

Merkhilfe Vektorrechnung

1. Was ist ein Vektor?

2. Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB} = ?$

3. Punkte A und B , Gerade g
Punkte A , B und C , Ebene E

4. Mitte M der Strecke \overline{AB} $\overrightarrow{OM} = ?$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

5. Betrag des Vektors $|\vec{a}| = ?$

6. Einheitsvektor $\vec{a}^\circ = ?$

7. Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b} = ?$
oder

8. Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b} = ?$
 $A_{\text{Parallelogramm (Raute)}} = ?$
 $A_{\text{Dreieck}} = ?$

9. Punkte A , B und C , Normalenform der Ebenengleichung
HNF

10. P teilt die Strecke \overline{AB} im Verhältnis 2:1 $\overrightarrow{OP} = ?$

11. Winkel α zwischen
Vektoren
Geraden
Ebenen
Gerade und Ebene

12. \vec{a}, \vec{b} linear abhängig (kollinear)

13. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear abhängig (komplanar)

14. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear unabhängig

15. Abstand Punkt A , Gerade $g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{u}$
GTR

Punkt A , Ebene $E: \vec{n} \circ \vec{x} - a = 0$

Ursprung, Ebene $E: \vec{n} \circ \vec{x} - a = 0$

windschiefe Geraden

$g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{u}$

$h: \vec{x} = \vec{b} + \mu \vec{v}$

Fußpunkte

16. Q liegt auf dem Dreieck, das durch die Ortsvektoren \vec{a} und \vec{b} gegeben ist.

17. Volumen eines Spats $V_{\text{Spat}} = ?$

18. Winkelhalbierende, Ortsvektoren \vec{a} und \vec{b}

19. Lagebeziehung zwischen Ebenen

$$E_1: \vec{n}_1 \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$$

$$E_2: \vec{n}_2 \cdot (\vec{x} - \vec{b}) = 0$$

$$E_1 \parallel E_2, E_1 \subsetneq E_2$$

$$E_1 = E_2$$

$$E_1 \perp E_2$$

E_1 und E_2 schneiden sich in einer Geraden.

20. Lagebeziehung zwischen Geraden

$$g: \vec{x} = \vec{a} + s\vec{u}$$

$$h: \vec{x} = \vec{b} + t\vec{v}$$

$$g \parallel h, g \neq h$$

$$g = h$$

$$g \perp h$$

g und h haben genau einen Schnittpunkt.

g und h sind windschief.

21. Lagebeziehung zwischen Gerade und Ebene

$$g: \vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}$$

$$E: \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{b}) = 0$$

$$g \parallel E, g \subsetneq E$$

$$g \subset E$$

$$g \perp E$$

g und E schneiden sich in einem Punkt.

22. Spurpunkte einer Geraden

Spurgerade einer Ebene

23. Lagebeziehungen GTR

Gerade/Gerade

Gerade/Ebene

Ebene/Ebene

allgemein

24. Punkt A spiegeln

an der Ebene E

am Punkt Q

an der Geraden g

25. Schwerpunkt eines Dreiecks

26. Punkte A, B, C ergänzen zu

einem Parallelogramm

einer Raute

einem Quadrat

Ende der Merkhilfe Vektorrechnung

[zum Anfang](#)

[zur Merkhilfe](#)

[Grundwissen](#)

[Differenzialrechnung](#)

[Integralrechnung](#)

[Stochastik](#)

[Homepage](#)

Mit Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ im \mathbb{R}^3 (entsprechend im \mathbb{R}^2) können Punkte
 oder Richtungen festgelegt werden.

Bei der Addition $\vec{a} + \vec{b}$ von Vektoren beinhaltet ein Summand (Vektor) die Koordinaten-
 änderungen des anderen Summanden.

Die verschiedenen Bezeichnungen wie

Ortsvektor \vec{OA} (Stützvektor),

Verbindungsvektor \vec{AB} (Verschiebungsvektor),

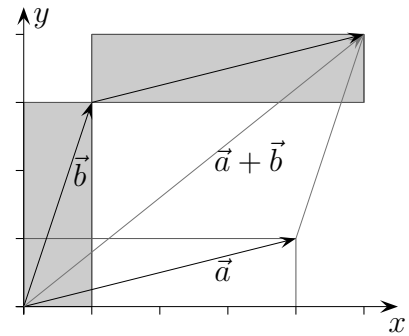
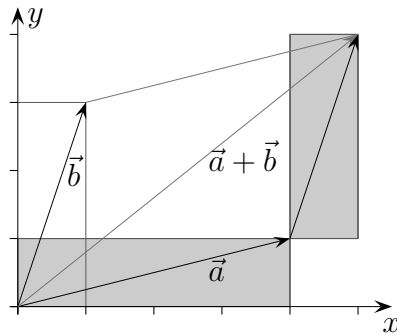
Richtungsvektor \vec{u} (die Länge ist unerheblich)

ergeben sich daraus, ob in erster Linie ein Punkt oder eine Richtung festgelegt werden soll.

Für Vektoren sind beide Interpretationen (gleichzeitig) möglich.

Vektoren sind daher von zwittriger Natur.

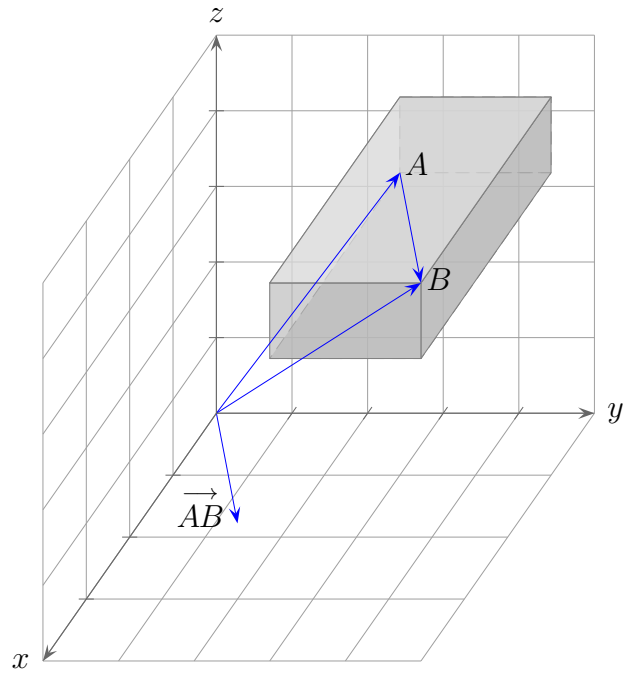
Neben der Bezeichnung legt der Anwendungskontext den Verwendungsschwerpunkt nahe.



Verbindungsvektor

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

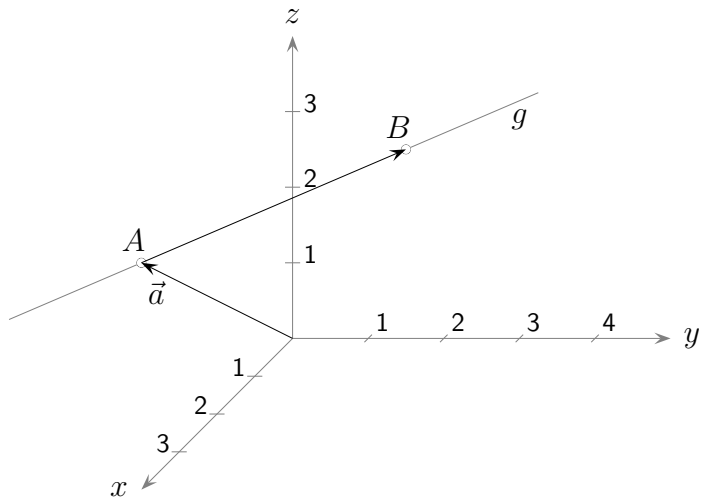
„Spitze minus Fuß“



Punkte A und B , Gerade g

$$g: \vec{x} = \vec{OA} + \lambda \vec{AB} \quad (\text{z.B.})$$

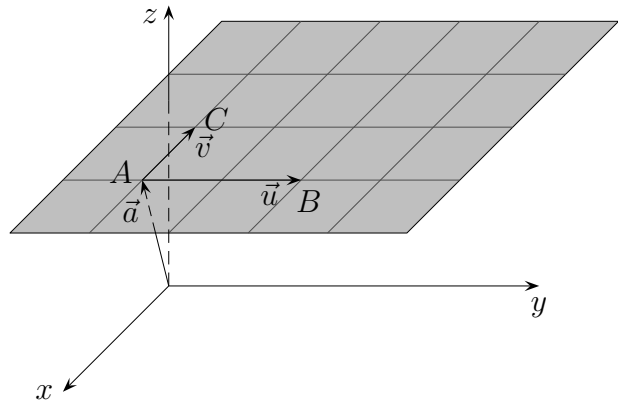
Punkte A , B und C , Ebene E



Punkte A und B , Gerade g

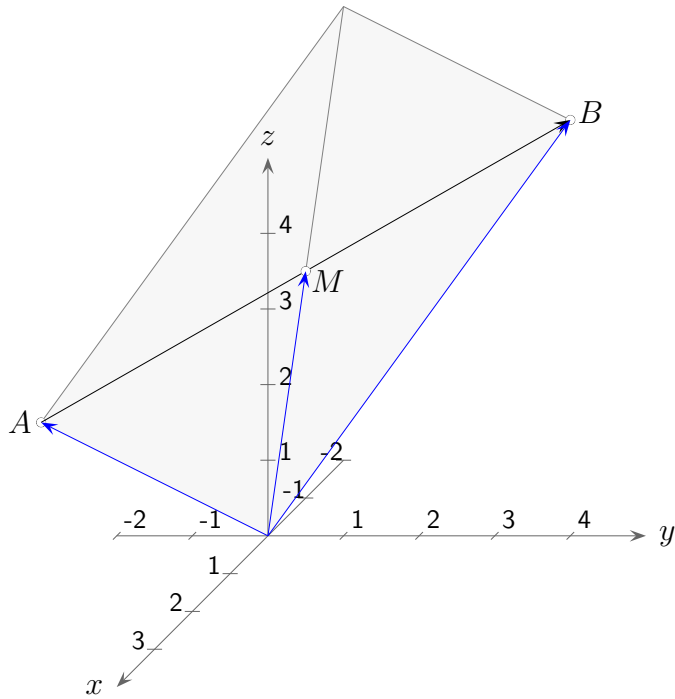
Punkte A , B und C , Ebene E

$$E: \vec{x} = \vec{OA} + \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AC} \quad (\text{z. B.})$$



