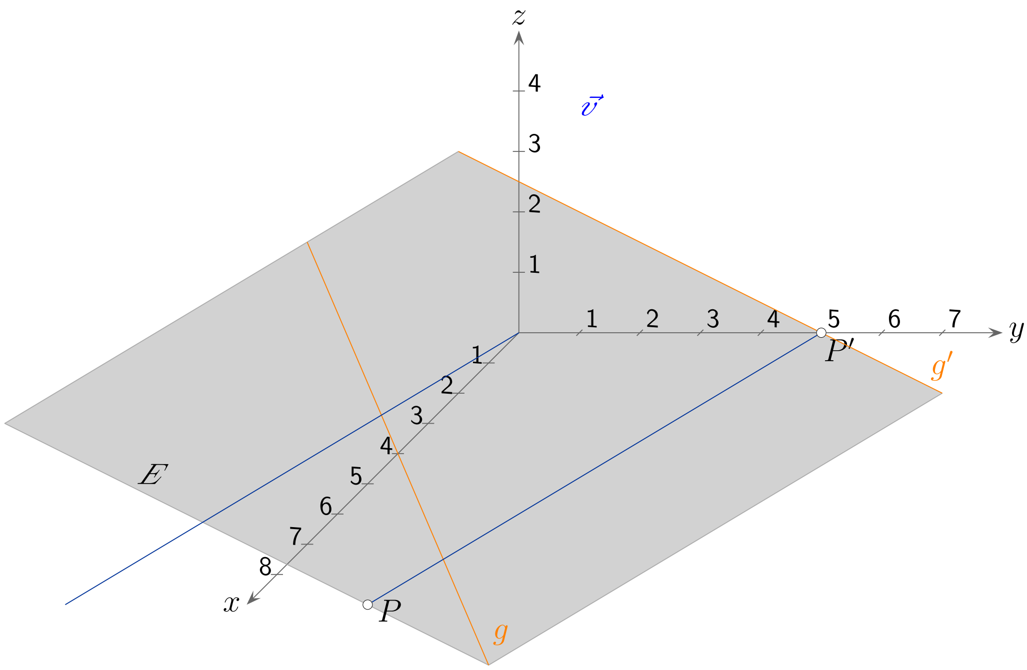
c) Ermittle die Normalenform der Ebene E, in der P und g liegen. $\quad E\colon\ 4x + y + 2z = 5$

d) Untersuche, ob das Bild von g die Spurgerade von E in der yz-Ebene ist. Beachte: $\vec{n} \perp \vec{v}$

Spurgerade g'

Parallelprojektion auf die yz-Ebene

Die Parallelprojektion ist eine lineare Abbildung.



Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ gibt die Projektionsrichtung an.

a) Ermittle die Bilder von $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $P(3\,|\,-1\,|\,-3)$.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad a = 2,\ b = 1,\qquad g'\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\quad P'(0\,|\,5\,|\,0)$$

b) Welche Punkte werden auch auf P' (Bild von P) abgebildet? $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{s\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Kern der Abbildung}}$

