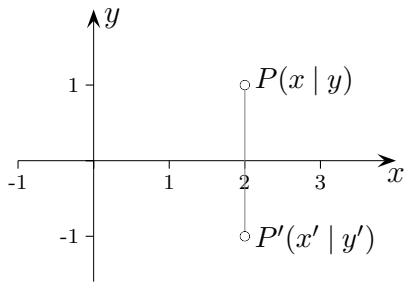


Abbildungen der Ebene, Abbildungsmatrix

a) Spiegelung an der x -Achse

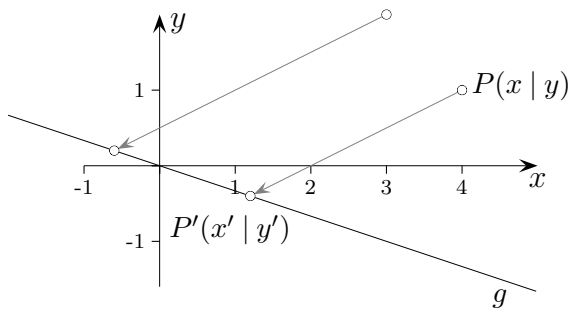


$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= -y \end{aligned} \quad \underline{\hspace{1cm}}$$

$$\begin{aligned} x' &= 1x + 0y \\ y' &= 0x - 1y \end{aligned} \quad \underline{\hspace{1cm}}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

b) Parallelprojektion auf eine Ursprungsgerade g , Projektionsrichtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$



Schnitt der Geraden $\vec{x} = \vec{OP} + t\vec{v}$ und $g: x + 3y = 0$ ergibt (Einsetzen) $t = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}y$.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{5}x + \frac{3}{5}y\right) \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

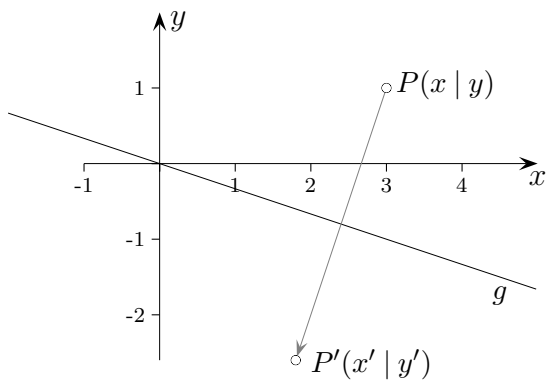
$$\dots$$

$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Bei einer orthogonalen Projektion auf die Gerade g ist der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Die Abbildungsmatrix lautet: $\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

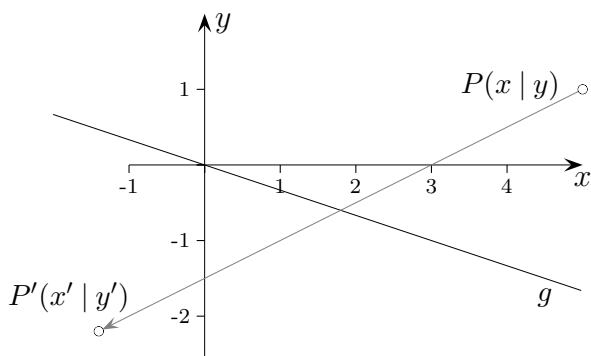
c) Spiegelung an einer Ursprungsgeraden g



Schnitt der Geraden $\vec{x} = \vec{OP} + t\vec{n}$ und $g: x+3y=0$ ergibt (Einsetzen) $t = \frac{1}{10}x + \frac{3}{10}y$, siehe orthogonale Projektion. t wird verdoppelt. Es ist nicht nötig, den Schnittpunkt zu berechnen.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2\left(\frac{1}{10}x + \frac{3}{10}y\right) \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &\dots \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d) Schrägspiegelung an g , Projektionsrichtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