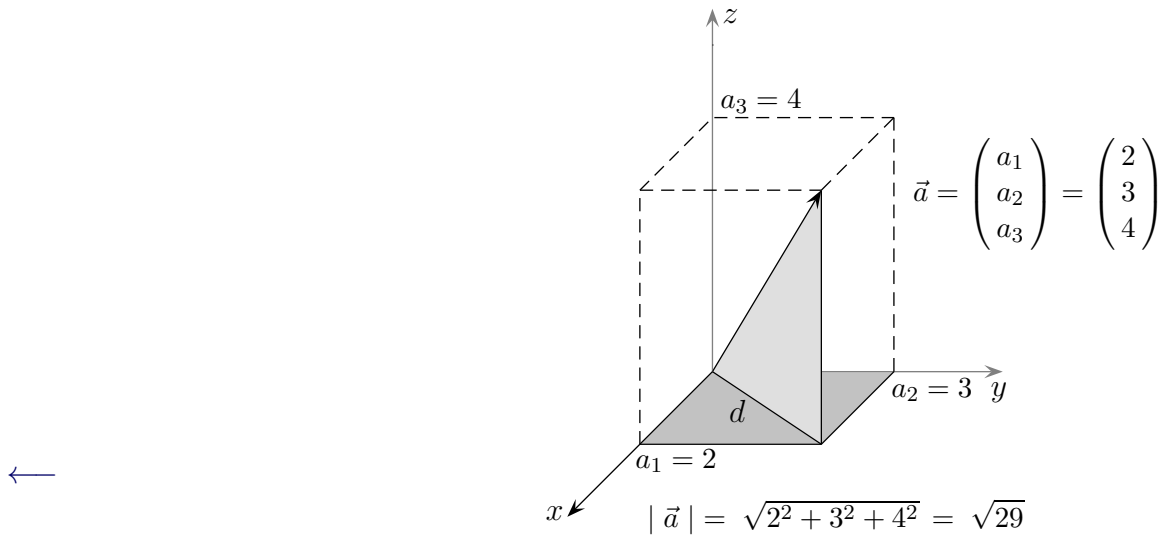
Mitte M der Strecke \overline{AB} $\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$

oder $\vec{OM} = \vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{AB}$



Betrag des Vektors

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{\vec{a}^2}$$

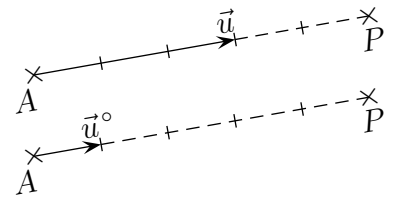


Einheitsvektor

$$\vec{a}^\circ = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$$

$|\vec{u}| = 3$. Vektoren wie $\vec{u}^\circ = \frac{1}{3} \vec{u}$ mit der Länge 1 heißen Einheitsvektoren. Mit ihnen können Punkte mit vorgegebener Entfernung und Richtung ermittelt werden.

←



Skalarprodukt
oder

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$



Skalarprodukt

oder

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$



Vektorprodukt

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$A_{\text{Parallelogramm (Raute)}} = ?$$

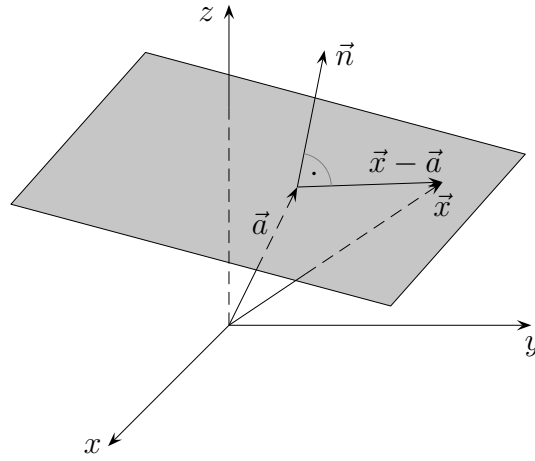
$$A_{\text{Dreieck}} = ?$$

←

Punkte A , B und C , Normalenform der Ebenengleichung $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{OA}) = 0$

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} \quad (\text{z. B.})$$

HNF



Punkte A , B und C , Normalenform der Ebenengleichung

HNF Hessesche Normalenform

$$\vec{n}^\circ \cdot (\vec{x} - \vec{OA}) = 0$$

←

Vektorprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = ?$$

$$A_{\text{Parallelogramm (Raute)}} = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$A_{\text{Dreieck}} = ?$$



Beachte die Vereinfachung, wenn ein Rechteck vorliegt.

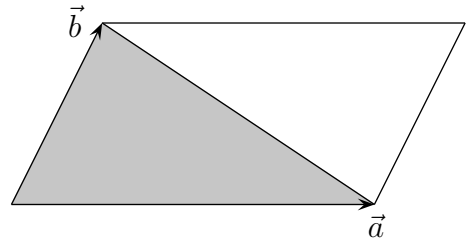


Vektorprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = ?$$

$$A_{\text{Parallelogramm (Raute)}} = ?$$

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$



Beachte die Vereinfachung, wenn das Dreieck rechtwinklig ist.



P teilt die Strecke \overline{AB} im Verhältnis 2:1

$$\vec{OP} = \vec{OA} + \frac{2}{3} \vec{AB}$$



Winkel α zwischen

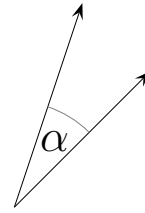
Vektoren

Geraden

Ebenen

Gerade und Ebene

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$



Winkel α zwischen

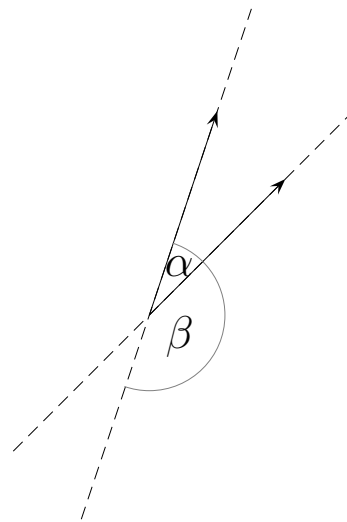
Vektoren

Geraden

Ebenen

Gerade und Ebene

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$$



Beachte: Kanten können auch den Winkel $\beta = 180^\circ - \alpha$ einschließen.

Winkel α zwischen

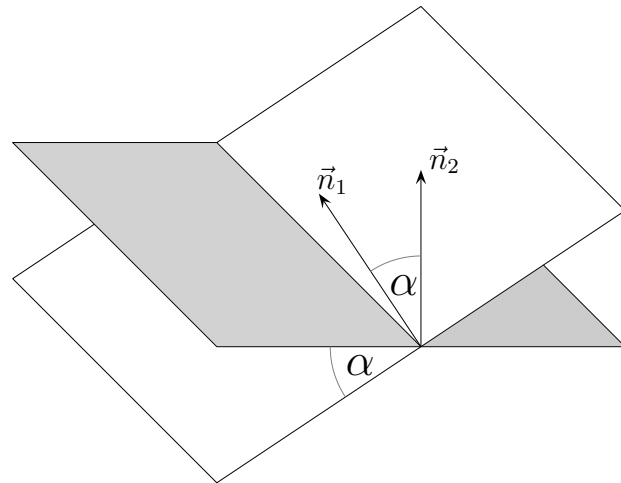
Vektoren

Geraden

Ebenen

Gerade und Ebene

$$|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2| = |\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2| \cdot \cos \alpha$$



Beachte: (Dach-)Flächen können auch den Winkel $\beta = 180^\circ - \alpha$ einschließen.