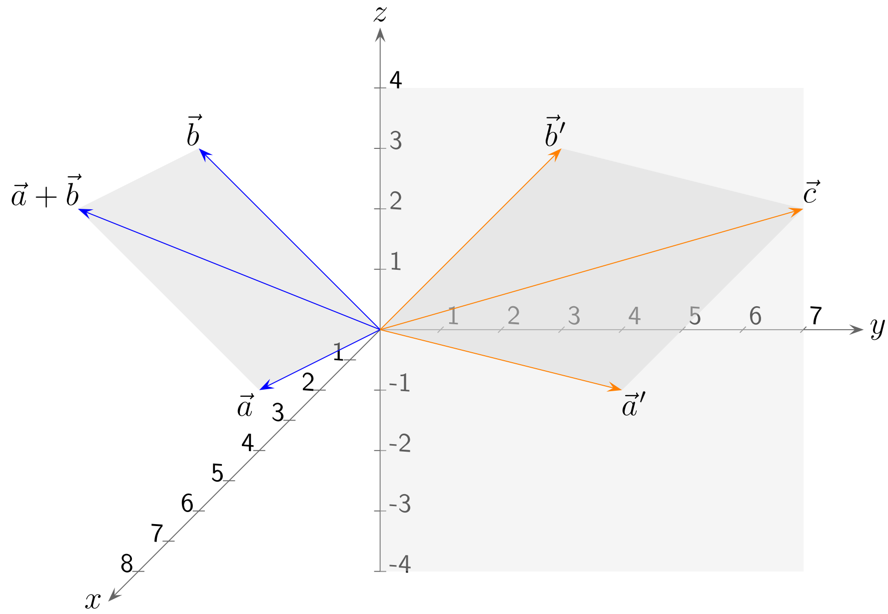
Der Kern einer Abbildung besteht aus allen Ortsvektoren, die auf den Nullvektor abgebildet werden.

c) Ermittle die Normalenform der Ebene E, in der P und g liegen. $E\colon\ 4x + y + 2z = 5$

d) Untersuche, ob das Bild von g die Spurgerade von E in der yz-Ebene ist. Beachte: $\vec{n} \perp \vec{v}$

Spurgerade g'

Parallelprojektion Einstieg



Für diesen einfachen, anschaulichen Einstieg sind keine umfangreichen Kenntnisse der Vektorrechnung erforderlich.

Notwendige Schritte, um die Abbildungsmatrix zu ermitteln:

a) Die Parallelprojektion ist eine lineare Abbildung.

Anschauliche Argumentation
Parallele Geraden gehen in parallele Geraden über. Ein Parallelogramm wird auf ein Parallelogramm abgebildet, siehe Grafik.
Wir erhalten die Beziehungen $\vec{a}\,' + \vec{b}\,' = (\vec{a} + \vec{b})'$, $k\vec{a}\,' = (k\vec{a})'$.

math. Argumentation

$$\begin{aligned} \vec{a}\,' &= \vec{a} + \lambda\vec{v} && \text{Projektionsrichtung durch } \vec{v} \text{ gegeben} \\ \vec{b}\,' &= \vec{b} + \mu\vec{v} \quad \Longrightarrow && \\ \vec{a}\,' + \vec{b}\,' &= \underbrace{\vec{a} + \vec{b} + (\lambda + \mu)\vec{v}}_{(\vec{a}+\vec{b})'} && \end{aligned}$$

Um $(\vec{a} + \vec{b})'$ zu bilden, wird ein Vielfaches von $\vec{v}$ zu $\vec{a}$ addiert, so dass die Summe in der yz-Ebene liegt.

$$\begin{aligned} \vec{a}\,' &= \vec{a} + \lambda\vec{v} \quad \Longrightarrow \\ k\vec{a}\,' &= \underbrace{k\vec{a} + k\lambda\vec{v}}_{(k\vec{a})'} \end{aligned}$$

Um $(k\vec{a})'$ zu bilden, wird ein Vielfaches von $\vec{v}$ zu $k\vec{a}$ addiert, so dass das Produkt in der yz-Ebene liegt.

b) $(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)' = \vec{e}_1' + \vec{e}_2' + \vec{e}_3'$

Um das Bild eines Vektors $\vec{a}$ zu ermitteln, können $\vec{a}$ in Einheitsvektoren zerlegt, $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$, und die Bilder der Einheitsvektoren bestimmt werden, $\vec{a}' = a_1\vec{e}_1' + a_2\vec{e}_2' + a_3\vec{e}_3'$.