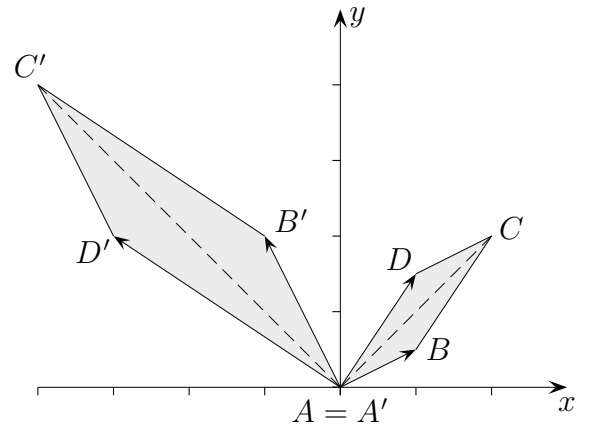


Schnitt der Geraden $\vec{x} = \vec{OP} + t\vec{v}$ und $g: x+3y=0$ ergibt (Einsetzen) $t = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}y$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2\left(\frac{1}{5}x + \frac{3}{5}y\right) \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &\dots \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -12 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lineare Abbildungen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ dx + ey \end{pmatrix}$$



- a) Die Bilder der Einheitsvektoren sind die Spalten der Abbildungsmatrix.
- b) Durch Nachrechnen wird bestätigt: $A \cdot (\lambda \vec{x}) = \lambda(A \cdot \vec{x})$ und $A \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = A \cdot \vec{x} + A \cdot \vec{y}$
 Das Bild einer Summe zweier Vektoren \vec{x} , \vec{y} kann auch als Summe der beiden Bildvektoren $A \cdot \vec{x}$, $A \cdot \vec{y}$ erhalten werden (siehe obige Grafik).
 Parallelogramme werden auf Parallelogramme abgebildet.

c) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$

Sei C durch $B \cdot (A \cdot \vec{x}) = C \cdot \vec{x}$ festgelegt. Dann gilt: $C = \begin{pmatrix} ea + fc & eb + fd \\ ga + hc & gb + hd \end{pmatrix}$

C wird als Produkt der Matrizen B und A aufgefasst: $C = B \cdot A$

Für die Bildung des Produkts gibt es eine einfache Merkregel:

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Drehung um den Ursprung

Die Drehung ist eine lineare Abbildung, da die Linearitätsbedingungen anschaulich erfüllt sind. Daher ergibt sich die Abbildungsmatrix durch die Abbildung der Einheitsvektoren.

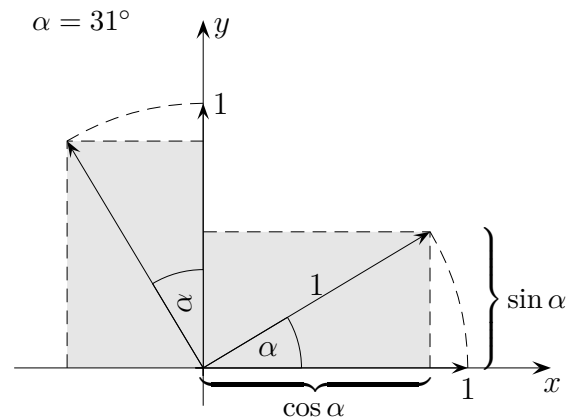
Erläutere:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \curvearrowright \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \curvearrowright \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \curvearrowright \begin{pmatrix} a \cos \alpha \\ a \sin \alpha \end{pmatrix}$$

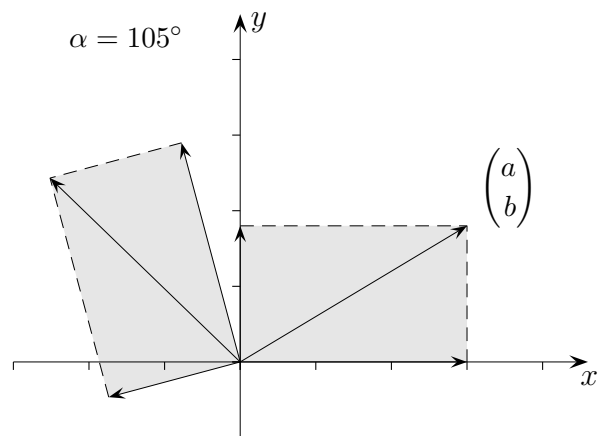
$$\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \curvearrowright \begin{pmatrix} -b \sin \alpha \\ b \cos \alpha \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \curvearrowright ?$$

$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \curvearrowright \begin{pmatrix} a \cos \alpha \\ a \sin \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b \sin \alpha \\ b \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \curvearrowright \begin{pmatrix} a \cos \alpha - b \sin \alpha \\ a \sin \alpha + b \cos \alpha \end{pmatrix}$$



In Matrix-Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Parallelprojektion auf die yz -Ebene

Diese Abbildungsart ist rechnerisch einfach, wenn

die Projektionsrichtung durch den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ festgelegt wird.