Winkel α zwischen

Vektoren

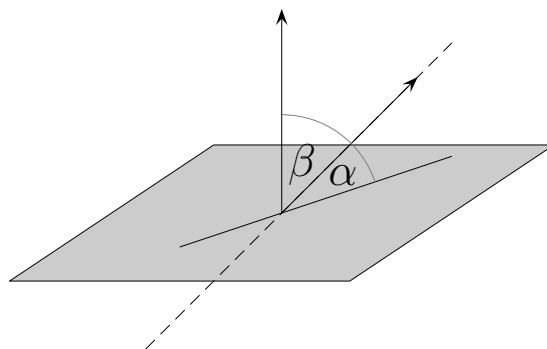
Geraden

Ebenen

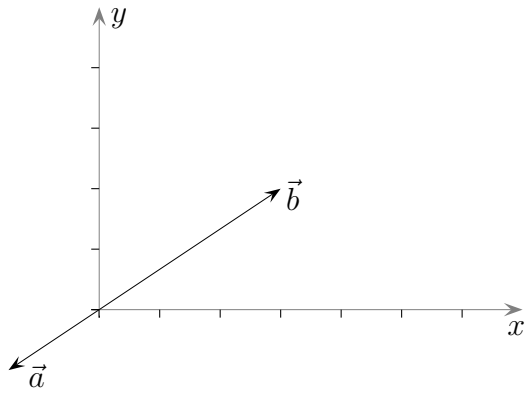
Gerade und Ebene

$$|\vec{u} \cdot \vec{n}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{n}| \cdot \sin \alpha$$

verschiedene Objekte, sin verwenden

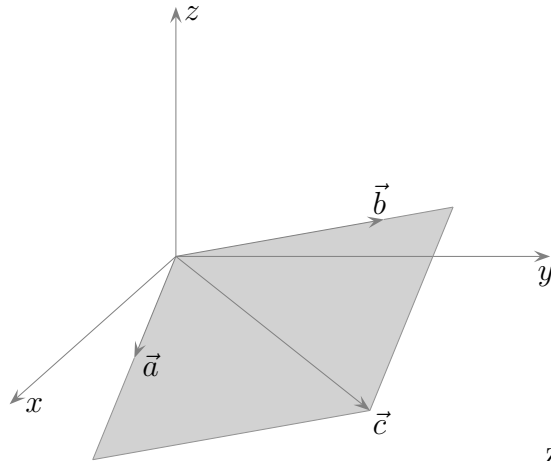


\vec{a}, \vec{b} linear abhängig (kollinear) $\vec{a} = \lambda \vec{b}$

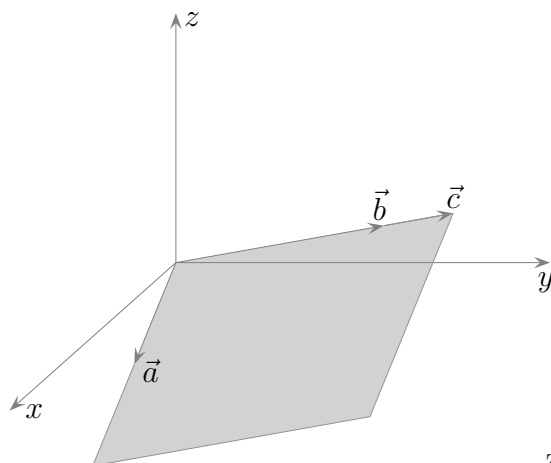


$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear abhängig (komplanar)

Ein Vektor (mindestens) kann als Linearkombination der Übrigen dargestellt werden.



z.B. $\vec{b} = r\vec{a} + s\vec{c}$



z.B. $\vec{c} = t\vec{b} + 0 \cdot \vec{a}$

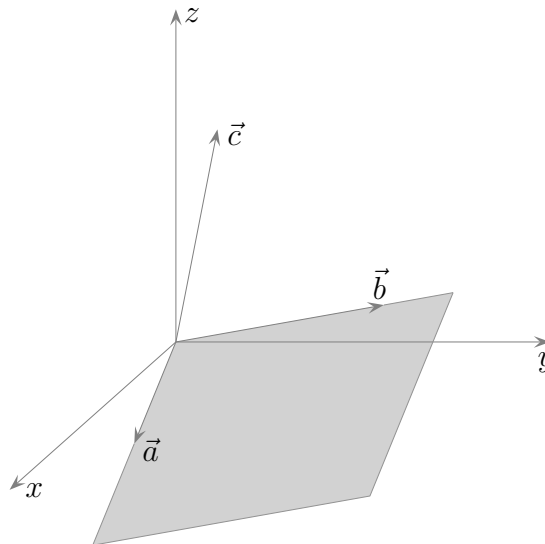
Das Spatvolumen ist genau dann null.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear unabhängig

Kein Vektor kann als Linearkombination der Übrigen dargestellt werden.

Aus $\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c} = \vec{0}$ folgt, dass alle λ_i null sind.

←



Abstand Punkt A , Gerade g : $\vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{u}$ Bedingung $\vec{AP} \perp \vec{u}$
 laufender Punkt $\vec{OP} = \vec{a} + \lambda \vec{u}$
 oder $\vec{PA} \perp \vec{u}$ (auf Klammern achten)

GTR

Punkt A , Ebene E : $\vec{n} \circ \vec{x} - a = 0$

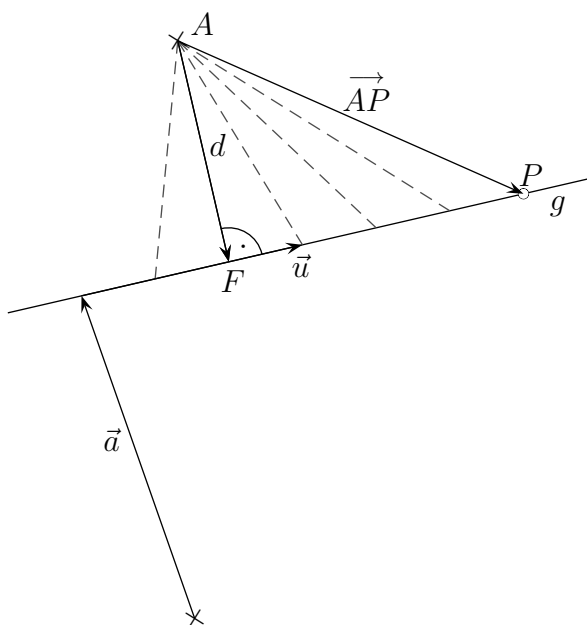
Ursprung, Ebene E : $\vec{n} \circ \vec{x} - a = 0$

windschiefe Geraden

g : $\vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{u}$

h : $\vec{x} = \vec{b} + \mu \vec{v}$

Fußpunkte



←

alternativ:

Wir legen zunächst eine Ebene (Normalenform) durch A , die senkrecht auf g steht.

Als Stützvektor nehmen wir \vec{OA} , als Normalenvektor den Richtungsvektor der Geraden g .
 Dann berechnen wir den Schnittpunkt F dieser Ebene mit g .

Der gesuchte Abstand d wird dann mit $d = |\vec{FA}|$ bestimmt.

alternativ:

λ lässt sich aus $(\vec{a} + \lambda \vec{u} - \vec{OA}) \cdot \vec{u} = 0$ allgemein berechnen: $\lambda = \frac{(\vec{OA} - \vec{a}) \cdot \vec{u}}{\vec{u}^2}$

λ eingesetzt in die Geradengleichung ergibt den Fußpunkt F und schließlich gilt: $d = |\vec{OF} - \vec{OA}|$

Abstand Punkt A , Gerade g : $\vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{u}$

GTR

$$d(\lambda) = |\vec{a} + \lambda \vec{u} - \vec{OA}| \quad \text{Minimum}$$

Punkt A , Ebene E : $\vec{n}^\circ \vec{x} - a = 0$

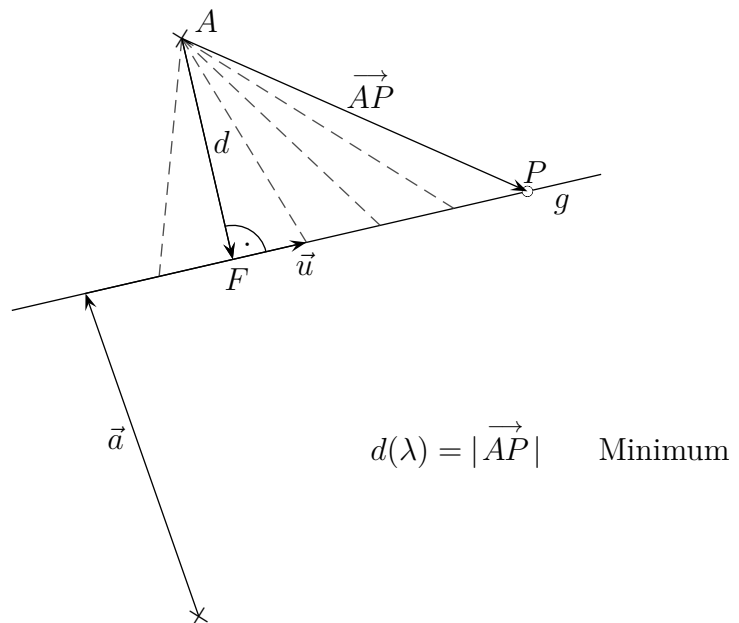
Ursprung, Ebene E : $\vec{n}^\circ \vec{x} - a = 0$

windschiefe Geraden

$$g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{u}$$

$$h: \vec{x} = \vec{b} + \mu \vec{v}$$

Fußpunkte



←

Empfehlenswert ist, die Vektoren \vec{a} und \vec{OA} zusammenzufassen.

Der Betrag wird wie üblich mit einer Wurzel aus einer Quadratsumme gebildet.

$$d(\lambda) = \sqrt{(\dots + \lambda u_1)^2 + (\dots + \lambda u_2)^2 + (\dots + \lambda u_3)^2}$$

Berechne den Fußpunkt und den Abstand: $P(5 \mid 1 \mid -2)$, $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ergebnis: $F(4 \mid 2 \mid -4)$, $\lambda = 2$, $d = \sqrt{6}$

Abstand

Punkt A , Gerade g : $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$

GTR

Punkt A , Ebene E : $\vec{n}^\circ \vec{x} - a = 0$ $d = |\vec{n}^\circ \vec{OA} - a|$

Ursprung, Ebene E : $\vec{n}^\circ \vec{x} - a = 0$

windschiefe Geraden

g : $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$

h : $\vec{x} = \vec{b} + \mu\vec{v}$

Fußpunkte

←

Um den Abstand eines Punktes A von einer Ebene E zu bestimmen, setzt man für \vec{x} in die linke Seite der Hesseschen Normalenform den Vektor \vec{OA} ein und nimmt den Betrag.