Die Vektoren $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bleiben fix, $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$

Mit dieser Darstellung von $\vec{v}$ ist das Bild von $\vec{e}_1$ offensichtlich, die Summe

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ liegt in der yz-Ebene.

c) Abbildungsmatrix

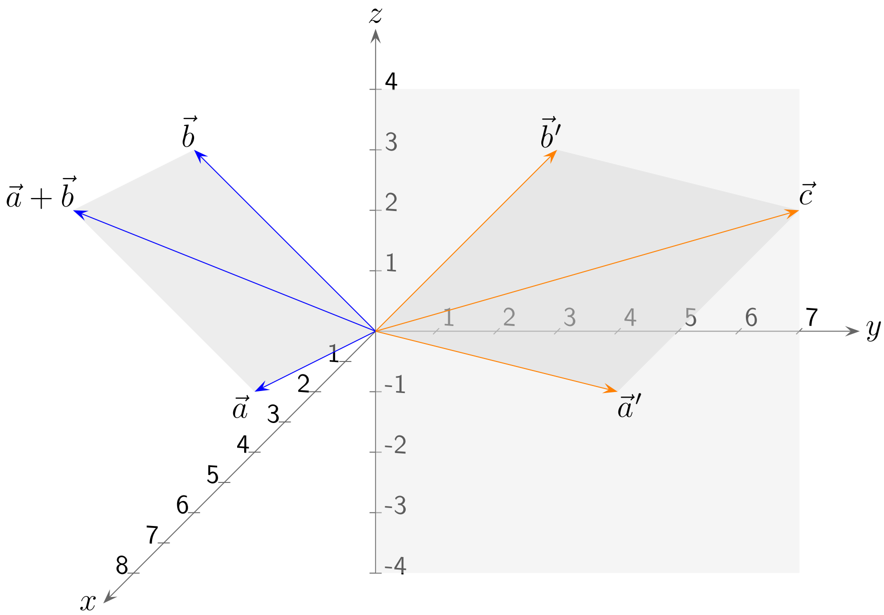
Somit gilt:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \longrightarrow a_1 \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_1 a + a_2 \\ a_1 b + a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

oder kürzer, $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Parallelprojektion auf die yz-Ebene

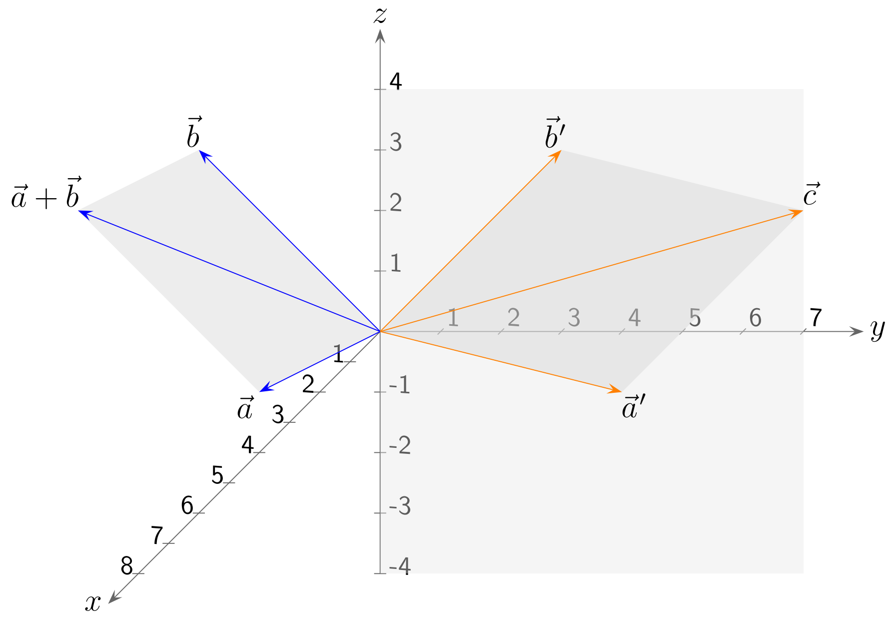


Die Parallelprojektion ist eine lineare Abbildung.
Parallele Geraden gehen in parallele Geraden über.
Ein Parallelogramm wird auf ein Parallelogramm abgebildet, siehe Grafik.
$\vec{c}$ kann auf zwei Weisen ermittelt werden. Wir erhalten die Beziehung $\vec{a}' + \vec{b}' = (\vec{a} + \vec{b})'$.
Weiter gilt $k\vec{a}' = (k\vec{a})'$.