Eine Gerade durch $P(x_0 | y_0 | z_0)$ mit dem Richtungsvektor \vec{v} ist mit der yz -Ebene zu schneiden.

Ergebnis: $\lambda = x_0$

P wird somit auf $P'(0 | ax_0 + y_0 | bx_0 + z_0)$ abgebildet, insbesondere $Q(1 | 0 | 0)$ auf $Q'(0 | a | b)$.

Die Abbildungsgleichungen lauten dann ($x'_0 = 0$):

$$y'_0 = ax_0 + y_0$$

$$z'_0 = bx_0 + z_0$$

oder in Matrix-Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} y'_0 \\ z'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

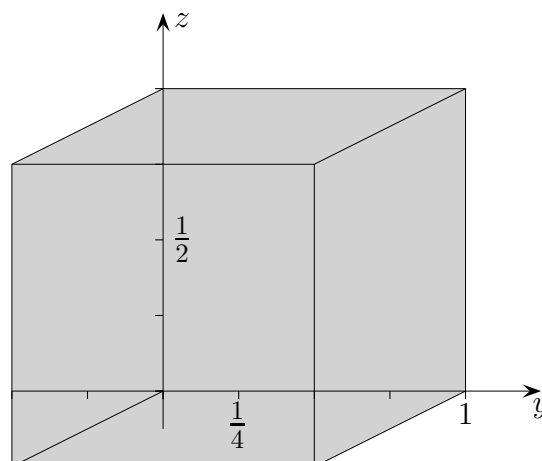
Die zweidimensionalen Spaltenvektoren der Matrix sind die Bilder der dreidimensionalen Basisvektoren \vec{e}_i .

Betrachten wir nun die Abbildung des Einheitswürfels für $a = -\frac{1}{2}$ und $b = -\frac{1}{4}$.
Hierbei gilt z.B.:

$$E_1(1 | 0 | 0) \longrightarrow E'_1\left(0 \mid -\frac{1}{2} \mid -\frac{1}{4}\right)$$

$$E_2(1 | 1 | 0) \longrightarrow E'_2\left(0 \mid \frac{1}{2} \mid -\frac{1}{4}\right)$$

Insgesamt ergibt sich das Bild:



Diese Art der Berechnung von Punktkoordinaten für Schrägbilder ist seit 2018 im KC Ni enthalten.

Parallelprojektion auf eine Ebene

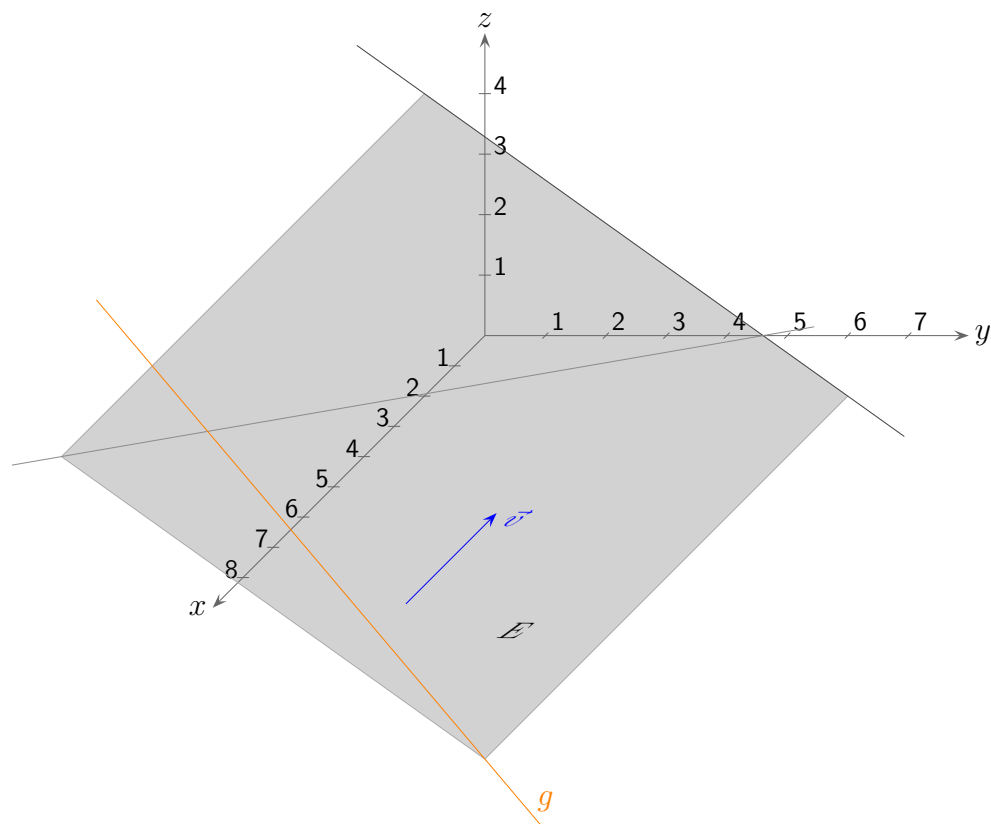
Wie lautet die Matrix A der Projektion, die beliebige Raumpunkte $P(x | y | z)$