Abstand Punkt A , Gerade g : $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$
 GTR

Punkt A , Ebene E : $\vec{n}^\circ \vec{x} - a = 0$

Ursprung, Ebene E : $\vec{n}^\circ \vec{x} - a = 0$ $d = a$

windschiefe Geraden

g : $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$
 h : $\vec{x} = \vec{b} + \mu\vec{v}$

Fußpunkte

←

Um den Abstand des Ursprungs von einer Ebene E zu bestimmen, setzt man für \vec{x} in die linke Seite der Hesseschen Normalenform den Nullvektor $\vec{0}$ ein und nimmt den Betrag.

Abstand

Punkt A , Gerade g : $\vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{u}$

GTR

Punkt A , Ebene E : $\vec{n}^\circ \vec{x} - a = 0$

Ursprung, Ebene E : $\vec{n}^\circ \vec{x} - a = 0$

windschiefe Geraden

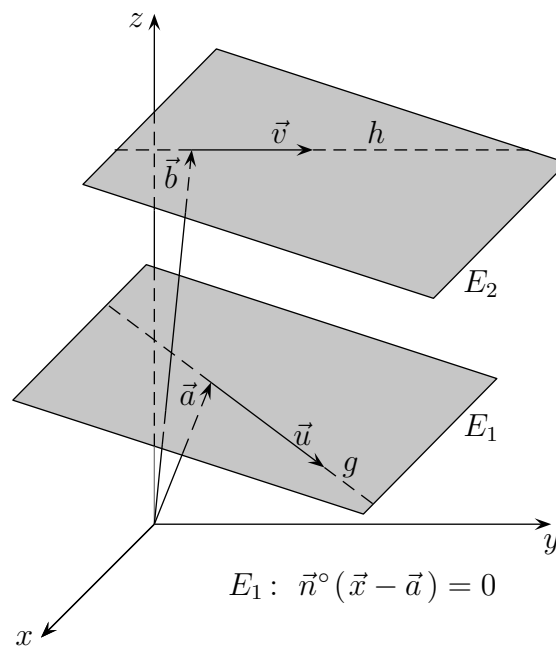
g : $\vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{u}$

h : $\vec{x} = \vec{b} + \mu \vec{v}$

$$d(g, h) = |\vec{n}^\circ (\vec{b} - \vec{a})|$$

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$$

Fußpunkte



←

Abstand

Punkt A , Gerade g : $\vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{u}$

GTR

Punkt A , Ebene E : $\vec{n} \circ \vec{x} - a = 0$

Ursprung, Ebene E : $\vec{n} \circ \vec{x} - a = 0$

windschiefe Geraden

g : $\vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{u}$

h : $\vec{x} = \vec{b} + \mu \vec{v}$

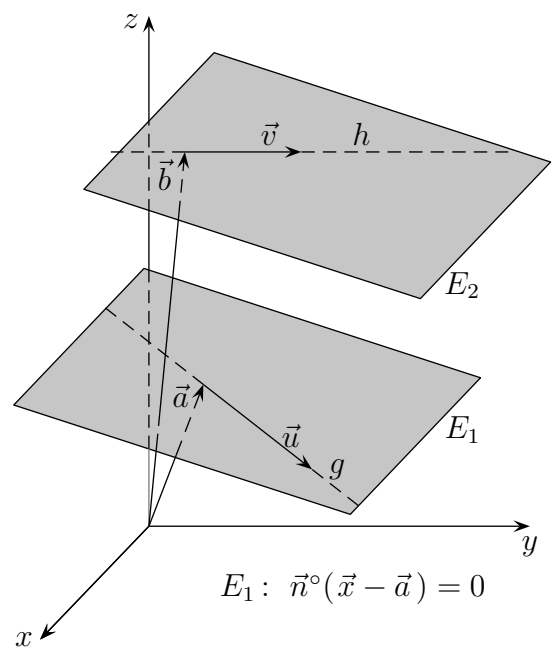
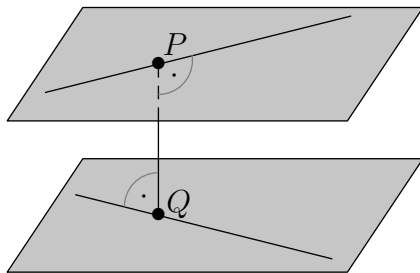
Fußpunkte

Bedingungen (Gleichungssystem für λ und μ)

$\vec{PQ} \perp \vec{u}$, $\vec{PQ} \perp \vec{v}$

laufende Punkte auf g und h :

$\vec{OP} = \vec{a} + \lambda \vec{u}$, $\vec{OQ} = \vec{b} + \mu \vec{v}$

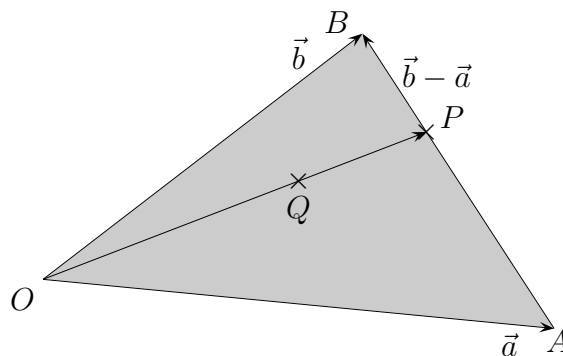


Q liegt auf dem Dreieck, das durch die Ortsvektoren \vec{a} und \vec{b} gegeben ist.

Wenn \vec{OQ} als Linearkombination von \vec{a} und \vec{b} dargestellt wird, muss die Summe der Koeffizienten kleiner gleich 1 sein.

Für einen Punkt P auf der Strecke \overline{AB} gilt:

$$\begin{aligned}\vec{OP} &= \vec{a} + m(\vec{b} - \vec{a}) \quad \text{mit} \quad 0 \leq m \leq 1 \\ &= \vec{a} + m\vec{b} - m\vec{a} \\ &= \underbrace{(1-m)}_n \vec{a} + m\vec{b}\end{aligned}$$



P liegt daher genau dann auf der Strecke \overline{AB} , wenn für $\vec{OP} = n\vec{a} + m\vec{b}$ die Summe der (nicht negativen) Koeffizienten 1 ergibt, $n + m = 1$.

←

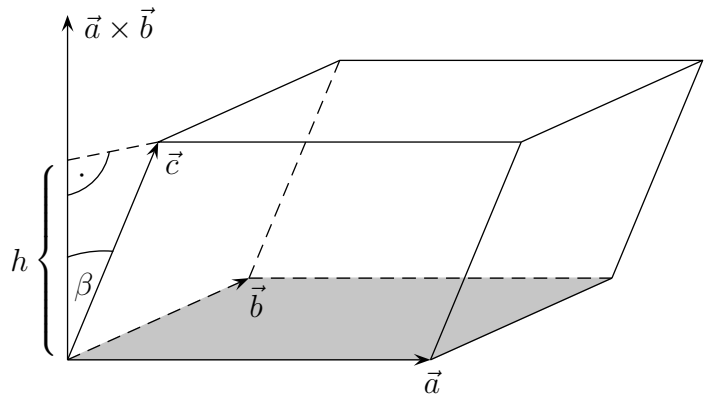
Volumen eines Spats

$$V_{\text{Spat}} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

(Tipp: $h = |\vec{c}| \cdot \cos \beta$)

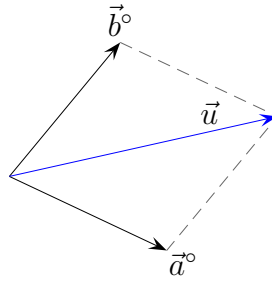
Ein Spat ist ein gescherter Quader.

Genauer müsste der Betrag genommen werden, da beim Vertauschen der Vektoren das Ergebnis auch negativ werden kann.



Winkelhalbierende, Ortsvektoren \vec{a} und \vec{b}

Richtungsvektor $\vec{u} = \vec{a}^\circ + \vec{b}^\circ$



Lagebeziehung zwischen Ebenen

$$E_1: \vec{n}_1 \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$$

$$E_2: \vec{n}_2 \cdot (\vec{x} - \vec{b}) = 0$$

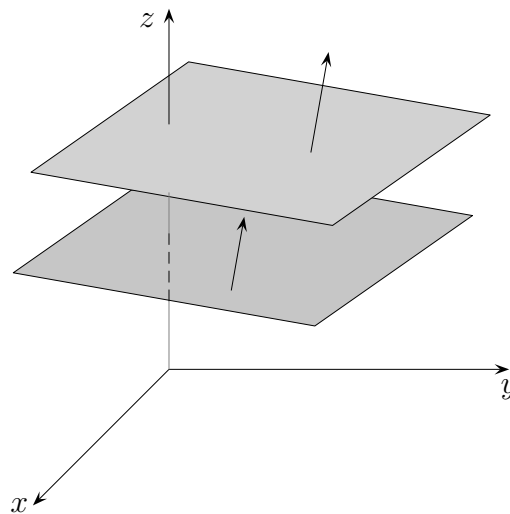
$E_1 \parallel E_2, E_1 \subsetneq E_2$ $\vec{n}_1 = r\vec{n}_2$, die Normalenvektoren sind kollinear (linear abhängig) und der Ortsvektor \vec{a} führt nicht zu E_2 .

$$E_1 = E_2$$

$$E_1 \perp E_2$$

E_1 und E_2 schneiden sich in einer Geraden.