Projektionsrichtung sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Projiziere $A(4\,|\,-1\,|\,5)$, $B(4\,|\,0\,|\,1)$ und $C(8\,|\,-1\,|\,6)$ in die yz-Ebene.

Parallelprojektion auf die yz-Ebene



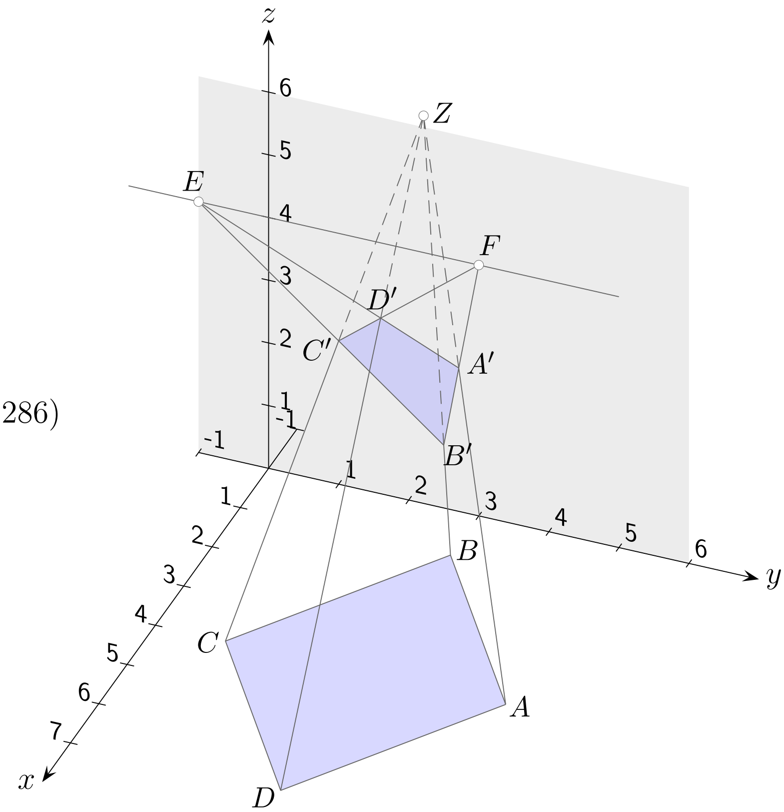
Projektionsrichtung sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Projiziere $A(4\,|\,-1\,|\,5)$, $B(4\,|\,0\,|\,1)$ und $C(8\,|\,-1\,|\,6)$ in die yz-Ebene.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad a = 1,\ b = -1/2$$

$$A'(0\,|\,3\,|\,3),\ B'(0\,|\,4\,|\,-1),\ C'(0\,|\,7\,|\,2)$$

Zentralprojektion



$Z(-3\,|\,1\,|\,4)$
$A(4\,|\,5\,|\,0)$
$B(1\,|\,3\,|\,0)$
$C(4\,|\,1\,|\,0)$
$D(7\,|\,3\,|\,0)$

$A'(0\,|\,19/7\,|\,16/7)$, $A'(0\,|\,2{,}714\,|\,2{,}286)$
$B'(0\,|\,2{,}5\,|\,1)$
$C'(0\,|\,1\,|\,16/7)$, $C'(0\,|\,1\,|\,2{,}286)$
$D'(0\,|\,8/5\,|\,14/5)$, $D'(0\,|\,1{,}6\,|\,2{,}8)$

$E(0\,|\,-1\,|\,4)$
$F(0\,|\,3\,|\,4)$

Sei $Z(a\,|\,b\,|\,c)$ das Projektionszentrum und die yz-Ebene die Bildebene.
Für die Berechnung des Bildpunktes P' eines Punktes $P(x\,|\,y\,|\,z)$ ist die Gerade

$$g\colon\ \vec{u} = \overrightarrow{OP} + \lambda\,\overrightarrow{ZP}$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{pmatrix}$$ mit der Bildebene zu schneiden.