parallel in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ auf die Ebene $E : x - y + z = 0$ abbildet?

Schnitt der Gerade $\vec{x} = \vec{OP} + t\vec{v}$ mit E ergibt (Einsetzen) $t = -x + y - z$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (-x + y - z) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &\dots \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Parallelprojektion auf die yz -Ebene

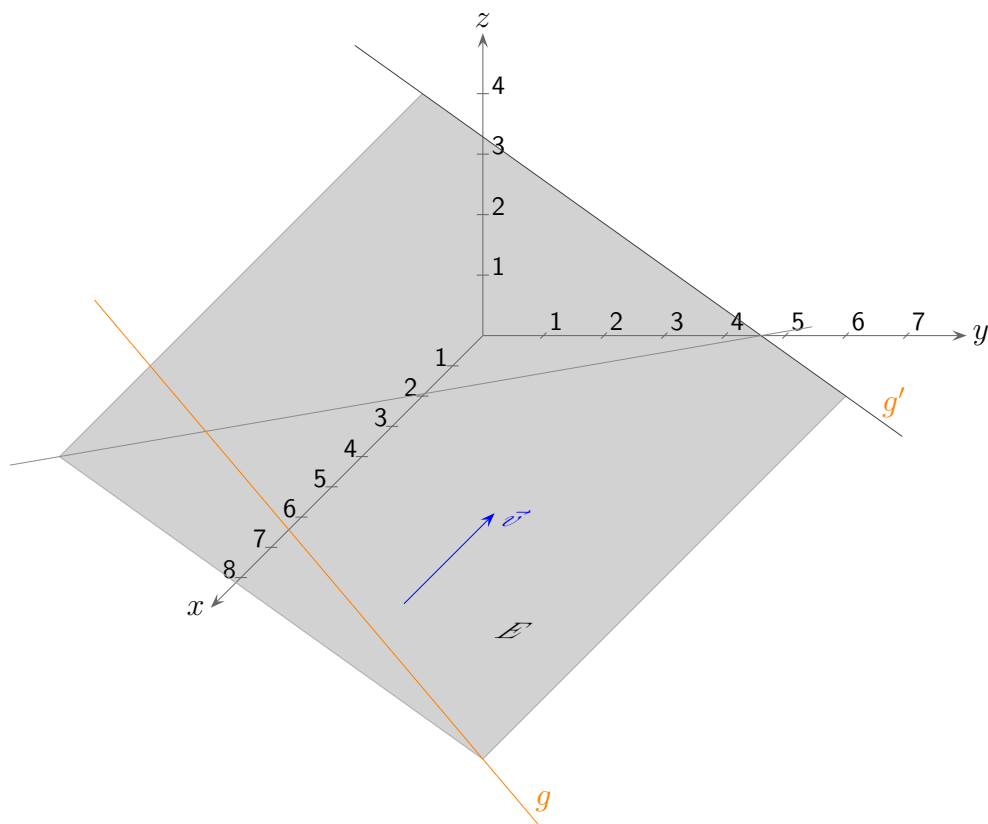


Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gibt die Projektionsrichtung an.

Ermittle das Bild der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Die Grafik enthält die Spurgerade von E in der xy -Ebene.

Parallelprojektion auf die yz -Ebene



Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gibt die Projektionsrichtung an.