←



Lagebeziehung zwischen Ebenen

$$E_1: \vec{n}_1 \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$$

$$E_2: \vec{n}_2 \cdot (\vec{x} - \vec{b}) = 0$$

$$E_1 \parallel E_2, E_1 \subsetneq E_2$$

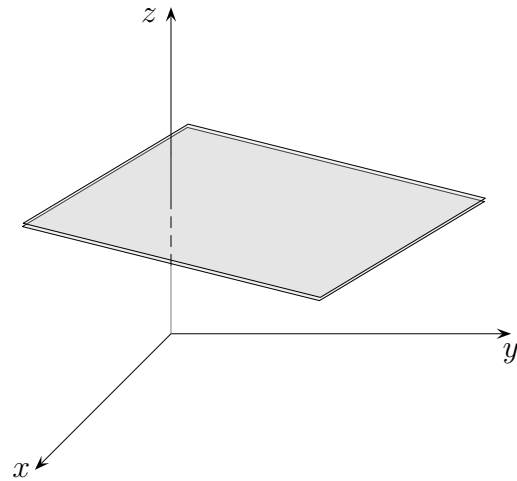
$$E_1 = E_2$$

$E_1 \parallel E_2$ und der Ortsvektor \vec{a} führt zu E_2 .

$$E_1 \perp E_2$$

E_1 und E_2 schneiden sich in einer Geraden.

←



Lagebeziehung zwischen Ebenen

$$E_1: \vec{n}_1 \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$$

$$E_2: \vec{n}_2 \cdot (\vec{x} - \vec{b}) = 0$$

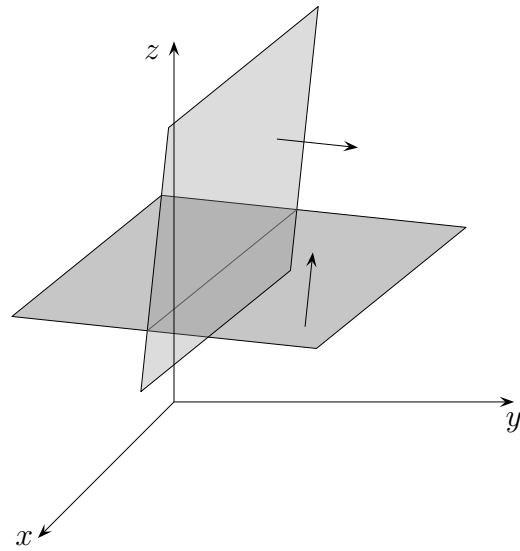
$$E_1 \parallel E_2, E_1 \subsetneq E_2$$

$$E_1 = E_2$$

$$E_1 \perp E_2 \qquad \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$$

E_1 und E_2 schneiden sich in einer Geraden.

←



Lagebeziehung zwischen Ebenen

$$E_1: \vec{n}_1 \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$$

$$E_2: \vec{n}_2 \cdot (\vec{x} - \vec{b}) = 0$$

$$E_1 \parallel E_2, E_1 \subsetneq E_2$$

$$E_1 = E_2$$

$$E_1 \perp E_2$$

E_1 und E_2 schneiden sich in einer Geraden.

←

Gegeben sind die beiden Ebenen:

$$E_1: \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 1 = 0 \quad E_2: \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 6 = 0$$

Gesucht ist eine Gleichung der Schnittgeraden.

Der Richtungsvektor der Schnittgeraden zweier Ebenen steht senkrecht auf den Normalenvektoren beider Ebenen.

Ein Richtungsvektor ergibt sich daher aus dem Vektorprodukt der beiden Normalenvektoren.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 26 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Ein Stützvektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ müsste beiden Ebenengleichungen genügen:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 1 = 0 \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 6 = 0$$

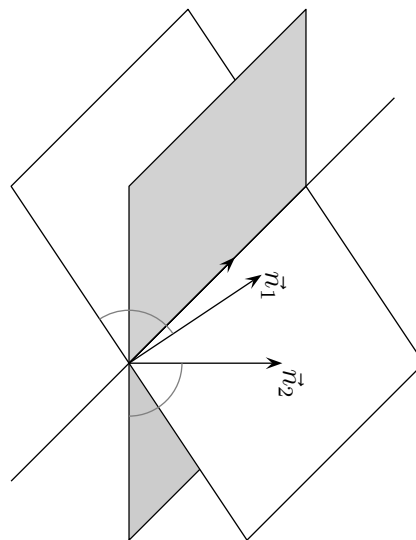
Hierbei kann eine Koordinate, hier z.B. $z = 0$, vorgegeben werden, x und y sind dann auszurechnen.

$$\begin{array}{r} 3x - 4y = 1 \\ 5x + 2y = 6 \\ \hline x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \end{array}$$

Insgesamt erhalten wir eine Gleichung der Schnittgeraden:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$$

←



Lagebeziehung zwischen Geraden

$$g: \vec{x} = \vec{a} + s\vec{u}$$

$$h: \vec{x} = \vec{b} + t\vec{v}$$

$$g \parallel h, g \neq h$$

$$\vec{u} = r\vec{v}$$

Richtungsvektoren sind kollinear (linear abhängig) und der Stützvektor von g führt nicht zu h .

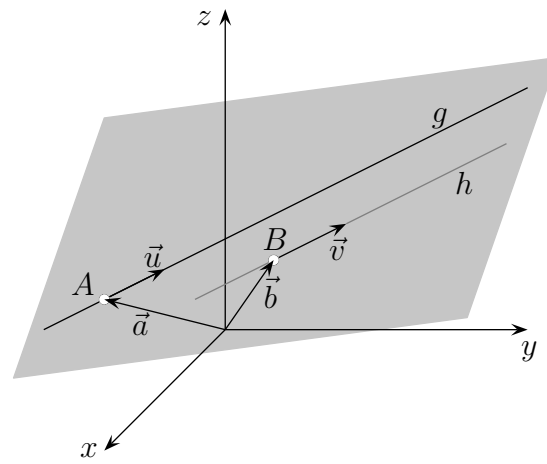
$$g = h$$

$$g \perp h$$

g und h haben genau einen Schnittpunkt.

g und h sind windschief.

←



Lagebeziehung zwischen Geraden

$$g: \vec{x} = \vec{a} + s\vec{u}$$

$$h: \vec{x} = \vec{b} + t\vec{v}$$

$$g \parallel h, g \neq h$$

$$g = h$$

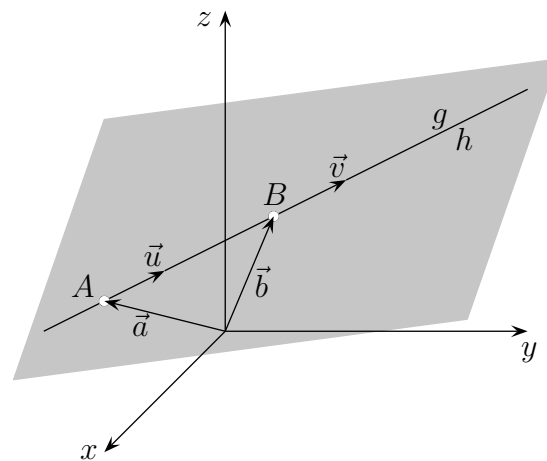
identisch, $g \parallel h$ und der Stützvektor von g führt zu h .

$$g \perp h$$

g und h haben genau einen Schnittpunkt.

g und h sind windschief.

←



Lagebeziehung zwischen Geraden

$$g: \vec{x} = \vec{a} + s\vec{u}$$

$$h: \vec{x} = \vec{b} + t\vec{v}$$

$$g \parallel h, g \neq h$$

$$g = h$$

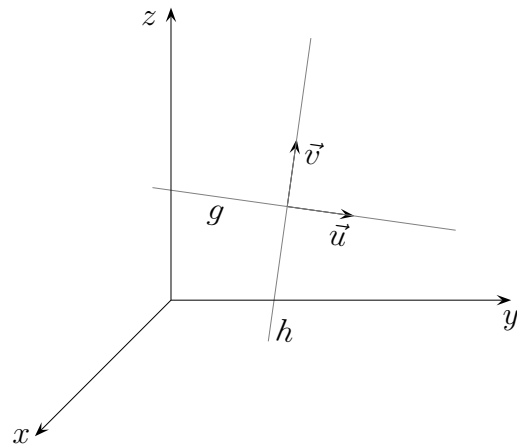
$$g \perp h$$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, d.h. die Richtungsvektoren sind orthogonal.

g und h haben genau einen Schnittpunkt.

g und h sind windschief.

←



Lagebeziehung zwischen Geraden

$$g: \vec{x} = \vec{a} + s\vec{u}$$

$$h: \vec{x} = \vec{b} + t\vec{v}$$

$$g \parallel h, g \neq h$$

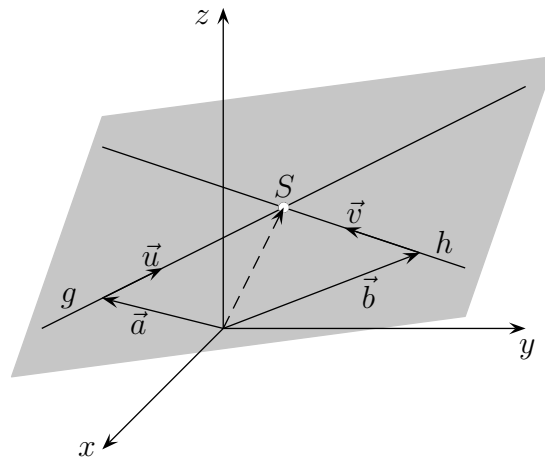
$$g = h$$

$$g \perp h$$

g und h haben genau einen Schnittpunkt. $\vec{a} + s\vec{u} = \vec{b} + t\vec{v}$ für je ein $s, t \in \mathbb{R}$

g und h sind windschief.

