Lineare Gleichungssysteme

Durch die Umformungen

1. Vertauschen zweier Zeilen,
2. Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl k $(\neq 0)$,
3. Addition des k-fachen einer Zeile zu einer anderen,

bei denen die Lösungsmenge erhalten bleibt, kann ein lineares Gleichungssystem in die Diagonalform gebracht werden.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & -3 \\
2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & = & -1 \\
2x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & + & 8x_4 & = & -11 \\
-x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & + & x_4 & = & -7 \\
\hline
x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & -3 \\
 & - & x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 5 \\
 & & x_2 & - & 3x_3 & + & 2x_4 & = & -5 \\
 & & 2x_2 & - & 6x_3 & + & 4x_4 & = & -10 \\
\hline
x_1 & & & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 2 \\
 & & x_2 & - & 3x_3 & + & 2x_4 & = & -5 \\
\hline
\end{array}$$

Koeffizientenschema:

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	0	2	1	2
0	1	−3	2	−5

Aus den letzten beiden Zeilen kann die Lösung unmittelbar abgelesen werden.

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & = & 2 & - & 2x_3 & - & x_4 \\
x_2 & = & -5 & + & 3x_3 & - & 2x_4
\end{array}$$

Da man x_3 und x_4 auf beliebige Weise vorwählen kann, hat das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen. Die allgemeine Lösung (als Vektor geschrieben) lautet:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 & - & 2x_3 & - & x_4 \\ -5 & + & 3x_3 & - & 2x_4 \\ & & x_3 & & \\ & & & & x_4 \end{pmatrix}$$

Das Charakteristische dieses Vorgehens ist dem Koeffizientenschema abzulesen.
Unter den ersten beiden Variablen stehen die (linear unabhängigen) Einheitsvektoren.

Aufg.
Wie lautet die Lösung des Gleichungssystems mit folgendem Koeffizientenschema?

x_1	x_5	x_3	x_2	x_4	b
1	0	0	2	0	10
0	1	0	3	−32	20
0	0	1	−4	−2	30

Lineare Gleichungssysteme, unendlich viele bzw. keine Lösung(en), GTR

Mit dem GTR kann für das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & -3 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & = & -1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & + & 8x_4 & = & -11 \\ -x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & + & x_4 & = & -7 \end{array}$$

das Koeffizientenschema der Diagonalform ermittelt werden.

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	0	2	1	2
0	1	−3	2	−5
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

An den 0-Zeilen ist erkennbar, dass es unendlich viele Lösungen gibt.

Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & -3 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & = & -1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & + & 8x_4 & = & -11 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & + & 8x_4 & = & -10 \end{array}$$

hat sicherlich keine Lösung (beachte die letzten beiden Zeilen).

Die Ausgabe des GTR lautet nun:

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	0	2	1	0
0	1	−3	2	0
0	0	0	0	1
0	0	0	0	0

Die 01-Zeile signalisiert, dass das lineare Gleichungssystem unlösbar ist ($0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \neq 1$).

Rang einer Matrix

Im Koeffizientenschema der letzten Aufgabe sind drei (linear unabhängige) Einheitsvektoren vorhanden. x_2 und x_4 können beliebig vorgewählt werden, die Variablen $x_1,\ x_5,\ x_3$ sind dann eindeutig festgelegt. Deren Anzahl heißt Rang der Matrix.
Allgemein ist der Rang einer Matrix die maximale Anzahl der linear unabhängigen Spaltenvektoren.

Die angegebenen Zeilenumformungen verändern nicht Rang. Dies lässt sich unschwer zeigen.

Seien z.B. die Vektoren $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ linear unabhängig,

dann sind es auch die Vektoren $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 + ka_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 + kb_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 + kc_2 \end{pmatrix}.$

Begündung:

Sei $\quad \lambda_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 + ka_2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 + kb_2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 + kc_2 \end{pmatrix} \ = \ 0$

$$\Longrightarrow \quad \lambda_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \ = \ -k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_1 a_2 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 c_2 \end{pmatrix}$$

Aus der 2. Zeile folgt $\quad \lambda_1 a_2 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 c_2 = 0 \quad$ und mit der Voraussetzung ist $\quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

Aufg.
Formuliere und begründe (eventuell mit dem Begriff Rang einer Matrix) Bedingungen, unter denen ein lineares Gleichungssystem $A\,\vec{x} = \ \vec{b}$

a) eindeutig lösbar,
b) mehrdeutig lösbar,
c) nicht lösbar ist.

Um den Rang einer Matrix zu bestimmen, könnten auf die Matrix auch zu den Zeilenumformungen analoge Spaltenumformungen angewandt werden. Sie ändern den Rang ebenfalls nicht.

Begündungsskizze: Sei der Rang einer Matrix 3 und

$\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ linear unabhängig $\quad \Longrightarrow \quad$ linear unabhängig sind

$\vec{a},\ \vec{b} + k\vec{c},\ \vec{c}$

$\vec{a},\ \vec{b} + k\vec{d},\ \vec{c}$ falls $\vec{d}$ eine Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{c}$ ist,

$\vec{a},\ \vec{d},\ \vec{c}$ falls $\vec{d}$ keine Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{c}$ ist.

Im letzten Fall müssen $\vec{a},\ \vec{b}+k\vec{d},\ \vec{c},\ \vec{d}$ linear abhängig sein, da sonst im Widerspruch zur Voraussetzung 4 linear unabhängige Vektoren $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c},\ \vec{d}$ vorhanden wären. Der Rang ändert sich also nicht.