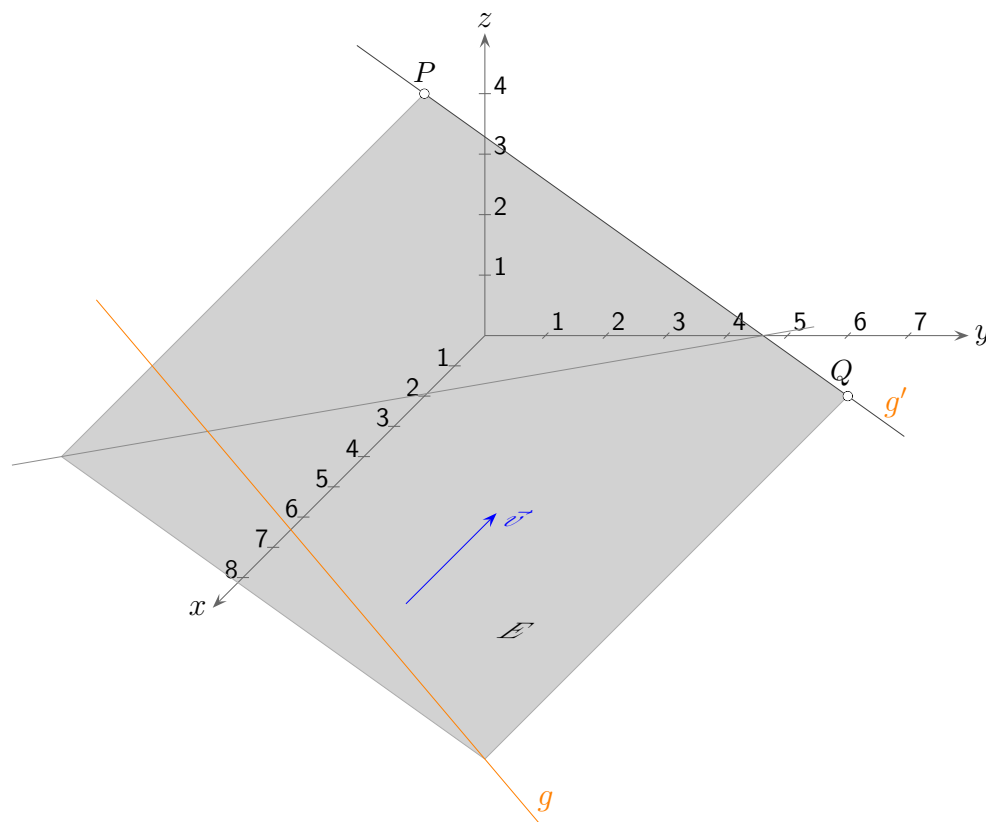
Ermittle das Bild der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Abbildungsgleichung:

$$\begin{pmatrix} y'_0 \\ z'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \quad a = 1, b = 1$$

$g': \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$ g in die Abbildungsgleichung einsetzen und ausrechnen

Parallelprojektion auf die yz -Ebene



Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gibt die Projektionsrichtung an.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

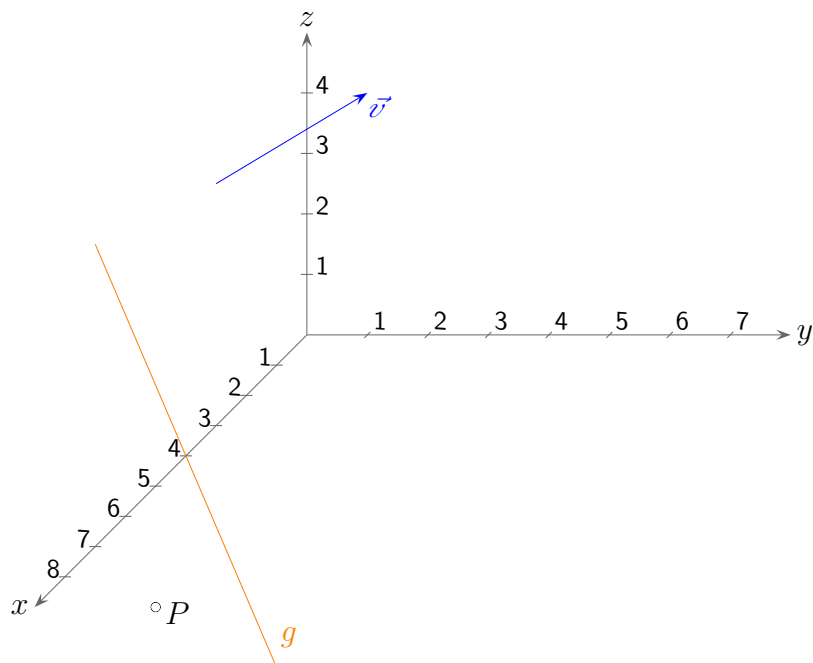
Alle Geraden in E : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sowie E werden auf g' abgebildet.