←



Lagebeziehung zwischen Geraden

$$g: \vec{x} = \vec{a} + s\vec{u}$$

$$h: \vec{x} = \vec{b} + t\vec{v}$$

$$g \parallel h, g \neq h$$

$$g = h$$

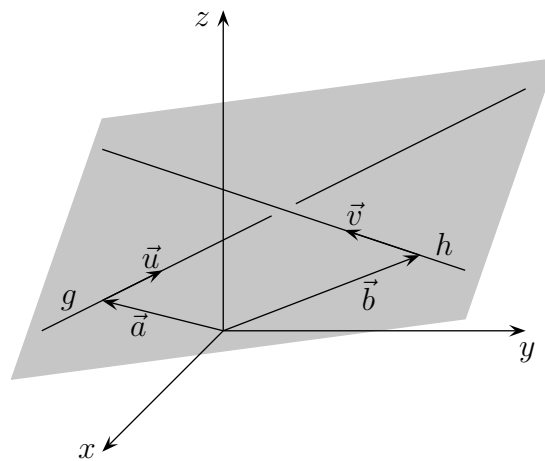
$$g \perp h$$

g und h haben genau einen Schnittpunkt.

g und h sind windschief.

g und h sind nicht parallel und schneiden sich nicht.

←



Lagebeziehung zwischen Gerade und Ebene

$$g: \vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}$$

$$E: \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{b}) = 0$$

$$g \parallel E, g \subsetneq E$$

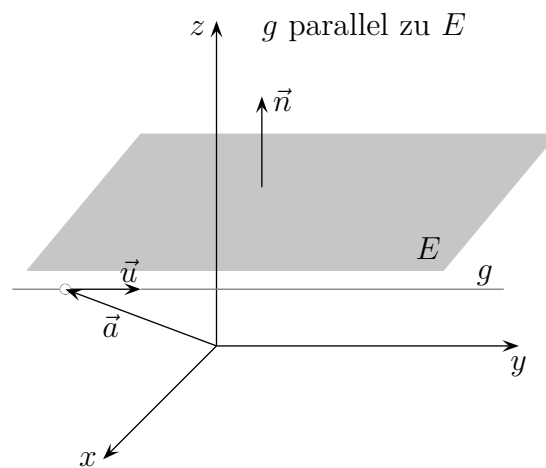
$$\vec{u} \perp \vec{n}, \vec{a} \notin E$$

$$g \subset E$$

$$g \perp E$$

g und E schneiden sich in einem Punkt.

←



Lagebeziehung zwischen Gerade und Ebene

$$g: \vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}$$

$$E: \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{b}) = 0$$

$$g \parallel E, g \subsetneq E$$

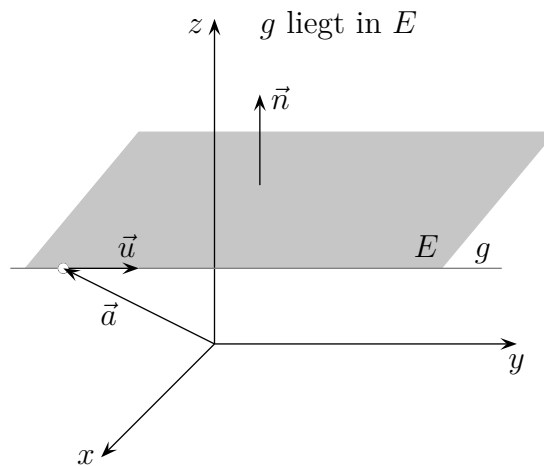
$$g \subset E$$

$$g \perp E$$

g und E schneiden sich in einem Punkt.

$$\vec{u} \perp \vec{n}, \vec{a} \in E$$

←



Lagebeziehung zwischen Gerade und Ebene

$$g: \vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}$$

$$E: \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{b}) = 0$$

$$g \parallel E, g \not\subset E$$

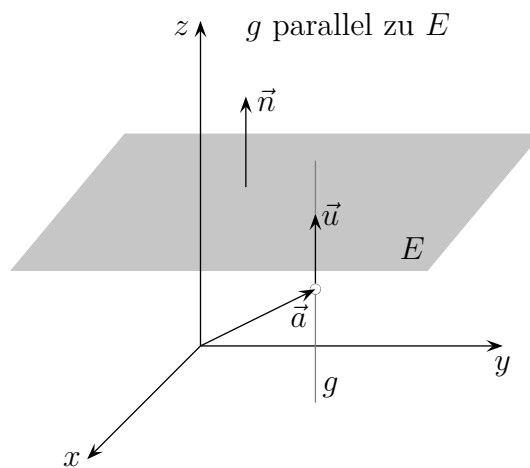
$$g \subset E$$

$$g \perp E$$

$$\vec{u} = r\vec{n}$$

g und E schneiden sich in einem Punkt.

←



Lagebeziehung zwischen Gerade und Ebene

$$g: \vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}$$

$$E: \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{b}) = 0$$

$$g \parallel E, g \not\subset E$$

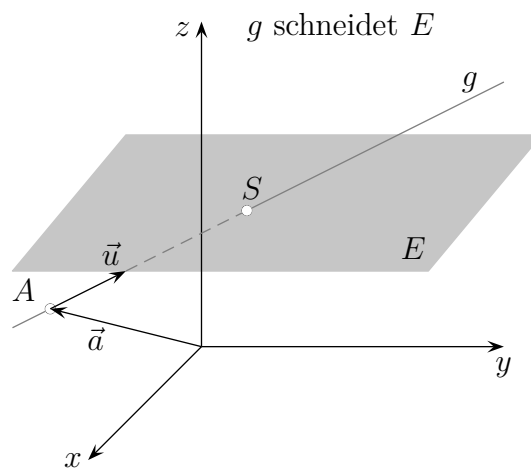
$$g \subset E$$

$$g \perp E$$

g und E schneiden sich in einem Punkt.

g in E einsetzen, es gibt genau ein t .

←



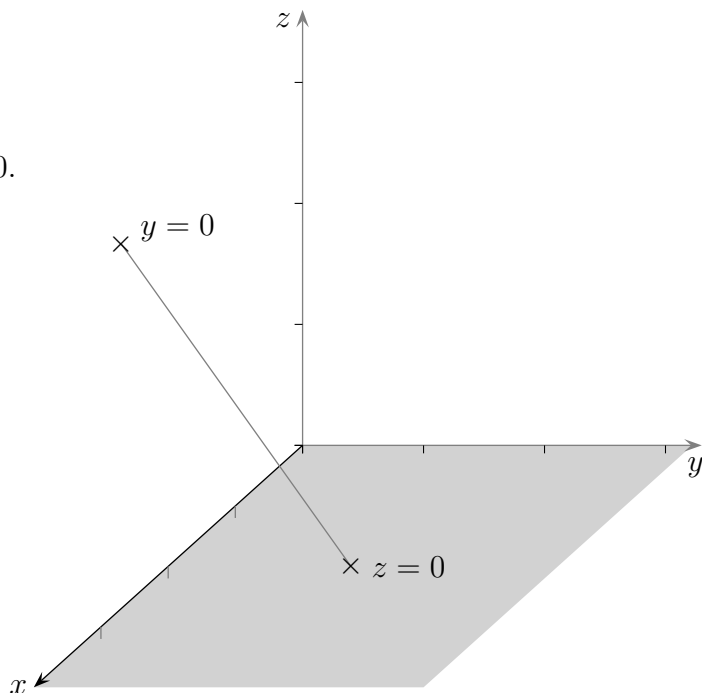
Spurpunkte einer Geraden
Spurgerade einer Ebene

Spurpunkte einer Geraden

Die Punkte, in denen die Gerade die Koordinatenebenen schneidet, heißen Spurpunkte.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Für den Spurpunkt auf der xy -Ebene gilt $z = 0$.
Es muss für diesen Punkt $0 = a_3 + \lambda u_3$ sein.
Diese Beziehung wird nach λ aufgelöst und
in die Geradengleichung eingesetzt.



←

Spurpunkte einer Geraden
Spurgerade einer Ebene

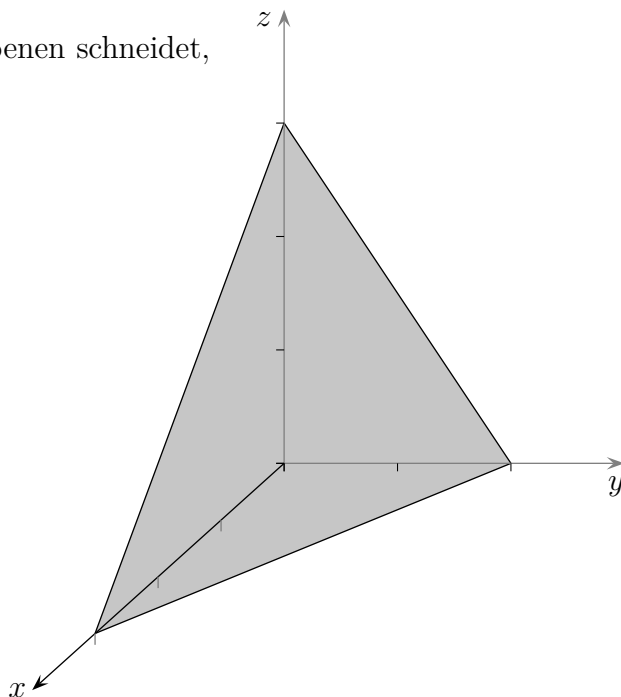
Spurgerade einer Ebene

Die Geraden, in denen die Ebene die Koordinatenebenen schneidet, heißen Spurgeraden.