Die Schnittbedingung $u_1 = 0$ führt zu $\lambda = \frac{x}{a-x}$ und den Abbildungsgleichungen:

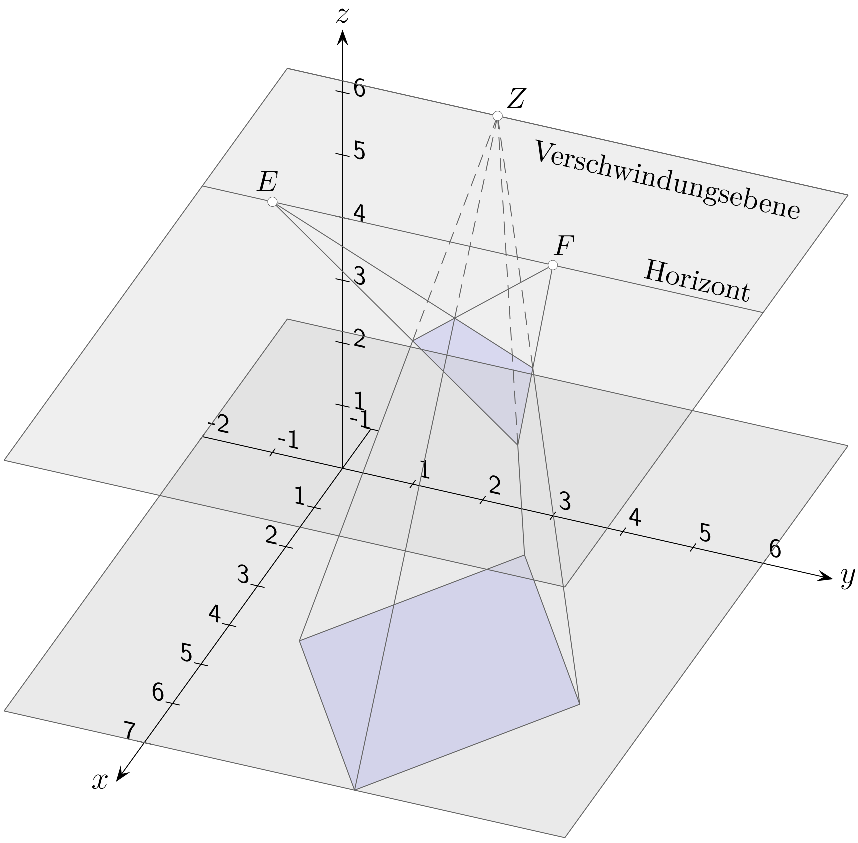
$$x' = 0$$

$$y' = \frac{ay-bx}{a-x}$$

$$z' = \frac{az-cx}{a-x}$$

A, B, C und D sind die Eckpunkte einer Raute.
Die Verlängerungen der Bilder ihrer parallelen Kanten schneiden sich jeweils in den *Fluchtpunkten* E und F.

Zentralprojektion



Die *Verschwindungsebene* ist parallel zur xy-Ebene und enthält das Projektionszentrum Z.
Die Schnittgerade von Verschwindungs- und Bildebene heißt *Horizont*.
Anschaulich offensichtlich: Auf ihm liegen die Fluchtpunkte E und F.
Die Eigenschaft einer Geraden, senkrecht zur xy-Ebene zu verlaufen, bleibt bei der Abbildung erhalten. Zusammengefasst: Eine parallele Geradenschar wird in eine Schar von Geraden abgebildet, die entweder ebenfalls parallel sind oder sich in einem Punkt auf dem Horizont schneiden.