E : $12x + 5y + 7z = 23$, Spurpunkte in der yz -Ebene: $P(0 \mid -1 \mid 4)$ und $Q(0 \mid 6 \mid -1)$

Beachte: $\vec{n} \perp \vec{v}$

Die Bildgerade einer Ebene E^* mit $\vec{n}^* \perp \vec{v}$ kann mit zwei Spurpunkten ermittelt werden, für $\vec{n}^* \not\perp \vec{v}$ ist das Bild die yz -Ebene.

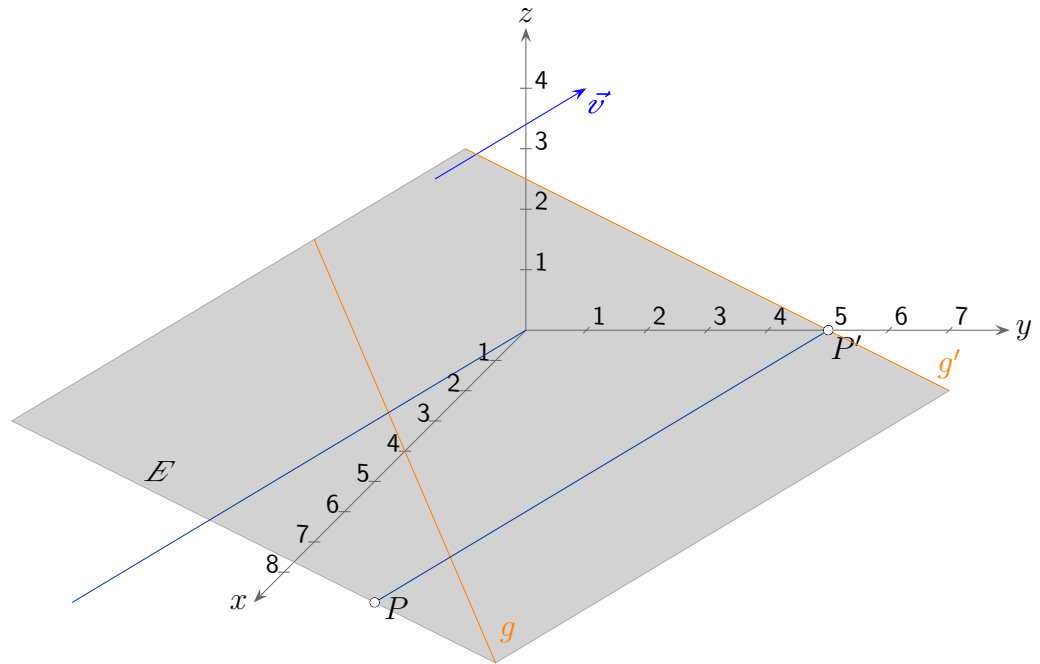
Parallelprojektion auf die yz -Ebene



Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ gibt die Projektionsrichtung an.

- Ermittle die Bilder von $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $P(3 \mid -1 \mid -3)$.
- Welche Punkte werden auch auf P' (Bild von P) abgebildet?
- Ermittle die Normalenform der Ebene E , in der P und g liegen.
- Untersuche, ob das Bild von g die Spurgerade von E in der yz -Ebene ist.

Parallelprojektion auf die yz -Ebene



Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ gibt die Projektionsrichtung an.

a) Ermittle die Bilder von $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $P(3 \mid -1 \mid -3)$.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = 2, \quad b = 1, \quad g': \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P'(0 \mid 5 \mid 0)$$

b) Welche Punkte werden auch auf P' (Bild von P) abgebildet? $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Kern der Abbildung}}$

Der Kern einer Abbildung besteht aus allen Ortsvektoren, die auf den Nullvektor abgebildet werden.

c) Ermittle die Normalenform der Ebene E , in der P und g liegen. $E: 4x + y + 2z = 5$

d) Untersuche, ob das Bild von g die Spurgerade von E in der yz -Ebene ist. Beachte: $\vec{n} \perp \vec{v}$
Spurgerade g'