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Für die Spurgerade in der xy -Ebene gilt $z = 0$.
Es muss für diese Gerade $0 = a_3 + \lambda u_3 + \mu v_3$ sein.
Diese Beziehung wird nach λ oder μ aufgelöst und
in die Ebenengleichung eingesetzt, anschließend
wird zusammengefasst.

←



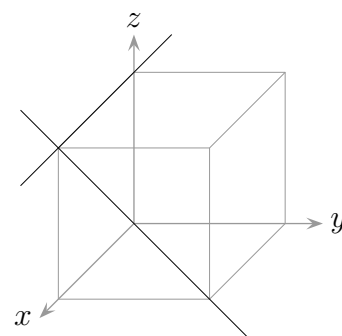
Gerade/Gerade
 Gerade/Ebene
 Ebene/Ebene
 allgemein

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}, \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

a)

r	s	
1	0	3
0	1	2
0	0	0

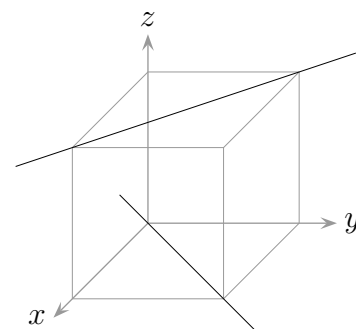
Das LGS ist eindeutig lösbar, hier: $r = 3, s = 2$.
 Die Geraden schneiden sich.
 Die 3. Zeile $r \cdot 0 + s \cdot 0 = 0$ ist für beliebige r und s erfüllt.



b)

r	s	
1	0	0
0	1	0
0	0	1

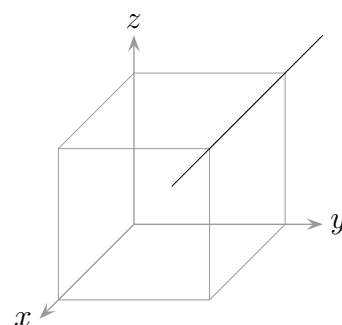
$r = 0, s = 0$
 Bis hier sieht es nach einer eindeutigen Lösung aus.
 3. Zeile: Widerspruch $s \cdot 0 = 1$
 Die Geraden sind windschief.



c)

r	s	
1	5	4
0	0	0
0	0	0

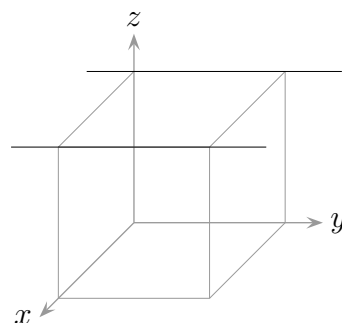
Für r und s gibt es unendlich viele Lösungen $r + s \cdot 5 = 4$.
 2. und 3. Zeile sind ohne Belang.
 Die Geraden sind identisch.



d)

r	s	
1	5	4
0	0	1
0	0	0

1. Zeile: unendl. viele Lösungen
 2. Zeile: Widerspruch, also kein Schnittpunkt
 3. Zeile: ohne Belang
 Die Geraden sind parallel und nicht identisch.



Die erste Gleichung enthält genau eine freie Variable (ein Wert kann beliebig gewählt werden). Eine weitere Gleichung, die nicht nur aus Nullen besteht, verringert hier die Anzahl der freien Variablen des LGSs auf null. Denn die Gleichung könnte nach einer Variablen aufgelöst und in die Erste eingesetzt werden. Ein Schnittpunkt läge vor, wenn nicht noch eine Widerspruchzeile folgte.

←

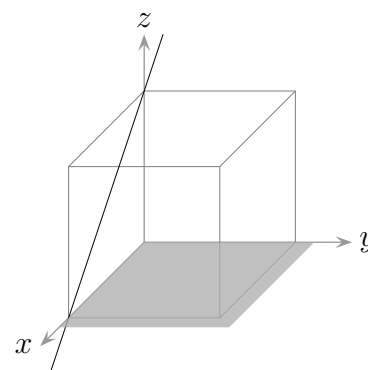
Gerade/Gerade
 Gerade/Ebene
 Ebene/Ebene
 allgemein

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}, \quad E: \vec{x} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

a)

t	r	s	
1	0	0	-1
0	1	0	2
0	0	1	1

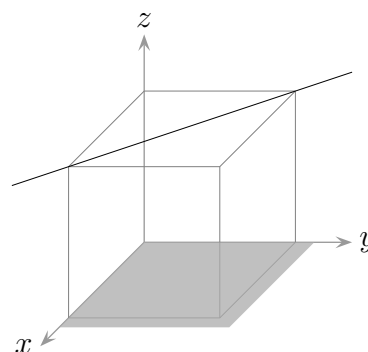
genau eine Lösung
 genau ein Schnittpunkt



b)

t	r	s	
1	0	1	0
0	1	2	0
0	0	0	1

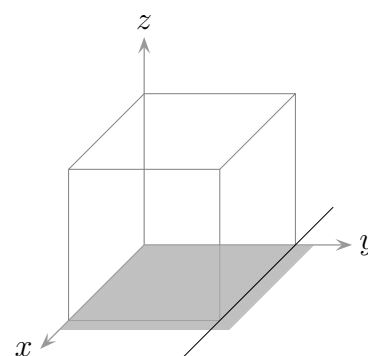
2 freie Variablen
 1 freie Variable, Gerade
 Widerspruch, keine Lösung
 g und E sind parallel



c)

t	r	s	
1	0	1	1
0	1	2	1
0	0	0	0

2 freie Variablen
 1 freie Variable, Gerade
 Schnitt ist eine Gerade
 g liegt in E



←

Gerade/Gerade
 Gerade/Ebene
 Ebene/Ebene
 allgemein

$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}, \quad E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

a)

r	s	u	v	
1	0	4	3	0
0	1	2	5	0
0	0	1	3	2

3 freie Variablen
 2 freie Variablen
 1 freie Variable

Es liegt eine Schnittgerade vor.
 Die 3. Zeile $u + v \cdot 3 = 2$ kann nach einer Variablen aufgelöst werden. Durch Einsetzen gelangt man zur Geradengleichung.

b)

r	s	u	v	
1	0	0	3	4
0	1	0	-1	2
0	0	0	1	0

3 freie Variablen
 2 freie Variablen
 1 freie Variable

Es liegt eine Schnittgerade vor.
 Die 3. Zeile liefert $v = 0$.
 Durch Einsetzen gelangt man zur Geradengleichung.

c)

r	s	u	v	
1	0	4	3	0
0	1	2	5	0
0	0	0	0	0

3 freie Variablen
 2 freie Variablen, Ebene

Die Ebenen sind identisch.

d)

r	s	u	v	
1	0	4	3	0
0	1	2	5	0
0	0	0	0	1

3 freie Variablen
 2 freie Variablen, Ebene
 Widerspruch

Die Ebenen sind parallel aber nicht identisch.

Schnittgerade:

Falls keine einfache Beziehung wie $v = 0$ (siehe b)) existiert, so sucht man sich eine Gleichung, in der nur r und s oder aber nur u und v vorkommen (siehe a)). Da der eine Parameter vom anderen abhängt, kommt man durch Einsetzen in die entsprechende Ebenengleichung zu einer Geradengleichung. Wenn auch dies nicht möglich ist, sind 2 Gleichungen zu verwenden, die einen Parameter gemeinsam haben. Durch Eliminieren gelangt man zu einer Beziehung von r und s bzw. u und v .

←

Gerade/Gerade

Gerade/Ebene

Ebene/Ebene

allgemein

Die verschiedenen Möglichkeiten der Lagebeziehungen von gleichen oder verschiedenen Objekten (Geraden, Ebenen) lassen sich aus der Dreiecksform auf einheitliche Weise ablesen.

t	r	s	
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
0	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
0	0	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

2 freie (unabhängige) Variablen, Ebene
1 freie Variable, Gerade
keine freie Variable, Punkt

Wir ermitteln die Anzahl der freien Variablen des LGSs und beginnen mit der 1. Gleichung. Sie hat (hier) 2 freie Variablen (2 könnten beliebig gewählt werden, der Wert der 3. Variablen ergäbe sich aus der Gleichung). Von n Variablen einer Gleichung sind $n - 1$ unabhängig. Jede weitere Gleichung, die nicht nur aus Nullen besteht, verringert die Anzahl der freien Variablen um 1 (eine Gleichung könnte nach einer Variablen aufgelöst und in die Andere eingesetzt werden). Die Anzahl der freien Variablen bestimmt das (Schnitt-)Objekt.

Bei einer Widerspruchszeile der Form $0 \ 0 \ 0 \ | \ 1$ ergibt sich kein Schnittobjekt. 2 Ebenen, bzw. eine Gerade und eine Ebene verlaufen dann echt parallel, 2 Geraden entweder parallel oder windschief, je nachdem, welche Entscheidungslage vor dem Widerspruch vorlag.

←

Die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.
 Der Schnittpunkt teilt jede Seitenhalbierende im Verhältnis 1:2.
 Dieser Punkt ist der Schwerpunkt des Dreiecks.

Sei A der Ursprung und $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

Gerade BF : $\vec{x} = \vec{a} + \lambda \overrightarrow{BF}$
 $\vec{x} = \vec{a} + \lambda \left(\frac{1}{2} \vec{b} - \vec{a} \right)$

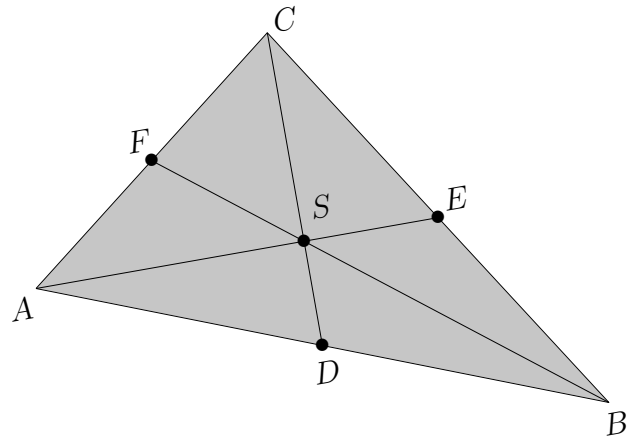
Gerade AE : $\vec{x} = \lambda \frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{b})$

Schnitt: $\vec{a} + \lambda \left(\frac{1}{2} \vec{b} - \vec{a} \right) = \mu \frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{b})$

$\Leftrightarrow (1 - \lambda - \frac{1}{2} \mu) \vec{a} + (\frac{1}{2} \lambda - \frac{1}{2} \mu) \vec{b} = \vec{0}$

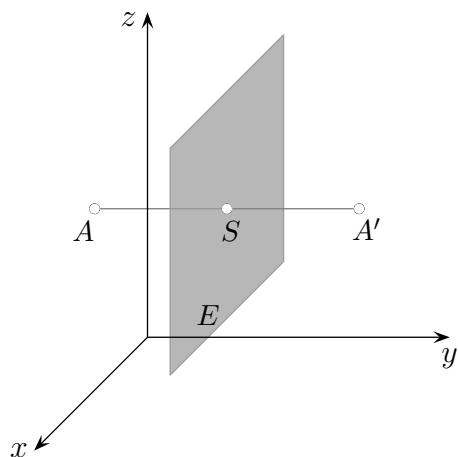
$\Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{3}, \quad \mu = \frac{2}{3}$

Die Gerade CD verläuft auch durch S .



←

Punkt A spiegeln
 an der Ebene E
 am Punkt Q
 an der Geraden g



$$E: \vec{n} \cdot \vec{x} - c = 0$$

Ermittle mit $g: \vec{x} = \vec{OA} + t\vec{n}$ den Schnittpunkt S .

$$\vec{OA'} = \vec{OS} + \vec{AS}$$

←

Spiegel den Punkt $P(-4 \mid -9 \mid -1)$ an der Ebene

a) $E: -2x + y + 2z = 6$

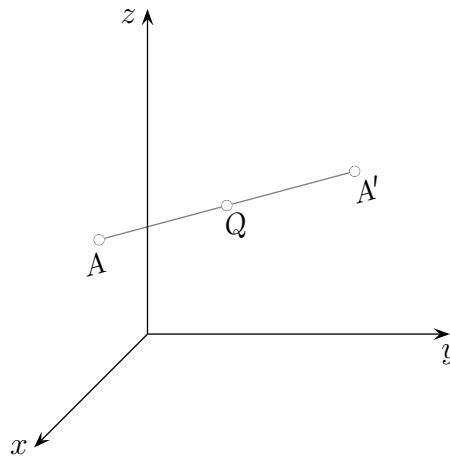
Schnittpunkt $S(-6 \mid -8 \mid 1)$, $P'(-8 \mid -7 \mid 3)$

b) $E: -x + y + 2z = 2$

$S(-11/2 \mid -15/2 \mid 2)$, $P'(-7 \mid -6 \mid 5)$

Punkt A spiegeln
 an der Ebene E
 am Punkt Q
 an der Geraden g

$$\vec{OA'} = \vec{OQ} + \vec{AQ}$$



Spiegel den Punkt $A(-4 | 5 | 3)$ am Punkt

a) $Q(1 | 2 | -2)$

$A'(6 | -1 | -7)$

b) $R(-2 | 3 | -2)$

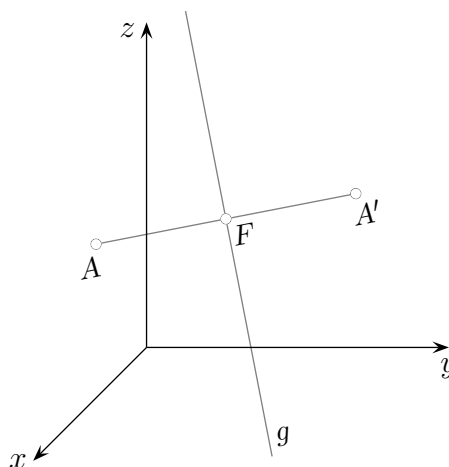
$A'(0 | 1 | -7)$

Punkt A spiegeln
 an der Ebene E
 am Punkt Q
 an der Geraden g

$$\vec{OA'} = \vec{OF} + \vec{AF}$$

Der Fußpunkt F wird benötigt,
 siehe Abstand Punkt/Gerade.

←



Spiegel den Punkt $P(6 \mid 3 \mid -3)$ an der Geraden

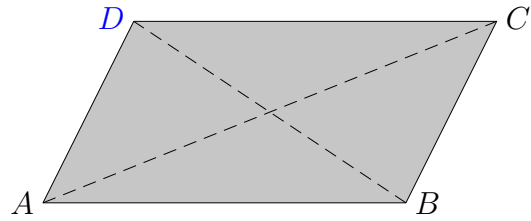
a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Fußpunkt $F(4 \mid 2 \mid 0)$, $P'(2 \mid 1 \mid 3)$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$F(-1 \mid 7/2 \mid -5/2)$, $P'(-8 \mid 4 \mid -2)$

Punkte A, B, C ergänzen zu
einem Parallelogramm
einer Raute
einem Quadrat



$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{BC}$$

oder

$$\vec{OD} = \vec{OC} + \vec{BA}$$

←

Gegeben sind die Punkte $A(4 | 2 | 3)$, $B(1 | 8 | 5)$ und $C(-2 | 1 | -3)$.
Bestimme die Koordinaten eines weiteren Punktes D so,
dass das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm ist.

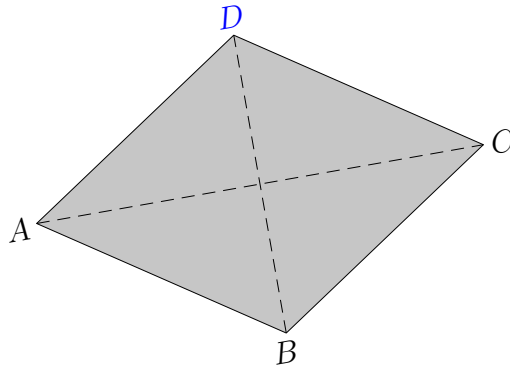
$$D(1 | -5 | -5)$$

Punkte A, B, C ergänzen zu
einem Parallelogramm
einer Raute
einem Quadrat

$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{BC}$$

oder

$$\vec{OD} = \vec{OC} + \vec{BA}$$



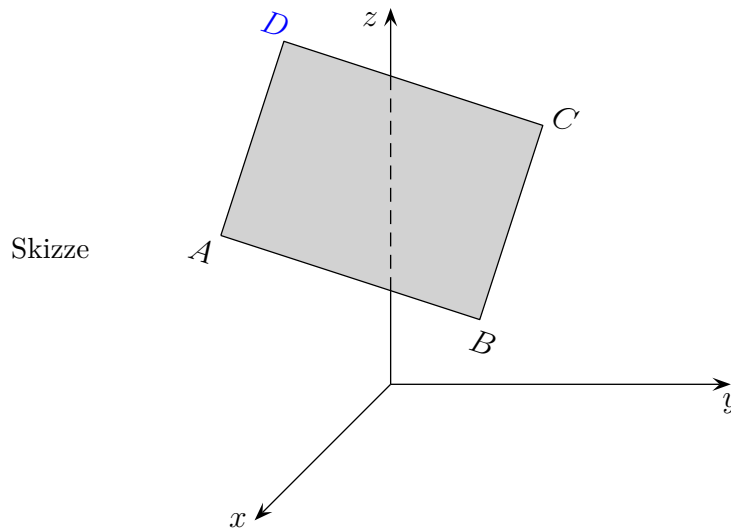
←

Gegeben sind die Punkte $A(2 \mid -2 \mid 0)$, $B(-2 \mid 1 \mid -3)$ und $C(-6 \mid 4 \mid 0)$.

- Zeige, dass das Dreieck ABC gleichschenkelig und nicht gleichseitig ist.
- Bestimme die Koordinaten eines weiteren Punktes D so, dass das Viereck $ABCD$ eine Raute ist.

$$D(-2 \mid 1 \mid 3)$$

Punkte A, B, C ergänzen zu
 einem Parallelogramm
 einer Raute
 einem Quadrat



$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{BC}$$

oder

$$\vec{OD} = \vec{OC} + \vec{BA}$$

←

Untersuche, ob die Punkte $A(3 | 12 | 2)$, $B(1 | 8 | 6)$ und $C(5 | 4 | 4)$ zu einem Quadrat ergänzt werden können.

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad |\vec{AB}| = 6, \quad \vec{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad |\vec{BC}| = 6$$

$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D(7 | 8 | 0)$$

Die 4 Seiten des Vierecks sind gleich lang.

Ein Quadrat liegt vor, da gilt (Skalarprodukt ist null): $\vec{AB} \perp \vec{BC}$

